1ª edizione 1970
2ª edizione 1974
3ª edizione 1980
4ª edizione 1986
ristampa 1988
ristampa 1990
ristampa 1991
ristampa 1993
ristampa 1995
ristampa 1997

ISBN 88-7784-045-5

Stampato in Italia - Printed in Italy

MASSIMO NIGRO
ordinario di Fisica Generale
nell'Università di Padova

CESARE VOCI
ordinario di Fisica Generale
nell'Università di Padova

Problemi di
FISICA GENERALE

ELETTROMAGNETISMO - OTTICA

4ª edizione



EDIZIONI
LIBRERIA CORTINA
PADOVA 1997

CAPITOLO 1

CAMPI, FORZE E POTENZIALI ELETTROSTATICI NEL VUOTO

1a. Una carica elettrica puntiforme in quiete genera nello spazio vuoto un campo e un potenziale elettrostatici dati dalle espressioni

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{u}_r \quad , \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad , \tag{1.1}$$

dove q è il valore della carica che crea il campo, r la distanza tra il punto O in cui si trova la carica e il punto P in cui se ne calcola l'effetto, $\mathbf{u}_r$ il versore del raggio vettore $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$. Se sono presenti più cariche puntiformi l'effetto totale si ottiene *sommando vettorialmente i campi e algebricamente i potenziali* dovuti alle singole cariche.

Una carica elettrica può essere distribuita su una linea o una superficie o un volume con densità λ, σ, ϱ rispettivamente. Il campo e il potenziale si ottengono per integrazione

$$\mathbf{E}_\lambda = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \mathbf{u}_r \frac{\lambda ds}{r^2} \quad , \quad \mathbf{E}_\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Sigma \mathbf{u}_r \frac{\sigma d\Sigma}{r^2} \quad , \quad \mathbf{E}_\varrho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \mathbf{u}_r \frac{\varrho d\tau}{r^2}$$

$$V_\lambda = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_s \frac{\lambda ds}{r} \quad , \quad V_\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Sigma \frac{\sigma d\Sigma}{r} \quad , \quad V_\varrho = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\varrho d\tau}{r} \tag{1.2}$$

essendo ds, $d\Sigma$ e $d\tau$ gli elementi infinitesimi di linea, superficie e volume.

La possibilità di sommare direttamente i campi e i potenziali dovuti a più cariche per calcolare l'effetto totale viene anche enunciata come *principio di sovrapposizione*. Essa discende dal fatto che le equazioni differenziali cui obbediscono il campo e il potenziale elettrostatici sono lineari nel campo o nel potenziale: quindi *se in due diverse situazioni si hanno due date soluzioni, al verificarsi contemporaneo di entrambe le situazioni si ha una soluzione che è la somma delle precedenti, ammesso che la presenza contemporanea non crei alterazioni in ciascuna delle situazioni originarie.*

La forza che agisce su una carica puntiforme q posta in un punto ove il campo elettrico vale $\mathbf{E}$ è data da $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Se la carica elettrica è distribuita, bisogna ricorrere a espressioni integrali del tipo (1.2). In ogni caso occorre tener conto delle possibili modificazioni dovute all'introduzione della carica q.

INDICE

1b. Il campo elettrostatico nel vuoto è un campo conservativo; il campo scalare da cui deriva è il potenziale:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\, V \qquad \text{ovvero} \qquad V(P_2) - V(P_1) = -\int_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} \quad , \tag{1.3}$$

essendo l una qualsiasi linea orientata che va dal punto P_1 al punto P_2. Per un percorso chiuso la circuitazione di $\mathbf{E}$ è nulla:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0 \quad . \tag{1.4}$$

In termini differenziali, applicando il teorema di Stokes (A.14),

$$\text{rot}\, \mathbf{E} = 0 \quad . \tag{1.5}$$

L'altra proprietà fondamentale del campo elettrostatico, legata alla dipendenza da $1/r^2$, è il *teorema di Gauss*: il flusso del campo $\mathbf{E}$ attraverso una superficie chiusa Σ è proporzionale alla carica contenuta entro la superficie:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \, . \tag{1.6}$$

In termini differenziali, applicando il teorema della divergenza (A.12),

$$\text{div}\, \mathbf{E} = \varrho / \varepsilon_0 \, . \tag{1.7}$$

Le equazioni (1.5) e (1.7) sono le *equazioni di Maxwell* per il campo elettrostatico nel vuoto. Mettendole insieme si ottiene

$$\text{div grad}\, V = \nabla^2 V = -\varrho/\varepsilon_0 \, , \tag{1.8}$$

che è detta *equazione di Poisson*. Nello spazio privo di cariche il potenziale elettrostatico soddisfa all'*equazione di Laplace* $\nabla^2 V = 0$.

La (1.3) lascia indeterminato il valore del potenziale: noto $\mathbf{E}$, V è noto a meno di una costante additiva che viene fissata normalmente dalla convenzione di porre eguale a zero il potenziale all'infinito.

1c. Ricordiamo alcuni argomenti specifici.

A) Passando attraverso uno strato superficiale di carica di densità σ, la componente normale del campo elettrostatico varia di σ/ε_0, quella tangenziale rimane costante.

B) In un conduttore in equilibrio il potenziale è ovunque costante; il campo è nullo all'interno. Se il conduttore è carico, la carica si distribuisce sulla superficie (con densità σ) e in un punto esterno, infinitamente vicino alla superficie, il campo vale $\sigma/\varepsilon_0 \mathbf{u}_n$, essendo $\mathbf{u}_n$ il versore della normale alla superficie, orientata verso l'esterno.

C) Un dipolo elettrico produce il potenziale

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \; ; \tag{1.9}$$

$\mathbf{p}$ è il momento del dipolo, r la distanza dal centro del dipolo al punto in cui si calcola V, θ l'angolo tra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{r}$. La formula vale per distanze superiori di almeno un ordine di grandezza alle dimensioni del dipolo.

1d. Il modulo della forza tra due cariche puntiformi è $q_1 q_2/4\pi\varepsilon_0 r^2$, formula nota come *legge di Coulomb* che ci permette di definire carica unitaria quella che posta a un metro di distanza da una carica eguale la respinge con una forza pari a $1/4\pi\varepsilon_0$ newton. L'unità di misura così individuata si chiama coulomb; per ε_0 si ha allora:

$$\varepsilon_0 = \frac{\text{coulomb}^2}{\text{newton m}^2} = \frac{\text{coulomb}^2}{\text{joule m}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt m}} = \frac{\text{farad}}{\text{m}} \, ,$$

avendo definito due nuove unità di misura:

$$\text{volt} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} \quad , \quad \text{farad} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} \, .$$

Come si vedrà in seguito il valore numerico di ε_0 è $10^7/4\pi c^2$, dove c è la velocità della luce nel vuoto, $2.998 \cdot 10^8$ m/s. Quindi

$$\varepsilon_0 = 8.853 \cdot 10^{-12} \, \frac{\text{farad}}{\text{m}} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.987 \cdot 10^9 \simeq 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{m}}{\text{farad}} \, .$$

Per le nuove unità di misura introdotte si utilizzano i simboli C, V, F.

Il campo elettrico ha le dimensioni forza/carica e si misura in N/C ovvero V/m. Dalla (1.3) si vede allora che il potenziale si misura in volt. Per le varie densità di carica, il flusso di campo e il momento di dipolo si hanno le unità C/m, C/m^2, C/m^3, Vm, Cm.

1e. Pur apparendo a livello macroscopico distribuita con continuità, la carica elettrica ha una struttura discontinua: esiste cioè una *carica elementare e* di cui qualunque altra carica è multiplo intero. La carica e è eguale in modulo a quella posseduta dal protone e dall'elettrone; per i segni si assume positiva la carica del protone e negativa quella dell'elettrone; il valore della carica elementare è $1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Se si confrontano tra loro la forza elettrostatica e la forza gravitazionale tra un protone e un elettrone posti a una distanza di 10^{-8} cm (che è l'ordine di grandezza delle dimensioni di un atomo) si trova

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{10^{-20}} = 2.30 \cdot 10^{-8} \text{ N} \quad ,$$

$$F_{gr} = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.06 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{10^{-20}} = 1.01 \cdot 10^{-47} \text{ N} \, .$$

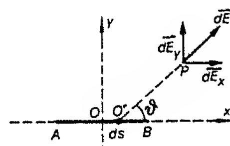
Il rapporto vale $\sim 10^{39}$ in favore delle forze elettrostatiche: queste sono cioè enormemente più forti di quelle gravitazionali, che pertanto vengono di solito trascurate nei calcoli con particelle atomiche o subatomiche.

* * *

1.1. ***Studiare il campo e il potenziale elettrostatici generati da una carica distribuita con densità uniforme λ su un filo di lunghezza 2a e sezione trascurabile.***

Nel piano individuato dal filo AB e dal punto P generico fissiamo un sistema di coordinate con origine nel centro O del filo, asse x parallelo e asse y ortogonale al filo. Sull'elemento di filo ds c'è la carica $dq = \lambda ds$ che produce nel punto P il campo

$$\mathbf{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r^2}\,\mathbf{u}_r$$



diretto come $\mathbf{O'P}$ e con verso come in figura se λ è positiva. Le componenti del campo sono

$$dE_x = dE\cos\theta \quad , \quad dE_y = dE\,\mathrm{sen}\,\theta \, .$$

Per ottenere il campo dovuto a tutto il filo dobbiamo integrare sulla lunghezza del filo; siano x e y le coordinate (fisse) del punto P e s la coordinata corrente sul filo, variabile tra $-a$ e $+a$. Conviene esprimere r, $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$ in funzione di x, y e s:

$$r = [(x-s)^2 + y^2]^{1/2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x-s}{[(x-s)^2+y^2]^{1/2}} \quad , \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{[(x-s)^2+y^2]^{1/2}} .$$

Effettuando queste sostituzioni abbiamo le componenti del campo infinitesimo in P in funzione della posizione dell'elemento ds:

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x-s)\,ds}{[(x-s)^2+y^2]^{3/2}} \quad , \quad dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y\,ds}{[(x-s)^2+y^2]^{3/2}} ,$$

da cui integrando tra $-a$ e $+a$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[(x-a)^2+y^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+y^2]^{1/2}}\right\}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left\{\frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{1/2}} - \frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{1/2}}\right\} . \qquad \text{(a)}$$

Il campo risultante ha il modulo $E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2}$ e direzione formante con l'asse x un angolo ϕ tale che $\mathrm{tg}\,\phi = E_y/E_x$. Le conclusioni raggiunte valgono qualunque siano le coordinate del punto P e comunque si ruoti il piano contenente il punto P rispetto all'asse x (*simmetria di rotazione* rispetto all'asse contenente il filo).

Vediamo alcuni casi particolari: se $x = 0$, cioè nei punti dell'asse y, $E_x = 0$ in quanto la parte destra e la parte sinistra del filo danno contributi eguali ed opposti, per cui

$$E = E_y = \frac{2a\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y(a^2+y^2)^{1/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y(a^2+y^2)^{1/2}} ,$$

essendo $q = 2a\lambda$ la carica totale del filo. Invece nei punti dell'asse x, dove $y = 0$, il campo non può avere che la componente E_x e risulta

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2-a^2)} .$$

Per distanze dal filo grandi rispetto alle dimensioni del filo il campo tende ad assumere l'andamento del campo di una carica puntiforme $q = 2a\lambda$ localizzata nel punto O: a grandi distanze la struttura della distribuzione di carica non è più importante (la verifica è particolarmente facile nei punti degli assi x e y). Invece nei punti del filo il nostro metodo di calcolo non porta a risultati corretti, essendoci contributi infiniti agli integrali.

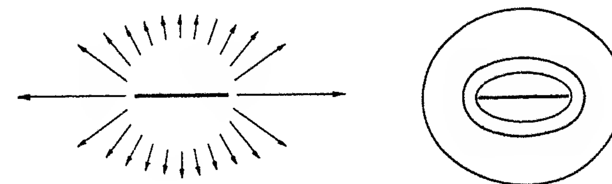
La determinazione del potenziale procede in modo analogo:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ds}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ds}{[(x-s)^2+y^2]^{1/2}} ,$$

$$V = \int_{-a}^{a} dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\log\frac{x+a+[(x+a)^2+y^2]^{1/2}}{x-a+[(x-a)^2+y^2]^{1/2}} .$$

Si potrebbero ora calcolare le componenti del campo elettrico come $E_x = -\partial V/\partial x$, $E_y = -\partial V/\partial y$, cioè in base alla (1.3), verificando che coincidono con le (a).

Nella figura sono disegnati l'andamento del campo al variare del punto P su una circonferenza di centro O e raggio paragonabile alle dimensioni del filo e alcune linee equipotenziali.



1.2. ***Un filo rettilineo indefinito di sezione trascurabile possiede una densità uniforme di carica λ = 10⁻⁸ C/m. Calcolare il campo elettrostatico nel punto P posto a distanza y = 1 cm dal filo e la differenza di potenziale tra tale punto e un altro posto a 3 cm dal filo.***

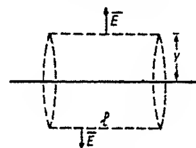
Estendiamo con un passaggio al limite i risultati del problema precedente. Quando la lunghezza del filo tende all'infinito E_x va a zero e il campo, solo *radiale*, vale

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} .$$

A questo stesso risultato si arriva con semplicità applicando il teorema di Gauss. Per la simmetria del problema possiamo stabilire subito alcune proprietà del campo del filo:

— in un punto distante y dal filo il campo deve essere radiale: le parti del filo a destra e a sinistra, essendo indefinite, danno eguali contributi che in x si elidono e in y si sommano;
— pertanto a parità di y il campo ha ovunque lo stesso valore;
— l'unica dipendenza possibile è da y (campo a simmetria cilindrica radiale).

Queste considerazioni ci suggeriscono di scegliere come superficie cui applicare il teorema di Gauss (1.6) una superficie cilindrica di raggio y e altezza l, coassiale al filo. Le basi non portano alcun contributo al flusso perché **E** e $\mathbf{u}_n$ formano un angolo di 90°; il flusso attraverso la superficie laterale è semplicemente $E\Sigma$ essendo **E** costante a parità di y e diretto normalmente alla superficie. La (1.6) si scrive così:



$$2\pi y l E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$$

Numericamente $E = 18 \cdot 10^3$ V/m.

Il calcolo del potenziale presenta una difficoltà apparentemente insormontabile: il passaggio al limite dell'espressione trovata nel problema precedente dà un valore infinito e il calcolo risulta così privo di significato. Se però ricorriamo alla (1.3), che è la definizione corretta, siamo in grado di calcolare le differenze di potenziale; ponendoci per esempio su una retta normale al filo (versore $\mathbf{u}_n$) con $y_1 < y_2$:

$$V(y_1) - V(y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\, \mathbf{u}_n \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log \frac{y_2}{y_1} .$$

La differenza di potenziale dipende solo dalle distanze dal filo: *le superficie equipotenziali sono superficie cilindriche coassiali al filo*. Nel caso specifico $\Delta V = 197.8$ V.

Quanto visto ci serve per mettere in evidenza due fatti:

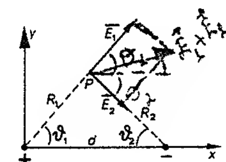
1) occorre cautela nel passare da casi fisici realizzabili in pratica (problema 1.1) a situazioni ideali (problema 1.2), in quanto non è detto che le proprietà matematiche delle soluzioni persistano in qualunque situazione, soprattutto quando si considerano cariche e distanze infinite;
2) agli effetti pratici ciò che ha realtà fisica ed è misurabile è la differenza di potenziale tra due punti e non il valore assoluto del potenziale in un punto.

Non escluderemo per questo dalla trattazione i casi ideali; essi sono spesso utili e istruttivi e con opportune approssimazioni i risultati trovati possono essere applicati a casi reali. Per esempio, una carica puntiforme posta a pochi centimetri da un filo carico uniformemente, rettilineo su una distanza di molti metri, risentirà di un campo che con buona approssimazione può essere scritto $\lambda/2\pi\varepsilon_0 y$.

1.3. ***Due fili indefiniti, paralleli e rettilinei, sono carichi con densità uniforme λ, eguale in modulo per entrambi, ma di segno opposto, pari a 10^{-8} C/m. La distanza tra i due fili è $d = 5$ cm. Calcolare il campo elettrostatico E nel punto P distante $R_1 = 3$ cm dal filo positivo e $R_2 = 4$ cm da quello negativo. Calcolare inoltre la forza per unità di lunghezza con cui i due fili si attraggono.***

I fili sono ortogonali al piano che contiene il disegno. I campi $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$, le cui direzioni e i cui versi sono indicati, hanno moduli pari a

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_1} \quad , \quad E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_2} .$$



Le coordinate x, y di P si ottengono risolvendo il sistema (intersezione di due circonferenze)

$$x^2 + y^2 = R_1^2 \quad , \quad (x-d)^2 + y^2 = R_2^2 :$$

$$x = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d} \quad , \quad y = \pm [R_2^2 - (x-d)^2]^{1/2}.$$

Evidentemente c'è simmetria in y; nella figura si è considerata la soluzione positiva. Le componenti E_x e E_y del campo risultante sono

$$E_x = E_1 \cos\theta_1 + E_2 \cos\theta_2 \quad , \quad E_y = E_1 \operatorname{sen}\theta_1 - E_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

con $\operatorname{sen}\theta_1 = y/R_1$ e $\operatorname{sen}\theta_2 = y/R_2$. Il modulo è $(E_x{}^2 + E_y^2)^{1/2}$ e l'angolo tra **E** e l'asse x si calcola da $\operatorname{tg}\theta = E_y/E_x$.

Utilizzando i dati numerici abbiamo i seguenti risultati:

$$E_1 = 6.0 \cdot 10^3 \,\frac{\text{V}}{\text{m}} \;, \; E_2 = 4.5 \cdot 10^3 \,\frac{\text{V}}{\text{m}} \;, \; x = 1.8 \text{ cm} \;, \; y = 2.4 \text{ cm} \;,$$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 0.8 \quad , \quad \cos\theta_1 = 0.6 \quad , \quad \operatorname{sen}\theta_2 = 0.6 \quad , \quad \cos\theta_2 = 0.8 \quad ,$$

$$E_x = 7.2 \cdot 10^3 \,\frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad E_y = 2.1 \cdot 10^3 \,\frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad E = 7.5 \cdot 10^3 \,\frac{\text{V}}{\text{m}} \;,$$

$$\operatorname{tg}\theta = 0.292 \quad , \quad \theta = 16.3°.$$

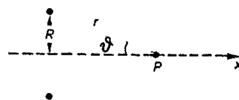
La forza per unità di lunghezza tra i fili si può calcolare a partire dalla forza risentita da un elemento di filo dz posto nel campo dell'altro filo. La carica su dz è $dq = \lambda dz$, il campo vale $\lambda/2\pi\varepsilon_0 d$, la forza è $dF = E dq = \lambda^2 dz/2\pi\varepsilon_0 d$. Per unità di lunghezza

$$F_l = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d} = 3.6 \cdot 10^{-5} \,\frac{\text{N}}{\text{m}} .$$

1.4. ***Una carica elettrica è distribuita uniformemente con densità λ su un anello sottile di raggio R. Calcolare il potenziale e il campo elettrostatico in un punto generico della retta normale al piano dell'anello e passante per il suo centro. In particolare calcolare il valore del campo nel punto P che dista $x = R/2^{1/2}$ dal centro dell'anello se $R = 1$ cm e $\lambda = 8.85 \cdot 10^{-10}$ C/m.***

Il potenziale prodotto da un elemento di anello ds in un generico punto P dell'asse x è $dV = \lambda ds / 4\pi\varepsilon_0 r$, con $r = (x^2 + R^2)^{1/2}$. Si integra su tutta la circonferenza e si ottiene:

$$V(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} \oint ds = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \operatorname{sen}\theta .$$



Il potenziale è massimo al centro dell'anello ($x = 0$, $\theta = \pi/2$) dove vale $V_0 = \lambda/2\varepsilon_0$, indipendente dal raggio dell'anello a parità di densità di carica (ma non a parità di carica: $\lambda = q/2\pi R$, $V_0 = q/4\pi\varepsilon_0 R$). Al crescere di x il potenziale decresce annullandosi all'infinito; l'andamento è simmetrico rispetto al centro.

Siccome il potenziale nei punti dell'asse dell'anello dipende solo da x, il campo elettrico ha solo la componente x, cioè è parallelo all'asse (nei punti dell'asse). Questa proprietà si ricava anche considerando che due elementi carichi ds, posti agli estremi di un diametro dell'anello, danno in P due campi elementari aventi la stessa componente secondo x e componenti eguali ed opposte ortogonalmente a x; ciò è vero per qualunque siffatta coppia di elementi. Il valore del campo è

$$E = E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} .$$

Il modulo del campo è simmetrico rispetto al centro, la direzione, come si è detto, coincide con quella dell'asse x, il verso è tale che, se λ è positiva, il campo è concorde all'asse x per $x > 0$ e discorde per $x < 0$.

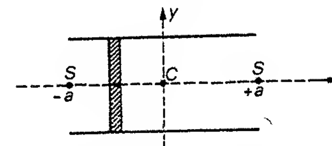
Il campo è nullo nel centro dell'anello e all'infinito: pertanto deve esserci un punto in cui il modulo è massimo. Annullando dE/dx si trova

$$x_{max} = \pm \frac{R}{2^{1/2}} \quad , \quad E_{max} = 0.38 \frac{\lambda}{\varepsilon_0 R} = 3.8 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} .$$

Come nel problema 1.1 notiamo che per $x \to \infty$, $E = \lambda R / 2\varepsilon_0 x^2 = q/4\pi\varepsilon_0 x^2$: a grande distanza è come se la carica fosse concentrata nel centro dell'anello.

1.5. ***Una carica è distribuita con densità uniforme σ su una superficie cilindrica di raggio R e altezza $2a$. Calcolare il potenziale e il campo in un punto generico dell'asse. In particolare calcolarli nel centro C e nel centro S delle due basi (su cui non c'è carica) prendendo $\sigma = 10^{-6}$ C/m², $R = 20$ cm, $2a = 40$ cm.***

Prendiamo il sistema di coordinate con origine nel punto C indicato in figura. Sulla superficie infinitesima (tratteggiata) $d\Sigma = 2\pi R\, ds$ si trova la carica $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi R\, \sigma ds$. Vediamo che possiamo schematizzare la superficie come una serie infinita di anelli con carica infinitesima distribuita con densità $d\lambda = dq/2\pi R = \sigma ds$, per cui ricorriamo ai risultati del problema 1.4. Detta $x - s$ la distanza tra il punto P sull'asse e il centro dell'anello, con s variabile tra $-a$ e $+a$, il campo infinitesimo prodotto dall'anello in P vale in modulo



$$dE = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \frac{(x-s)\,ds}{[(x-s)^2+R^2]^{3/2}} ;$$

integrando tra $-a$ e $+a$

$$E = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2+R^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+R^2]^{1/2}} \right\} .$$

Il campo è nullo nel centro C; per x positivo è concorde all'asse x, per x negativo è discorde, se σ è positiva; in ogni caso è parallelo all'asse. Per $x = a$

$$E_S = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{(4a^2+R^2)^{1/2}} \right] ;$$

per $x = -a$ si ottiene, in valore assoluto, lo stesso risultato essendo il campo simmetrico rispetto all'origine. Numericamente $E_S = 3.1 \cdot 10^4$ V/m.

Anche ora l'andamento del campo suggerisce l'esistenza di un massimo; l'annullamento della derivata prima porta però a un'equazione di sesto grado, per cui è conveniente un calcolo approssimato. Se $R = a$, come nel nostro caso, si trova il massimo per $x \simeq 1.16$ R.

Il procedimento per il calcolo del potenziale è analogo:

$$dV = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \frac{ds}{[(x-s)^2+R^2]^{1/2}} \quad , \quad V = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \log \frac{x+a+[(x+a)^2+R^2]^{1/2}}{x-a+[(x-a)^2+R^2]^{1/2}} .$$

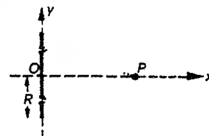
Il valore numerico nel centro C è $V_C = 2 \cdot 10^4$ V, nei punti S $V_S = 1.6 \cdot 10^4$ V; anche il potenziale è simmetrico rispetto al centro, dove assume il valore massimo.

Se la superficie cilindrica diventa indefinita il campo all'interno va a zero, mentre all'esterno è diretto radialmente e vale in modulo $E = \sigma R/\varepsilon_0 r$. Entrambe le proprietà si dimostrano facilmente col teorema di Gauss. Le differenze di potenziale si calcolano integrando il campo; per esempio, rispetto all'interno della superficie, dove il potenziale è costante, $\Delta V = (\sigma R/\varepsilon_0) \log r/R$, se $r > R$. Si confronti questa situazione con quella del problema 1.2.

1.6. ***Un disco di raggio $R = 30$ cm e spessore trascurabile è carico con densità uniforme $\sigma = 8.85 \cdot 10^{-8}$ C/m². Dare l'espressione del potenziale e del campo nei punti dell'asse e calcolarne il valore nel centro O del disco e nel punto Q distante R da O.***

La corona circolare compresa tra i raggi y e $y + dy$, di area $d\Sigma = 2\pi y\, dy$, si può assimilare a un anello carico di raggio y: $dq = \sigma d\Sigma$ e $d\lambda = dq/2\pi y = \sigma dy$. Il potenziale dovuto a tale anello si scrive

$$dV = \frac{y d\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$



e il potenziale totale si ottiene per integrazione tra zero e R:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [(x^2+R^2)^{1/2} - (x^2)^{1/2}] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [(x^2+R^2)^{1/2} - |x|] .$$

Con la scrittura $(x^2)^{1/2}$ si intende che si assume la determinazione positiva della radice, come si deve in quanto il potenziale è simmetrico rispetto al centro, dove è massimo.

Quando x è molto maggiore di R l'espressione del potenziale si semplifica: scrivendo $V(x) = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2} - 1\right]$, sviluppando in serie $\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2}$ e arrestandosi al primo termine $1 + \frac{R^2}{2x^2}$, si arriva a

$$V = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x} ,$$

come se tutta la carica del disco fosse concentrata nel centro.

Calcoliamo il campo a partire dal potenziale:

$$E = E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x^2+R^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2)^{1/2}}\right] .$$

La direzione è quella dell'asse, il verso, se σ è positiva, concorde o discorde all'asse x a seconda che sia $x > 0$ oppure $x < 0$; il valore assoluto è simmetrico rispetto al centro.

Per $x \to 0$ il limite destro è diverso da quello sinistro: uno è $\sigma/2\varepsilon_0 \mathbf{u}_x$, l'altro $-\sigma/2\varepsilon_0 \mathbf{u}_x$. Nell'attraversare il disco il campo subisce una discontinuità di σ/ε_0. Ciò è in accordo col risultato generale che *la componente normale del campo presenta la discontinuità σ/ε_0 nell'attraversare una superficie carica, mentre la componente tangenziale resta invariata*; nel nostro caso il campo è esclusivamente normale.

Passando al calcolo numerico, $V_0 = \sigma R/2\varepsilon_0 = 1500$ V, $V_Q = \sigma R(2^{1/2} - 1)/2\varepsilon_0 = 615$ V, $E_0 = \sigma/2\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^3$ V/m, $E_0^+ - E_0^- = \sigma/\varepsilon_0 = 10^4$ V/m, $E_Q = 1485$ V/m.

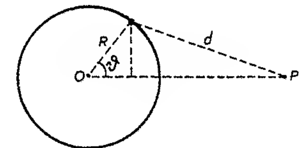
Una situazione analoga a quelle viste nei problemi 1.2 e 1.5 si presenta se facciamo tendere R all'infinito, cioè se consideriamo il *piano carico indefinito*. Il campo assume i valori costanti $\sigma/2\varepsilon_0 \mathbf{u}_n$ e $-\sigma/2\varepsilon_0 \mathbf{u}_n$ rispettivamente a destra e a sinistra del piano: $\mathbf{u}_n$ indica il versore della normale al piano. Il potenziale diverge, ma le differenze di potenziale restano finite. Dati per esempio due punti distanti x_1 e x_2 dal piano ($x_2 > x_1 > 0$),

$$V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{u}_n \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma(x_2 - x_1)}{2\varepsilon_0} .$$

Le superficie equipotenziali sono i piani paralleli al piano carico.

1.7. ***Calcolare il potenziale prodotto da un anello uniformemente carico in un punto del piano dell'anello, la cui distanza dal centro dell'anello sia molto maggiore del raggio di questo.***

Il potenziale generato dall'elemento infinitesimo di anello vale



$$dV = \frac{\lambda ds}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\theta}{(R^2+x^2-2xR\cos\theta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(R^2+x^2)^{1/2}}\frac{d\theta}{(1-k\cos\theta)^{1/2}}$$

con $k = \frac{2xR}{R^2+x^2}$; per ottenere il risultato basta integrare tra 0 e π (contributo di mezzo anello) e moltiplicare per 2. Purtroppo $\int \frac{d\theta}{(1-k\cos\theta)^{1/2}}$ è un integrale ellittico; però, per $k \ll 1$, come succede se $x \gg R$, si può sviluppare in serie la funzione integranda:

$$\frac{1}{(1-k\cos\theta)^{1/2}} = 1 + \frac{k}{2}\cos\theta + \frac{3}{8}\cos^2\theta\, k^2 + \frac{5}{16}\cos^3\theta\, k^3 + \frac{35}{128}\cos^4\theta\, k^4 + \dots$$

Solo i termini con esponente pari danno contributo all'integrale e si ottiene, ponendo $q = \lambda 2\pi R$,

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{R^2}{x^2} + \frac{105}{64}\frac{R^4}{x^4} + \dots\right] ,$$

che tende al potenziale di una carica puntiforme quanto più ci si allontana dall'anello.

1.8. ***Calcolare campo e potenziale dovuti a una carica q distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio R. In particolare calcolarne il valore sulla superficie e nel centro di questa, se $q = 10^{-7}$ C e $R = 10$ cm.***

Per la simmetria della distribuzione *il campo in un qualsiasi punto deve avere direzione radiale e dipendere solo da r*, distanza dal centro della superficie sferica. Pertanto è conveniente l'applicazione del teorema di Gauss (1.6): il flusso attraverso una qualsiasi superficie sferica di raggio r, concentrica con quella di raggio R, è semplicemente $E\Sigma = 4\pi r^2 E$ e si ha

$$4\pi r^2 E = 0 \quad \text{se} \quad r < R \quad , \quad 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{se} \quad r > R \ .$$

All'interno della superficie sferica il campo è nullo, all'esterno vale $q/4\pi\varepsilon_0 r^2$*, come se la carica fosse concentrata nel centro.* Essendo $q = 4\pi R^2\sigma$, il campo può anche essere scritto $\sigma R^2/\varepsilon_0 r^2$ e si vede per r tendente a R il campo tende al valore $E_R = \sigma/\varepsilon_0$. Ritroviamo la discontinuità σ/ε_0 nell'attraversamento di una superficie carica (la componente tangenziale è nulla, il campo è tutto ortogonale).

Calcoliamo il potenziale all'esterno della superficie sferica integrando il campo:

$$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) .$$

Si può quindi assumere per il potenziale l'espressione $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r = \sigma R^2/\varepsilon_0 r$; a priori c'è l'indeterminazione dovuta a una costante, cioè $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$ + cost, ma la condizione che il potenziale sia nullo all'infinito pone eguale a zero la costante. Il risultato è identico a quello che si avrebbe con una carica puntiforme q posta nel centro della superficie sferica. Su questa in particolare

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = E_R R \ .$$

Per $r < R$ *il campo è nullo e quindi il potenziale è costante*: per continuità tale costante è proprio $V(R)$.

Le proprietà ora ricavate per una distribuzione superficiale uniforme, cioè per una superficie sferica vuota, valgono anche per una sfera conduttrice carica, lontana da altri conduttori carichi. Infatti in tal caso le cariche, che in un conduttore possono stare solo sulla superficie esterna, sono distribuite uniformemente per ragioni di simmetria e quindi le due situazioni dal punto di vista del teorema di Gauss sono equivalenti.

Notiamo che quando si applica il teorema di Gauss si calcola naturalmente prima il campo e poi da questo il potenziale per integrazione; quando invece, in assenza di particolari simmetrie, si deve integrare direttamente tramite le (1.2), è in genere più conveniente calcolare prima il potenziale e poi da questo il campo per derivazione, attraverso la $\mathbf{E} = -\text{grad}\, V$ che non presenza difficoltà. Se si calcolassero subito le tre componenti di $\mathbf{E}$ bisognerebbe eseguite tre integrali che spesso presentano maggiori difficoltà di calcolo di quello che porta alla determinazione di V.

Sviluppiamo il calcolo numerico proposto: la densità di carica vale

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = 7.96 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} .$$

Di conseguenza

$$E_R = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 9.0 \cdot 10^4\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad V_R = E_R R = 9.0 \cdot 10^3\ \text{V} .$$

Nel centro della superficie sferica $E = 0$ e $V = V_R$.

1.9. ***Un conduttore sferico cavo, di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3, contiene una sfera conduttrice, ad esso concentrica, di raggio R_1, carica con una quantità di carica q. Detta r la distanza dal centro del sistema, calcolare campo e potenziale per r variabile da zero all'infinito. Dare una rappresentazione grafica delle funzioni E(r) e V(r) nel caso $R_1 = 5$ cm, $R_2 = 8$ cm, $R_3 = 10$ cm, $q = 10^{-9}$ C.***

Tra i due conduttori c'è induzione completa: la carica $q = 4\pi R_1^2\sigma_1$, distribuita uniformemente sulla superficie sferica di raggio R_1, fa apparire sulla superficie interna del conduttore cavo una carica $-q = 4\pi R_2^2\sigma_2$ e sulla superficie esterna dello stesso una carica $q = 4\pi R_3^2\sigma_3$, entrambe uniformemente distribuite. Il campo elettrico è radiale e dipende solo da r, distanza dal centro del sistema. Applicando il teorema di Gauss come nel problema 1.8 abbiamo:

$$r > R_3 \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma_3 R_3^2}{\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad r = R_3 \quad E_3 = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}$$

$$R_2 < r < R_3 \quad E = 0 \quad \text{(interno di un conduttore)}$$

$$R_1 < r < R_2 \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$r = R_1 \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad , \quad r = R_2 \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \quad (\sigma_1 R_1^2 = \sigma_2 R_2^2)$$

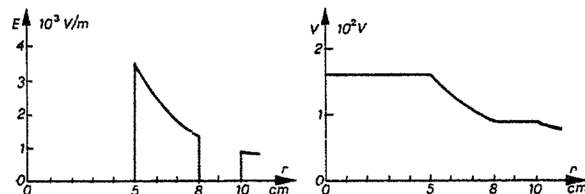
$$0 \leq r < R_1 \quad E = 0 \quad \text{(interno di un conduttore).}$$

I valori dati per $r = R_1$, $r = R_2$ e $r = R_3$ si intendono per un punto infinitamente vicino alla superficie del conduttore, ma sempre esterno a questo.

In figura è riportato l'andamento del campo calcolato con i dati del problema; si ha

$$\sigma_1 = 3.18 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad , \quad \sigma_2 = 1.24 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad , \quad \sigma_3 = 0.79 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \ ,$$

$$E_1 = 3.6 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad E_2 = 1.4 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad E_3 = 0.9 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \ .$$



I due tratti diversi da zero appartengono alla stessa curva $E = 9/r^2$ V/m.

Il calcolo del potenziale per $r > R_3$ è eguale a quello del problema 1.8; con riferimento zero all'infinito si ha

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma_3 R_3{}^2}{\varepsilon_0 r} \quad , \quad V_3 = \frac{\sigma_3 R_3}{\varepsilon_0} = E_3 R_3 \quad \text{se} \quad r = R_3 \quad .$$

All'interno del conduttore cavo il potenziale è costante e vale V_3; questo in particolare è il valore per $r = R_2$ ed è il riferimento del potenziale nell'intercapedine. Per $R_1 < r < R_2$ scriviamo cioè

$$V_3 - V(r) = -\int_r^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right) ,$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_0 r} - \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3 R_3}{\varepsilon_0} .$$

Per $r = R_1$ $\quad V_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) = \dfrac{\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2 + \sigma_3 R_3}{\varepsilon_0}$

e questo è il valore del potenziale del conduttore interno. La differenza di potenziale tra i due conduttori è

$$V_1 - V_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0} .$$

Numericamente $V_1 = 158$ V, $V_3 = 90$ V, tra R_1 e R_2 $V = (9/r) - 22$ V, mentre per $r > R_3$ $V = 9/r$ V; 22 V è la differenza di potenziale che ci sarebbe tra le superficie sferiche che delimitano il conduttore cavo se, a parità di carica e di geometria, tra di esse ci fosse il vuoto.

Il sistema trattato è un esempio di *schermo elettrostatico*. Il campo e il potenziale all'esterno dipendono solo da σ_3: anche se all'interno la sfera viene spostata o addirittura portata a contatto con la superficie del conduttore cavo, all'esterno non cambia nulla. Viceversa, il potenziale nell'intercapedine è dato da un termine variabile più un termine costante che dipende da V_3: se dall'esterno si depositano cariche sul conduttore cavo in modo da alterarne il potenziale, all'interno $V(r)$ segue fedelmente queste variazioni; il suo valore assoluto cambia, però non cambiano le differenze di potenziale e quindi il campo.



1.10. ***Si hanno due sfere concentriche conduttrici; il raggio esterno di quella cava è $R = 9$ cm. Sulla sfera esterna viene depositata una carica $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ C, su quella interna una carica $q_1 = 10^{-9}$ C. Successivamente si aggiunge sulla sfera esterna una carica $q_3 = -q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ C. Calcolare di quanto varia il potenziale della sfera interna.***

La sfera esterna è uno schermo elettrostatico: pertanto le variazioni di potenziale della sfera interna sono eguali a quelle della sfera esterna. Su quest'ultima, nelle due situazioni, c'è la carica $q_1 + q_2$ e $q_1 + q_2 + q_3 = q_1$; la carica q_1 appare per induzione da parte della sfera interna. Secondo i risultati del problema 1.8 il potenziale della sfera esterna vale, nei due casi:

$$V = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad , \quad V' = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} .$$

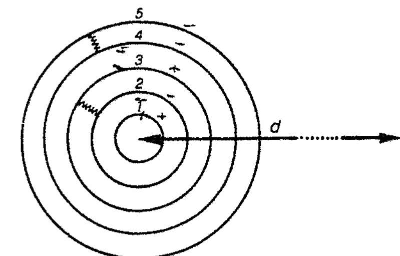
Pertanto $V' - V = -q_2/4\pi\varepsilon_0 R = q_3/4\pi\varepsilon_0 R$: la variazione di potenziale è appunto quella dovuta all'aggiunta della carica q_3 e vale 200 V.



1.11. ***Cinque sottili fogli conduttori sferici, di raggi rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5 cm, sono concentrici e hanno carica nulla. Come mostrato in figura il secondo e il terzo conduttore sono collegati tra loro da un filo conduttore e così pure il quarto e il quinto. Una carica $q = 4 \cdot 10^{-9}$ C viene depositata sul conduttore più interno. Calcolare il valore della carica q_i su ogni conduttore e la differenza di potenziale tra quello più interno e quello più esterno. Successivamente si pone una carica puntiforme $q = 4 \cdot 10^{-9}$ C a una distanza $d = 40$ cm dal centro del sistema. Calcolare la forza elettrostatica F_i su ogni conduttore e quella F sulla carica esterna nonché il lavoro necessario per portare la carica puntiforme all'infinito.***

Per induzione completa

$$q_3 = q_5 = q_1 = 4 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$
$$q_2 = q_4 = -q_1 = -4 \cdot 10^{-9} \text{ C} .$$



Con il collegamento tramite filo i conduttori 2 e 3 si comportano come se fossero un unico conduttore e così pure 4 e 5. La differenza di potenziale tra il conduttore più interno e quello più esterno si ottiene sommando le d.d.p. tra 1 e 2-3 e tra 2-3 e 4-5:

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right] = 2100 \text{ V}$$

Quando si pone la carica puntiforme a distanza d, il campo all'interno non è perturbato: non c'è quindi alcuna interazione e risulta

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0 \,.$$

L'unica interazione avviene tra la carica puntiforme e la carica distribuita sulla superficie esterna; nell'ipotesi che la presenza della carica esterna non perturbi la distribuzione simmetrica della carica superficiale, la forza vale $F_S = q^2/4\pi\varepsilon_0 d^2 = 9 \cdot 10^{-7}$ N.

Infine, secondo la definizione di lavoro:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_d^\infty \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_d^\infty = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} = 3.6 \cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

1.12. ***Calcolare campo e potenziale dovuti a una carica distribuita con densità uniforme ϱ entro una sfera di raggio R. Dare una rappresentazione grafica delle funzioni $E(r)$ e $V(r)$ se $\varrho = 8.85 \cdot 10^{-6}$ C/m³ e $R = 1$ cm.***

Le solite *considerazioni di simmetria* ci fanno prevedere che il campo sia radiale e dipendente solo da r, distanza dal centro della distribuzione di carica. Se applichiamo il teorema di Gauss ad una superficie sferica, concentrica alla sfera e di raggio $r > R$, la carica contenuta all'interno è $q = (4/3)\,\pi R^3 \varrho$ e si trova per il campo

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,,$$

come se la carica fosse puntiforme e collocata nel centro della sfera. La situazione è diversa all'interno, per $r < R$; possiamo ancora applicare il teorema di Gauss, ma la carica da considerare è minore di q e si scrive $q(r) = (4/3)\,\pi r^3 \varrho$, per cui il campo vale

$$E = \frac{q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\, r\,.$$

Sulla superficie della distribuzione, cioè per $r = R$, $E = E_R = \varrho R/3\varepsilon_0$: esso non presenta discontinuità. Riassumendo, *il campo è nullo nel centro della sfera, cresce linearmente col raggio fino a $r = R$, poi decresce secondo la legge* $1/r^2$; esso è sempre rivolto verso l'esterno se ϱ è positiva.

Il potenziale all'esterno della sfera è semplicemente

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,.$$

Per $r = R$, $V = V_R = \varrho R^2/3\varepsilon_0 = E_R R$. All'interno della distribuzione scriviamo

$$V_R - V(r) = -\int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}\int_r^R r\,dr = -\frac{\varrho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2),$$

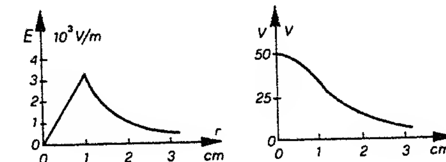
$$V(r) = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\left[R^2 - \frac{r^2}{3}\right].$$

Il potenziale è massimo al centro dove vale $\varrho R^2/2\varepsilon_0$.

Con i dati del problema possiamo compilare la seguente tabella:

$r = 0$	$E = 0$	$V = 50$
$0 < r < R$	$E = \dfrac{10^6}{3} r$	$V = 5 \cdot 10^5 \left(10^{-4} - \dfrac{r^2}{3}\right)$
$r = R$	$E = 3.3 \cdot 10^3$	$V = 33$
$r > R$	$E = \dfrac{1}{3r^2}$	$V = \dfrac{1}{3r}$

(la distanza r è espressa in metri, i campi in V/m, i potenziali in V). L'andamento è riportato in figura.



1.13. ***Una carica puntiforme positiva di valore $q = 10^{-10}$ C è posta al centro di una sfera di carica negativa, distribuita con densità uniforme. Il valore complessivo della carica negativa è $Q = 8 \cdot 10^{-10}$ C, il raggio della sfera è $R = 1$ cm. Detta r la distanza dal centro del sistema calcolare se esiste per una generica carica puntiforme, che non perturba il sistema, una posizione di equilibrio in un punto $P(r)$.***

La carica q produce un campo radiale, rivolto verso l'esterno, di modulo $E_q = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$; il campo della carica Q è anch'esso radiale, però rivolto verso il centro. Il modulo vale $E_Q = \varrho r/3\varepsilon_0 = Qr/4\pi R^3\varepsilon_0$ se $r \leq R$, $E_Q = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ se $r \geq R$.

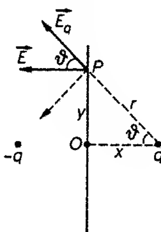
All'esterno della sfera di carica si può avere equilibrio solo se $Q = q$, che non è il nostro caso. All'interno l'equilibrio è possibile se $q/4\pi\varepsilon_0 r^2 = Qr/4\pi\varepsilon_0 R^3$, cioè se $r^3/R^3 = q/Q$, da cui segue che deve essere $q < Q$, che è il nostro caso. Si ha dunque una posizione di equilibrio per

$$r = R\left(\frac{q}{Q}\right)^{1/3} = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0.5 \text{ cm}\,.$$

1.14. ***Una carica puntiforme positiva q si trova a distanza x da un piano conduttore indefinito a potenziale zero. Calcolare la forza con cui la carica è attirata dal piano.***

Per il fenomeno dell'induzione elettrostatica la presenza della carica q provoca la comparsa sul piano di una carica di segno opposto a q, donde l'attrazione. Questa carica indotta, distribuita con densità superficiale σ non uniforme, è in valore assoluto eguale a q poiché il piano è indefinito e quindi l'induzione è completa. Il potenziale dovuto alla carica q è diverso da zero nei punti della superficie conduttrice, le cariche indotte devono allora dare luogo sulla superficie a un potenziale eguale e contrario, in modo da avere sul piano potenziale ovunque nullo, secondo i dati del problema; in altri termini, nei punti del piano $V_q = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, $V_i = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Una situazione di questo tipo sarebbe realizzata, su una superficie coincidente con quella del conduttore, se vi fosse una carica puntiforme $-q$ in una posizione simmetrica a quella della carica q rispetto al piano. In tal caso la forza subita dalla carica q sarebbe



$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(2x)^2}\,.$$

Sempre in base a questa schematizzazione calcoliamo il campo elettrico e la densità di carica sulla superficie del conduttore. Dalla figura risulta che il campo è normale al piano, come deve essere; il suo modulo è $E = 2E_q\cos\theta$, il verso corrisponde al segno negativo di σ. Essendo $E_q = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\cos\theta = x/(x^2+y^2)^{1/2}$, il campo risulta

$$E = \frac{qx}{2\pi\varepsilon_0}\,(x^2+y^2)^{-3/2} \quad\Rightarrow\quad \sigma = \varepsilon_0 E = \frac{qx}{2\pi}\,(x^2+y^2)^{-3/2}\,.$$

Tale densità, di segno negativo, è massima per $y = 0$ e decresce radialmente, tendendo rapidamente a zero: c'è simmetria circolare, sul piano, rispetto al punto O.

Verifichiamo che la carica totale indotta è $-q$:

$$\int_\Sigma \sigma\, d\Sigma = -\int_0^\infty \frac{qx}{2\pi}\,(x^2+y^2)^{-3/2}\,2\pi y\,dy = \frac{-qx}{2}\int_0^\infty (x^2+y^2)^{-3/2}\,d(y^2)$$

$$= qx\left[(x^2+y^2)^{-1/2}\right]_0^\infty = -q\,.$$

Verifichiamo anche l'espressione trovata per la forza. Come nell'integrazione appena eseguita consideriamo una corona circolare infinitesima di centro O e raggio y, su cui si trova la carica $\sigma d\Sigma$: con ragionamenti di simmetria si deduce che la forza tra corona e carica q è normale al piano e vale

$$dF = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sigma d\Sigma}{r^2}\cos\theta = \frac{qx}{2\varepsilon_0}\,\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\sigma = \frac{q^2x^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{d(y^2)}{(x^2+y^2)^3}\,.$$

Integrando tra zero e infinito si ottiene

$$F = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(2x)^2}\,.$$

La soluzione adottata è perciò consistente; al sistema piano conduttore-carica inducente si è sostituito l'insieme di due cariche puntiformi, assai più facile da trattare. La carica fittizia $-q$, la cui esistenza è solo un fatto matematico, si dice anche *carica immagine* della carica inducente.

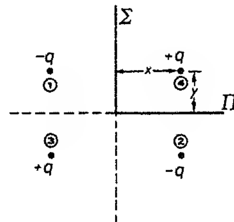
Il caso trattato è il più semplice che possa essere risolto col metodo delle cariche immagini, il cui fondamento fisico può essere compreso in base alle considerazioni seguenti.

Supponiamo di avere un sistema di n cariche puntiformi e di tracciare una superficie equipotenziale Σ: questa in generale separerà idealmente m cariche del sistema dalle altre n-m. Se materializziamo una parte di Σ con una superficie conduttrice sottile. tenuta al potenziale che compete a Σ, nulla cambierà per quanto riguarda il campo in quanto il potenziale non ha subito variazioni in nessun punto dello spazio. Se ora questa superficie conduttrice viene estesa abbastanza, sempre seguendo Σ, per cui in pratica c'è separazione tra le m e le n-m cariche nel senso che tutte le linee di forza partenti dalle prime terminano sulla superficie, abbiamo realizzato uno schermo elettrostatico. Dentro ci sono m cariche e sulla faccia interna della superficie c'è una carica eguale ed opposta; sull'altra faccia della superficie ricompare, opportunamente distribuita, la carica totale delle m cariche. Le cariche interne possono muoversi e anche toccare la superficie metallica neutralizzandosi; all'esterno tutto resta come prima. Addirittura l'interno della superficie può essere tutto o in parte riempito di materiale conduttore scarico senza che all'esterno si osservino cambiamenti. Alla fine ci troviamo con n-m cariche in presenza di un conduttore di una certa forma e la situazione elettrostatica è identica a quella delle n cariche originarie. Quindi il problema di calcolare campo e potenziale, nonché densità di cariche indotte e forze elettrostatiche, quando si hanno cariche e un conduttore a un certo potenziale, è ricondotto a quello di determinare un sistema di cariche che abbia la superficie di quel conduttore come superficie equipotenziale al valore corretto. Le cariche fittizie che occorre introdurre vengono dette cariche immagini.

1.15. ***Quattro cariche puntiformi, due di valore q e due di valore −q, si trovano ai vertici di un rettangolo in modo che due consecutive sono di segno***

opposto. Trovare le superficie equipotenziali a potenziale nullo e commentare il risultato alla luce di quanto visto nel problema precedente.

È evidente dalla figura che i piani Σ e Π, ortogonali nei punti di mezzo ai segmenti che congiungono le cariche, sono superficie equipotenziali a potenziale nullo. Se supponiamo di materializzare con conduttori indefiniti i due semipiani segnati con tratto continuo, abbiamo risolto il problema di una carica puntiforme q di fronte a due semipiani conduttori indefiniti ad angolo retto fra loro. Le immagini della carica q sono in questo caso tre e in base al sistema di quattro cariche si può per esempio calcolare l'attrazione subita dalla carica q per induzione elettrostatica. In termini vettoriali



$$\mathbf{F}_1 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4x^2}\mathbf{u}_x \quad , \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4y^2}\mathbf{u}_y \ ,$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4(x^2+y^2)}\left[\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\mathbf{u}_x + \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\mathbf{u}_y\right] .$$

La risultante è certamente attrattiva, ma non è in generale diretta come la diagonale del rettangolo che congiunge le due cariche positive. Ciò avviene solo se $x = y = d$ e in tal caso il modulo dalla forza è $\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\left(2^{1/2} - \dfrac{1}{2}\right)$.

1.16. *Una sfera conduttrice di raggio* $R = 80$ cm *è scarica e mantenuta a potenziale zero. A distanza* $d = 1$ m *dal centro della sfera viene posta una carica puntiforme* $q = 3 \cdot 10^{-10}$ C. *Calcolare la forza di attrazione subita dalla carica q e la densità di carica indotta sulla sfera.*

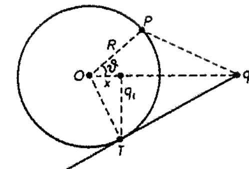
Risolviamo il problema col metodo delle cariche immagini cercando un sistema di due cariche, q_i e q, che abbia la superficie sferica di raggio R come superficie equipotenziale con $V = 0$. Poniamo la carica q_i a distanza $x > 0$ dal centro O e le assegniamo il valore $-yq$ con $y > 0$. Le incognite x e y si determinano in base alla condizione che il potenziale $V(P)$ del generico punto P della superficie sferica sia nullo, per qualsiasi valore dell'angolo θ:

$$V(P) = V_q + V_{q_i} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{yq}{(x^2+R^2-2Rx\cos\theta)^{1/2}}\right] = 0 .$$

Di conseguenza l'eguaglianza $y^2(d^2+R^2-2Rd\cos\theta) = x^2+R^2-2Rx\cos\theta$

deve essere soddisfatta per ogni valore di θ e ciò comporta, per il principio di identità dei polinomi,



$$\begin{cases} y^2(d^2+R^2) = x^2+R^2 \\ dy^2 = x \ . \end{cases}$$

Dalla seconda relazione si ha $y^2 = x/d$ che sostituita nella prima dà un'equazione di secondo grado in x con le soluzioni $x_1 = d$ e $x_2 = R^2/d$; in corrispondenza $y_1 = 1$, $y_2 = R/d$. La prima soluzione va scartata in quanto dà potenziale nullo in tutto lo spazio; la carica immagine q_i ha così il valore $-Rq/d$ ed è posta a distanza R^2/d dal centro della sfera, ovvero a distanza $(d^2-R^2)/d$ dalla carica inducente (pertanto dentro la sfera). Si verifica facilmente che tale posizione è la proiezione sulla congiungente O con q del punto T in cui una retta uscente da q è tangente alla sfera.

La forza di attrazione tra carica q e sfera si calcola subito:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q}{(d-x)^2} = \frac{q^2 Rd}{4\pi\varepsilon_0(d^2-R^2)^2} = 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

Per ricavare la densità di carica indotta calcoliamo il campo elettrico sulla superficie del conduttore sferico; allo scopo determiniamo il potenziale $V(r,\theta)$ in un punto dello spazio, come generato dalle due cariche puntiformi, e deriviamo: $E_R = -(\partial V/\partial r)_{r=R}$, in quanto sulla superficie il campo è per definizione radiale.

$$V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(d^2+r^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{R}{d}\frac{q}{\left(\frac{R^4}{d^2}+r^2-2r\frac{R^2}{d}\cos\theta\right)^{1/2}}\right] ,$$

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R}\mathbf{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{R^2-d^2}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}\mathbf{u}_r \ ,$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{q}{4\pi R}\frac{R^2-d^2}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} .$$

Il campo, sempre diretto verso l'interno, ha modulo variabile con la posizione: la densità di carica è ovunque negativa e non è uniforme; le cariche indotte positive sfuggono verso il riferimento a potenziale zero, realizzato per esempio con un filo conduttore che collega la sfera a massa. Poiché non c'è induzione completa l'integrale di σ esteso a tutta la superficie sferica non è eguale a q; è invece eguale alla carica immagine, come prevedibile a priori:

$$\int \sigma \, d\Sigma = \frac{q(R^2-d^2)}{4\pi R}\int_0^{\pi}\frac{2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{qR(d^2-R^2)}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{d(\cos\theta)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{q(d^2-R^2)}{2d}\left[\frac{1}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{1/2}}\right]_{-1}^{+1} = -\frac{R}{d}q\,.$$

Numericamente $\sigma = \dfrac{5.1\cdot 10^{-12}}{(1-0.975\cos\theta)^{3/2}}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$.

Notiamo un fatto interessante: guardando il problema da un altro punto di vista si è in sostanza dimostrato che date due cariche q_1 e q_2, di segno opposto, con $q_1 > q_2$ in valore assoluto, esiste una superficie equipotenziale a $V=0$ che è sferica. Il raggio di questa sfera è $R = -d'\,q_1q_2/(q_1^2-q_2^2)$, se d' è la distanza tra le cariche. Il centro della sfera dista $x = d'\,q_2^2/(q_1^2-q_2^2) < R$ dalla carica q_2 che sta tra tale centro e q_1.

1.17. ***Si riconsideri il problema precedente, con gli stessi valori numerici, nell'ipotesi che la sfera, pur restando scarica, sia isolata e nell'ipotesi che la sfera, sempre isolata, abbia una carica $q' = 6\cdot 10^{-10}$ C.***

Prendiamo come base i risultati del problema precedente: sappiamo che le due cariche $-Rq/d$ e q hanno la superficie sferica di raggio R come equipotenziale a $V=0$; se la sfera è isolata assumerà, pur restando equipotenziale, un valore del potenziale $V_0 \neq 0$. Ciò si ottiene con una carica Q, posta nel centro, tale che $V_0 = Q/4\pi\varepsilon_0 R$; inoltre, affinché la sfera risulti scarica, dovrà essere $Q = -q_i = Rq/d$. Riassumendo, l'insieme delle tre cariche $Q = Rq/d$ fittizia, posta nel centro della sfera, $q_i = -Rq/d$ fittizia, posta a distanza R^2/d dal centro, e q, reale a distanza d dal centro, fornisce la soluzione voluta per campo e potenziale al di fuori della sfera; il valore del potenziale della sfera è $V_0 = q/4\pi\varepsilon_0 d$, eguale al potenziale dovuto alla carica q nel punto coincidente col centro della sfera, calcolato come se non ci fosse la sfera stessa.

Si osservi che si è applicato il principio di sovrapposizione considerando la situazione completa come somma di una sistuazione ①, $q+q_i$, e di una situazione ②, Q.

La forza subita dalla carica q si compone di due termini, uno attrattivo dovuto all'interazione $q-q_i$ e uno repulsivo dovuto all'interazione $q-Q$:

$$F = F_{att} - F_{rep} = \frac{q^2Rd}{4\pi\varepsilon_0(d^2-R^2)^2} - \frac{q^2R}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\,.$$

Si verifica subito che $F_{att} > F_{rep}$ per cui la risultante è attrattiva; l'effetto è minore di quello che si ha se la sfera è a potenziale zero. Numericamente $F = 0.44\cdot 10^{-8}$ N.

La densità di carica indotta è somma di due termini che si calcolano a partire dalle situazioni ② e ①:

$$\sigma = \sigma_2 + \sigma_1 = \frac{q}{4\pi dR} - \frac{q}{4\pi R}\,\frac{d^2-R^2}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}\,.$$

L'integrale è nullo, cioè la sfera è scarica, però la carica è separata: la densità è negativa sulla parte rivolta verso q e positiva dall'altra parte. In numeri

$$\sigma = 29.9\cdot 10^{-12} - \frac{5.1\cdot 10^{-12}}{(1-0.975\cos\theta)^{3/2}}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Per $\cos\theta = +1$, cioè dalla parte della carica inducente, $\sigma(0) = -1260.3\cdot 10^{-12}$ C/m^2, per $\cos\theta = -1$, cioè dalla parte opposta, $\sigma(\pi) = +28.1\cdot 10^{-12}$ C/m^2. Si noti la forte dissimetria; in realtà la linea di densità nulla non si ha per $\theta = \pi/2$ ma, nel nostro caso, per $\theta \simeq \pi/4$.

È oramai evidente come si possa trattare l'ultimo caso, che è il più generale. Si aggiunge al sistema di cariche già visto un'ulteriore carica q', situata nel centro della sfera (situazione ③). Per il calcolo della forza si somma il termine $F' = qq'/4\pi\varepsilon_0 d^2$ il cui segno dipende dal segno di q'. La forza risultante può pertanto essere attrattiva, repulsiva o nulla. La densità di carica si compone di tre termini:

$$\sigma = \sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1 = \frac{q'}{4\pi R^2} + \frac{q}{4\pi dR} - \frac{q}{4\pi R}\,\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}\,.$$

Nel caso proposto F' è repulsiva perché q' ha lo stesso segno di q: essa vale $0.16\cdot 10^{-8}$ N e la forza risultante complessiva F-F' è ancora attrattiva e vale $0.28\cdot 10^{-8}$ N. La densità di carica vale $104.5\cdot 10^{-12} - \dfrac{5.1\cdot 10^{-12}}{(1-0.975\cos\theta)^{3/2}}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$ per cui la situazione è qualitativamente analoga a quella della sfera isolata e scarica.

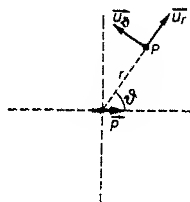
1.18. ***Ricavare le proprietà del campo prodotto da un dipolo elettrico di momento p.***

Ricordiamo la (1.9): il potenziale generato in un punto P da un dipolo elettrico di momento $\mathbf{p}$ si scrive

$$V = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dove r è la distanza di P dal centro del dipolo e θ l'angolo tra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$. L'espressione è valida per distanze r maggiori di almeno un ordine di grandezza rispetto alle dimensioni del dipolo. Passiamo rapidamente in rassegna alcune proprietà di questo potenziale, notando innanzitutto che le conclusioni tratte in un piano che contiene l'asse del dipolo valgono per qualunque altro piano che

contenga lo stesso asse (*simmetria di rotazione* rispetto a **p**); formalmente ciò discende dal fatto che il potenziale non dipende dall'angolo ϕ tra uno di tali piani e un qualsiasi piano di riferimento.



1) V è positivo nell'emisfero anteriore $[(-\pi/2) < \theta < (\pi/2)]$, negativo nell'emisfero posteriore e nullo nel piano passante per il centro del dipolo e ortogonale all'asse (piano equipotenziale a $V=0$). Rispetto a questo piano V è antisimmetrico: se P' è il punto simmetrico di P, $V(P') = -V(P)$. Rispetto all'asse del dipolo il potenziale è simmetrico: $V(r, \theta) = V(r, -\theta)$.

2) A parità di r V è massimo per $\theta = 0$ valendo $p/4\pi\varepsilon_0 r^2$ e minimo per $\theta = \pi$, dove vale $-p/4\pi\varepsilon_0 r^2$: i punti di estremo stanno cioè sull'asse.

Per il calcolo del campo continuiamo a usare le coordinate r, θ e ci serviamo della $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos\theta}{r^3} \qquad \text{componente radiale, secondo } \mathbf{u}_r$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3} \qquad \text{componente trasversa, secondo } \mathbf{u}_\theta$$

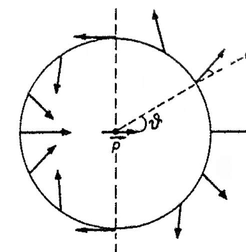
$E_\phi = 0$ perché V non dipende da ϕ: il campo elettrico giace nel piano individuato dall'asse del dipolo e dal punto P in cui lo si calcola; resta valida per il campo la proprietà di simmetria di rotazione rispetto a **p**. Il modulo del campo vale

$$E = (E_r^2 + E_\theta^2)^{1/2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}}{r^3}$$

mentre l'angolo α che **E** forma con **r** è dato da

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta\,.$$

In figura è mostrato l'andamento del campo a parità di r. Per $\theta = 0$, detta *prima posizione principale di Gauss*, il campo è tutto radiale e vale in modulo $2p/4\pi\varepsilon_0 r^3$. Per $\theta = \pi/2$, *seconda posizione principale di Gauss*, il campo è tutto trasverso e vale in modulo $p/4\pi\varepsilon_0 r^3$. Per quel che riguarda le proprietà di simmetria E_r, massima sull'asse e nulla sul piano equipotenziale a $V=0$, si comporta come V in quanto dipende da $\cos\theta$; E_θ, nulla sull'asse e massima nel piano a $V=0$, ha le proprietà opposte, dipendendo da $\operatorname{sen}\theta$. Il modulo E, che dipende da $\cos^2\theta$, è simmetrico sia rispetto all'asse che rispetto al piano mediano. Vediamo così che per disegnare la figura basta in realtà calcolare il campo in un solo quadrante, p.e. dove $0 \leq \theta \leq \pi/2$.



Sempre dalla figura si può intuire che il flusso del campo elettrico attraverso la superficie sferica di raggio r è eguale a zero; il teorema di Gauss ci assicura che il risultato è corretto, e non solo per superficie sferiche, in quanto la carica totale del dipolo è nulla.

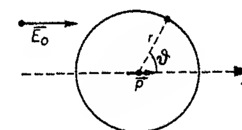
Per concludere osserviamo che il campo e il potenziale di un dipolo decrescono più rapidamente di quelli di una carica puntiforme ($1/r^3$ invece di $1/r^2$ e $1/r^2$ invece di $1/r$, a parte la dipendenza dall'angolo): la ragione fisica sta nel fatto che essendo il dipolo costituito da cariche eguali ed opposte, vicine una all'altra, queste quasi si neutralizzano a vicenda e l'effetto risultante è più debole rispetto a quello di una sola delle cariche. Il termine *vicine* è relativo: noi utilizziamo l'espressione di dipolo solo per distanze molto maggiori delle dimensioni e quindi *da lontano le cariche appaiono necessariamente vicine*. Verifichiamo anzi la precisione con cui il potenziale di dipolo approssima quello effettivo dovuto a due cariche $+q$ e $-q$ poste a distanza $2a$. Restiamo per comodità sull'asse del dipolo, nell'emisfero anteriore (prima posizione principale di Gauss):

$$V_{car} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r-a} - \frac{q}{r+a}\right) = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0(r^2-a^2)} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2-a^2}$$

$$V_{dip} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V_{dip}}{V_{car}} = 1 - \frac{a^2}{r^2}\,.$$

Se $r = 2a$, $R = 0.75$ e l'approssimazione è cattiva, ma già oltre $r = 5a$ R differisce da 1 di qualche percento e oltre $r = 20a$ di qualche permille.

1.19. ***Dimostrare che, posto un dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$, parallelo e concorde al momento elettrico del dipolo, esiste nel campo risultante una superficie equipotenziale sferica con centro nel centro del dipolo. Calcolare il campo elettrico nei punti di tale superficie.***



Prendiamo come origine delle coordinate il centro del dipolo, con l'asse z parallelo e concorde a **p** e a $\mathbf{E}_0$. Il potenziale nel punto P è la somma di due termini, uno dovuto al dipolo e l'altro al campo $\mathbf{E}_0$. Il potenziale associato a tale campo si può scrivere $V = V_0 - E_0 z$ essendo V_0 il valore per $z=0$; le superficie equipotenziali sono piani ortogonali all'asse z (ovvero al campo $\mathbf{E}_0$). Quindi

$$V(P) = V_0 - E_0 z + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} = V_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\,.$$

Noi vogliamo che $V(P)$ sia costante per $r = R$ e qualunque sia θ, cioè che sia:

$$V(P) = V_0 + \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - E_0 R \right) \cos\theta = \text{costante.}$$

La soluzione è

$$R^3 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0} \qquad (\Rightarrow \text{ il termine tra parentesi così si annulla})$$

e il valore della costante è proprio V_0, valore del potenziale nel centro del dipolo dovuto alla presenza del campo uniforme $\mathbf{E}_0$.

Il campo elettrico in P è radiale, dovendo essere ortogonale alla superficie equipotenziale; esso è dato dalla somma della componente radiale del campo di dipolo e dalla proiezione su OP di $\mathbf{E}_0$:

$$E(P) = E_0 \cos\theta + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\cos\theta}{R^3} = 3E_0\cos\theta\,.$$

Il verso è uscente nell'emisfero anteriore, entrante in quello posteriore; nella seconda posizione principale di Gauss il campo è nullo.

Si può anche dire che la superficie sferica di raggio R è il luogo dei punti in cui sono eguali ed opposte la componente trasversa del campo di dipolo e la componente ortogonale a OP del campo $\mathbf{E}_0$, così che il campo risultante deve essere ortogonale alla superficie: in modulo $\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{R^3} = E_0 \operatorname{sen}\theta$ e si ritrova il risultato già visto.

1.20. ***Una sfera conduttrice, isolata e scarica, di raggio $R = 1$ cm, viene immersa in un campo elettrico uniforme di modulo $E_0 = 10^4$ V/m; il potenziale vale $V_0 = 10^4$ V nel punto coincidente col centro della sfera quando questa non c'è. Calcolare il potenziale della sfera, la densità di carica indotta e il campo elettrico sulla superficie. Ripetere il calcolo nei due casi in cui la sfera, pur restando isolata, possieda una carica $Q = 10^{-8}$ C e in cui la sfera sia a potenziale zero.***

La superficie della sfera deve essere equipotenziale; sappiamo dal problema precedente che se mettiamo un dipolo in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$ parallelo a $\mathbf{p}$ esiste una superficie equipotenziale di raggio $R^3 = p/4\pi\varepsilon_0 E_0$ con valore V_0 del potenziale eguale a quello che c'è nel centro del dipolo quando questo non è presente. In base al metodo delle cariche immagini la soluzione del nostro problema per i punti esterni alla superficie della sfera si ottiene sovrapponendo al campo $\mathbf{E}_0$ il campo di un dipolo, posto nel centro della sfera, di momento $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0$, se R è il raggio della sfera. Il campo elettrico e la densità di carica indotta sulla superficie della sfera valgono

$$E(\theta) = 3E_0\cos\theta = 3\cdot 10^4 \cos\theta\ \frac{\text{V}}{\text{m}}\ , \qquad \sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta = 2.66\cdot 10^{-7}\cos\theta\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

La densità di carica non è uniforme: massima per $\theta = 0$ essa decresce proporzionalmente a $\cos\theta$, si annulla per $\theta = \pi/2$ ed è minima per $\theta = \pi$; è positiva nell'emisfero anteriore e negativa in quello posteriore, con riferimento alla figura del problema 1.19. L'integrale della densità di carica indotta è nullo:

$$\int \sigma\, d\Sigma = \int_0^{\pi} 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta\, 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -6\pi R^2 \varepsilon_0 E_0 \int_{+1}^{-1} \cos\theta\, d(\cos\theta) = 0\,.$$

Il potenziale assunto dalla sfera è proprio $V_0 = 10^4$ V.

È interessante calcolare le modifiche che il campo $\mathbf{E}_0$ subisce per la presenza delle cariche indotte sulla superficie della sfera. Fissandoci per semplicità nelle due posizioni principali di Gauss, compiliamo una tabella con i valori del campo di dipolo a varie distanze dal centro della sfera:

	$r = 1$ cm	$r = 2$ cm	$r = 5$ cm	$r = 10$ cm	
$E^{(1)}$	$2\cdot 10^4$	$2.50\cdot 10^3$	160	20	V/m
$E^{(2)}$	$1\cdot 10^4$	$1.25\cdot 10^3$	80	10	V/m

Le correzioni sono molto grandi nelle immediate vicinanze della sfera, ma decrescono rapidamente, come $1/r^3$ con la distanza. Più notevole è quanto avviene *dentro la sfera*: qui il campo totale deve essere nullo, per cui *le cariche indotte generano evidentemente un campo eguale ed opposto a* $\mathbf{E}_0$; riprenderemo l'argomento nel problema 1.21.

Nel caso in cui la sfera, isolata, possieda già una carica Q, agli effetti già visti aggiungiamo quelli della carica Q, come nel problema 1.17:

$$\sigma(\theta) = \frac{Q}{4\pi R^2} + 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta = 79.61\cdot 10^{-7} + 2.66\cdot 10^{-7}\cos\theta\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}\,,$$

$$E(\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + 3E_0\cos\theta = 90\cdot 10^4 + 3\cdot 10^4\cos\theta\ \frac{\text{V}}{\text{m}}\,,$$

$$V = V_0 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 1.9\cdot 10^4\ \text{V}\,.$$

Notiamo a questo punto che una carica $Q_0 = -4\pi\varepsilon_0 R V_0 = -1.11\cdot 10^{-8}$ C darebbe potenziale nullo alla sfera. Questo vuol dire che una sfera conduttrice tenuta a massa e posta in un campo elettrico uniforme in un punto in cui il potenziale vale V_0 (in sua assenza) presenta sulla sua superficie una carica $Q_0 = -4\pi\varepsilon_0 R V_0$ distribuita con densità variabile

$$\sigma(\theta) = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{R} + 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta = -88.5\cdot 10^{-7} + 2.7\cdot 10^{-7}\cos\theta\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}\,.$$

Il campo elettrico sulla superficie vale

$$E(\theta) = -\frac{V_0}{R} + 3E_0\cos\theta = -10^6 + 3\cdot 10^4\cos\theta\ \frac{\text{V}}{\text{m}}\,.$$

Tutti i risultati visti presuppongono naturalmente che la presenza di cariche sulla superficie della sfera non alteri la distribuzione delle cariche che generano il campo uniforme $\mathbf{E}_0$.

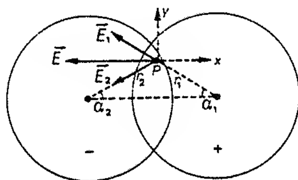
1.21. ***Due sfere di egual raggio R, cariche con densità spaziale uniforme ϱ, una positiva e una negativa, sono parzialmente compenetrate così che i loro centri sono a distanza d minore di 2R. Calcolare il campo elettrico nella zona comune ed estrapolare il risultato per d→0 e ϱ→∞ in modo che il prodotto ϱd resti costante.***

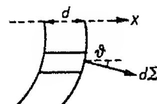
Sia P il punto generico dell'intersezione, distante r_1 e r_2 dai centri delle sfere; secondo il problema 1.12 i moduli dei campi in P sono $E_1 = \varrho r_1/3\varepsilon_0$, $E_2 = \varrho r_2/3\varepsilon_0$.

Calcoliamo il campo risultante a partire dalle componenti, seguendo la figura:

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = -\frac{\varrho}{3\varepsilon_0}(r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2) = -\frac{\varrho d}{3\varepsilon_0}\ ,$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0}(r_1 \operatorname{sen}\alpha_1 - r_2\operatorname{sen}\alpha_2) = 0\ .$$





Indipendentemente da P, finché si resta nella zona comune il campo è parallelo alla congiungente i centri delle sfere, ha verso tale da puntare dalla sfera positiva a quella negativa e modulo costante. Il risultato resta vero passando al limite nel modo indicato, purché i centri restino separati; detto σ_0 il prodotto ϱd, la zona comune alle due sfere è sede di un campo uniforme di modulo $E = \sigma_0/3\varepsilon_0$. Visto all'esterno invece il sistema si può assimilare a un dipolo di momento $p = qd = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho d = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0$.

Sulla superficie della sfera che si ottiene al limite è concentrata una carica superficiale la cui densità vogliamo calcolare: sull'elemento $d\Sigma$ finisce tutta la carica contenuta nel prisma elementare in figura di volume $d\,d\Sigma\cos\theta$ (altezza d, base $d\Sigma\cos\theta$); pertanto $\sigma = dq/d\Sigma = \varrho\cos\theta\, d\Sigma\, d/d\Sigma = \varrho d\cos\theta = \sigma_0\cos\theta$.

Riassumiamo i risultati ottenuti; abbiamo una *carica distribuita su una superficie sferica con densità proporzionale al coseno*, $\sigma = \sigma_0\cos\theta$:

— *campo interno uniforme*, $E = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}$ (vettorialmente $\mathbf{E} = -E\mathbf{u}_x$)

— *campo esterno dipolare*, con momento di dipolo equivalente $p = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0$

— $\mathbf{E}$ e $\mathbf{p}$ paralleli e discordi.

Queste proprietà sono caratteristiche della distribuzione, qualunque sia il supporto fisico.

Vediamo che si può risolvere diversamente il problema 1.20; una sfera conduttrice deve avere campo nullo nel suo interno, per cui la densità di carica superficiale deve dare all'interno un campo costante eguale ed opposto a $\mathbf{E}_0$: ciò è fornito da una distribuzione $\sigma = \sigma_0\cos\theta = 3\varepsilon_0 E\cos\theta = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta$, che all'esterno dà un campo dipolare dovuto al momento $p = \frac{4}{3}\pi R^3\sigma_0 = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0$.

1.22. ***Dato un conduttore carico con densità σ calcolare la forza esercitata su un elemento di carica superficiale dal resto delle cariche del conduttore. In particolare calcolare la forza per unità di superficie nell'ipotesi che il conduttore sia una sfera con un campo elettrico superficiale pari a 10⁶ V/m.***

Richiamiamo alcuni fatti necessari per la soluzione del problema:

1) il campo elettrico all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico è nullo;

2) il campo elettrico esterno nelle immediate vicinanze di un conduttore carico è $\sigma/\varepsilon_0\,\mathbf{u}_n$, essendo $\mathbf{u}_n$ il versore della normale alla superficie del conduttore nel punto considerato, orientato verso l'esterno;

3) un elemento superficiale carico con una quantità di carica $dq = \sigma d\Sigma$ genera in punti assai vicini ad esso un campo $\pm\,\sigma/2\varepsilon_0\,\mathbf{u}_n$, essendo $\mathbf{u}_n$ orientato dalla faccia negativa a quella positiva; il segno più vale sulla faccia positiva, il meno sulla negativa; queste proprietà, per punti vicinissimi, sono vere in quanto si considera l'elemento infinitesimo come piano.

Pertanto un elemento $d\Sigma$ del conduttore genera in punti vicini ad esso un campo come descritto nel punto 3. D'altra parte all'esterno il campo deve valere σ/ε_0 e all'interno deve essere nullo. Evidentemente le restanti cariche del conduttore generano in un intorno di $d\Sigma$ un campo il cui valore è $\sigma/2\varepsilon_0\,\mathbf{u}_n$ e che sommandosi al campo dovuto a $d\Sigma$ dà il risultato voluto. La forza che agisce sull'elemento $d\Sigma$ è

$$\mathbf{dF} = dq\,\mathbf{E} = \sigma d\Sigma\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{u}_n = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}d\Sigma\,\mathbf{u}_n\ ,$$

sempre parallela e concorde a $\mathbf{u}_n$, vista la dipendenza da σ^2 e non da σ. La forza per unità di superficie, cioè la *pressione elettrostatica*, si scrive

$$p = \frac{dF}{d\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2 .$$

Nel caso specifico $E = 10^6$ V/m, $\sigma = \varepsilon_0 E = 8.85 \cdot 10^{-6}$ C/m², $p = 4.42$ N/m².

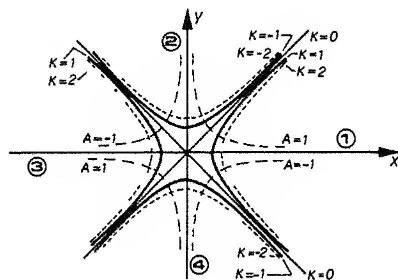
1.23. ***In una regione dello spazio il potenziale elettrostatico ha l'espressione $V = h(x^2 - y^2)$ con h costante positiva. Determinare il campo elettrostatico e le equazioni delle superficie equipotenziali e delle linee di campo.***

Il campo si calcola da $\mathbf{E} = -\text{grad}\, V$ e quindi le sue componenti sono:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2hx \quad , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 2hy \quad , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 .$$

Esso giace in piani ortogonali all'asse z; l'indipendenza da z ci dice che su qualsiasi di questi piani avremo la stessa situazione, per cui è sufficiente studiare il problema nel piano x, y (parliamo allora di problema bidimensionale e di linee equipotenziali invece di superficie equipotenziali). Il modulo del campo e la sua direzione rispetto all'asse x sono dati da

$$E = (E_x^2 + E_y^2)^{1/2} = 2h\,(x^2 + y^2)^{1/2} \quad , \quad \text{tg}\,\theta = \frac{E_y}{E_x} = -\frac{y}{x} .$$



Le linee equipotenziali obbediscono all'equazione $h(x^2 - y^2) = V_0 = \text{cost}$, cioè $x^2 - y^2 = k$. Per $k = \ = 0$, cioè $V_0 = 0$, abbiamo le due rette $x = y$ e $x = -y$; per $k > 0$ (potenziali positivi) si hanno le curve delle regioni 1 e 3, per $k < 0$ (potenziali negativi) quelle delle regioni 2 e 4.

Le equazioni delle linee di campo si ottengono dal fatto che esse sono in ogni punto tangenti al campo, cioè che lo spostamento $\mathbf{dP}$ lungo di esse è parallelo a $\mathbf{E}$:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} .$$

Nel caso più generale si ha un sistema di due equazioni differenziali che risolte danno, per esempio, x e y in funzione di z. Qui abbiamo l'unica equazione

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \log x = -\log y + \text{cost} \Rightarrow xy = \text{cost} = A .$$

Quando la costante è nulla si ottengono gli assi coordinati, quando è positiva le iperboli del primo e terzo quadrante, quando è negativa quelle del secondo e quarto quadrante.

Lasciamo come esercizio la verifica che se il potenziale avesse un'equazione del tipo $V = xy$ allora le linee di campo obbedirebbero all'equazione $x^2 - y^2 = \text{cost}$; ci sarebbe così uno scambio tra linee di campo e linee equipotenziali. Si noti che tale scambio corrisponde a una rotazione degli assi di 45°, cioè come se si guardasse la figura ruotata di 45°.

Se materializziamo con superficie conduttrici le quattro linee equipotenziali relative a un dato valore di $|k|$ sappiamo che il campo non viene alterato, anche se riempiamo con materiale conduttore le regioni retrostanti alle quattro linee. Estendendo il sistema lungo l'asse z abbiamo quelle che si chiamano *lenti quadrupolari elettrostatiche*. In esse una particella positiva posta sull'asse x risente di un campo e quindi di una forza diretta verso l'origine tanto maggiore quanto più ne è distante, mentre sull'asse y maggiore è la distanza dall'origine maggiore è la forza che tende ad allontanare da essa; l'opposto succede per particelle negative. Si suol dire che per le particelle positive nel piano xz si ha *azione focalizzante* mentre nel piano yz l'*azione è defocalizzante*; viceversa per le particelle negative. Le due azioni vengono invertite se si scambiano le polarità dei conduttori.

1.24. ***Un cilindro metallico isolato di raggio R = 10 cm e altezza h ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω = 3 · 10³ rad/s. Si assuma che gli elettroni di conduzione, trascinati nel moto di rotazione del cilindro, siano liberi di muoversi radialmente. Calcolare il campo elettrico all'interno del cilindro e le densità di carica di volume e di superficie, specificandone il segno.***

In equilibrio, su una carica generica che descrive una circonferenza di raggio r deve agire un campo elettrico, necessario per mantenere la carica sull'orbita:

$$eE(r) = m\omega^2 r \Rightarrow E(r) = \frac{m\omega^2}{e}\, r = 5.12 \cdot 10^{-5}\, r\, \frac{\text{V}}{\text{m}} ;$$

il campo è diretto radialmente verso l'esterno (così che la forza centripeta sull'elettrone, negativo, è diretta verso l'asse). Qualitativamente avviene che, a causa della rotazione, si ha un allontanamento di elettroni dall'asse (equivalente alla comparsa sull'asse di una carica positiva) e un addensamento di elettroni sulla superficie, da cui segue il formarsi di un campo elettrico radiale diretto verso l'esterno che blocca un'ulteriore migrazione di elettroni.

L'esistenza del campo elettrico dentro il conduttore fa sì che attraverso una superficie cilindrica di raggio r e altezza l il flusso non sia nullo; d'altra

parte è facile provare che una carica distribuita con densità di volume costante ϱ dà origine ad un campo che cresce linearmente con la distanza dall'asse. Pertanto, per il teorema di Gauss e confrontando col risultato precedente:

$$2\pi r l E(r) = \varrho \frac{\pi r^2}{\varepsilon_0} l \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\varrho r}{2\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varrho r}{2\varepsilon_0} = \frac{m\omega^2}{e} r \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{2m\varepsilon_0\omega^2}{e} = 9.06\ 10^{-16}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}.$$

Su una lunghezza l c'è in totale una carica positiva

$$q = \pi R^2 l \varrho = \frac{2m}{e} \varepsilon_0 \omega^2 \pi R^2 l\ ,$$

e quindi sulla superficie deve esserci una carica negativa $-q$ (il conduttore è neutro) distribuita con la densità

$$\sigma = \frac{-q}{2\pi R l} = -\frac{m}{e} \varepsilon_0 \omega^2 R = 0.45 \cdot 10^{-16}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Ci sono alcuni fatti importanti da notare: il conduttore in questione non è in equilibrio elettrostatico, essendoci nel suo interno un campo elettrico diverso da zero. Si può parlare semmai di equilibrio dinamico, che esiste in quanto esiste la rotazione, con il meccanismo spiegato nel testo. Non c'è però moto di cariche e quindi la situazione è diversa da quella di un conduttore percorso da corrente (capitolo 4).

Un effetto della non neutralità locale del conduttore (che globalmente è neutro) sarebbe quello di produrre un campo magnetico, come si vedrà nel capitolo 5; si tratta però di un effetto quantitativamente trascurabile.

Il fatto più notevole è però che il campo **E**, la cui origine non è elettrostatica, non è conservativo; per la discussione rimandiamo al paragrafo 4b e anche al problema 5.5, dove è trattato un caso simile di campo non elettrostatico

* * *

NOTE

A. I problemi classici di elettrostatica in presenza di conduttori sono tutt'altro che facili, come ci si può rendere conto scorrendo i problemi proposti. Lo scopo principale di questo capitolo è di familiarizzare lo studente con i calcoli eseguibili col teorema di Gauss e di mostrare i metodi di soluzione di alcuni *casi semplici di interazione tra cariche e conduttori*. Nei prossimi due capitoli si vedranno varie applicazioni, rese più complete da calcoli di lavoro e di energia e dall'introduzione dei materiali dielettrici. Dopo aver affrontato e capito il materiale dei primi tre capitoli si dovrebbe essere in grado di risolvere agevolmente i problemi di elettrostatica proposti in fondo al volume.

B. Una parte non trascurabile delle difficoltà dei problemi di elettrostatica può derivare dal calcolo di integrali; vediamo alcuni esempi nei problemi 1.1, 1.5, 1.7. Qui vogliamo mettere in evidenza un argomento particolare che riguarda elementi di superficie piane o sferiche e elementi di volume. Ci serviamo per i calcoli di coordinate polari nel piano o nello spazio.

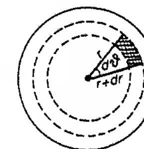
Quando integriamo su un disco, vedi paragrafo A.7 dell'appendice, l'elemento $d\Sigma$ si scrive $r d\theta \cdot dr$ (= base × altezza) e se la funzione integranda non dipende da θ l'integrale in questa variabile si fa subito e dà 2π per cui $d\Sigma = 2\pi r\, dr = d(\pi r^2)$.

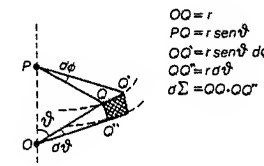
Analogamente, l'elemento di una superficie sferica è

$$d\Sigma = r \operatorname{sen}\theta d\phi \cdot r d\theta = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

e se non c'è dipendenza da ϕ $d\Sigma = 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta$.

Infine, l'elemento di volume di una sfera è semplicemente $d\Sigma \cdot dr$ (=base × altezza) e quindi $d\tau = r^2 dr \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$.





CAPITOLO 2

SISTEMI DI CONDUTTORI. CONDENSATORI. LAVORO ED ENERGIA ELETTROSTATICA.

2a. Dati n conduttori racchiusi entro un conduttore il cui potenziale viene assunto come riferimento, tra le cariche e i potenziali dei conduttori si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + \ldots + c_{1n} V_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= c_{n1} V_1 + c_{n2} V_2 + \ldots + c_{nn} V_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= b_{11} q_1 + b_{12} q_2 + \ldots + b_{1n} q_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n &= b_{n1} q_1 + b_{n2} q_2 + \ldots + b_{nn} q_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il conduttore di riferimento può anche essere esteso fino all'infinito con il che si assume il potenziale zero come riferimento.

I coefficienti c_{ij} sono detti di induzione. quelli c_{ii} di capacità, quelli b_{ij} di potenziale; essi dipendono esclusivamente dalla geometria del sistema. Sussistono le proprietà

$$c_{ij} = c_{ji} \quad , \quad b_{ij} = b_{ji} \quad , \quad c_{ii} > 0 \quad , \quad c_{ij} < 0 \quad , \quad b_{ii} \geqslant b_{ij} > 0 \quad .$$

2b. Si dice condensatore un sistema di due conduttori (*armature*) tra i quali esiste induzione completa. Il rapporto tra il modulo della carica posseduta dai conduttori e la differenza di potenziale tra gli stessi è detto *capacità* del condensatore:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \quad . \tag{2.3}$$

La capacità è legata alle caratteristiche geometriche del condensatore. Diamo le espressioni per alcuni tipi di condensatori; nella pratica queste relazioni sono approssimate perché è difficile realizzare induzione completa. Nei problemi le assumiamo come esatte, trascurando gli effetti di bordo senza rilevarlo esplicitamente ogni volta.

	condensatore piano	condensatore sferico	condensatore cilindrico	
$C=$	$\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}$	$4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	$2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\log R_2/R_1}$	(2.4)

In un sistema di condensatori *in parallelo* la differenza di potenziale è la stessa per tutti gli elementi e la capacità e la carica totale valgono:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_r \quad , \quad q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$$

Se invece i condensatori sono *in serie* la carica è la stessa su ciascuno di essi e la capacità e la differenza di potenziale totali del sistema sono:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \quad , \quad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \ldots + \Delta V_n \quad .$$

Anche per un *conduttore isolato* si può definire la capacità sempre come rapporto tra carica e potenziale del conduttore, avendo però portato a potenziale zero tutti gli altri conduttori eventualmente presenti. Un caso semplice è costituito da una sfera conduttrice isolata e lontana da altri conduttori; essa può essere pensata come caso limite di un condensatore sferico al tendere a infinito del raggio del conduttore esterno; la sua capacità vale

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \quad .$$

2c. Il lavoro fatto dalle forze (conservative) del campo per portare una carica puntiforme q da un punto in cui il potenziale vale V_1 ad un altro punto in cui il potenziale vale V_2 è

$$L = q(V_1 - V_2) = W_1 - W_2 = -\Delta W \quad , \tag{2.5}$$

essendo $W = qV$ l'energia elettrostatica della carica. Questa assume quindi il significato di lavoro speso dalle forze del campo per portare la carica dal punto in cui il potenziale vale V fino all'infinito (dove $V = 0$).

Nel caso semplice di un sistema di due sole cariche puntiformi q_1 e q_2 a distanza r

$$W_1 = q_1 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_2 V_1 = W_2 = W \quad ;$$

alla quantità W si dà il nome di *energia mutua* nel sistema delle due cariche; essa è *positiva* se le cariche sono dello stesso segno (*forza repulsiva*) e *negativa* se sono di segno opposto (*forza attrattiva*). Se vogliamo costruire il sistema avvicinando le cariche dall'infinito fino alla distanza r notiamo che W è eguale al lavoro esterno necessario per fare avvenire il processo.

Per un sistema di più cariche puntiformi l'energia elettrostatica si scrive

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad i \neq j \quad ; \tag{2.6}$$

il fattore 1/2 compare perché nella somma la coppia q_i, q_j distante r_{ij} viene contata due volte. La (2.6) può anche essere scritta

$$W = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} q_i V_j \quad (i \neq j) \qquad \Rightarrow \qquad W = \frac{1}{2} \int V \varrho \, d\tau$$

se le cariche sono distribuite con densità ϱ. Si può dimostrare che l'ultimo integrale corrisponde all'espressione generale

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \, d\tau \tag{2.7}$$

che dà l'energia elettrostatica in funzione del campo invece che delle sorgenti di questo. L'energia elettrostatica risulta così distribuita, in una regione in cui esiste un campo elettrico, con la densità

$$w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad . \tag{2.8}$$

2d. Il lavoro che occorre spendere per caricare un condensatore di capacità C, cioè per creare tra le sue armature una differenza di potenziale V ovvero per portare sulle sue armature una carica q, vale

$$W = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad ; \tag{2.9}$$

lo ritroviamo immagazzinato nel condensatore sotto forma di *energia elettrostatica*.

Un dipolo posto in un campo elettrico $\mathbf{E}$ che forma un angolo θ col momento $\mathbf{p}$ del dipolo possiede un'energia elettrostatica

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE\cos\theta \quad . \tag{2.10}$$

2e. Sappiamo che nel caso di forze conservative dalla relazione tra lavoro e energia potenziale $dL = -dW$ discende per la forza $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} W$, ovvero

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad , \quad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \quad , \tag{2.11}$$

formule che useremo per il calcolo delle forze elettrostatiche. Analogamente, per rotazioni attorno ad un asse, calcoleremo il momento delle forze come

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \theta} \quad . \tag{2.12}$$

Per esempio dalla (2.10) si ricava che un dipolo posto in un campo elettrico risente di un momento che vettorialmente si scrive

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad . \tag{2.13}$$

2f. Le dimensioni delle nuove grandezze introdotte sono:

capacità	coulomb/volt = farad	F
lavoro e energia elettrostatica	joule	J

densità di energia	joule/m^3	$\frac{J}{m^3}$
coeff. di capacità	farad	F
coeff. di potenziale	farad^{-1}	F^{-1}

Per i condensatori di uso comune il farad è una unità poco pratica. Sarebbe, per esempio, la capacità di un condensatore piano le cui armature distano 1 m e hanno un'area di 113000 km^2. Si usano perciò sottomultipli: il microfarad (μF) pari a 10^{-6} F, il nanofarad (nF) pari a 10^{-9} F, il picofarad (pF) pari a 10^{-12} F.

Nelle misure di energia relative a sistemi atomici o subatomici si usa quasi sempre l'*elettrovolt* come unità di misura; esso è definito come il lavoro necessario per far passare una carica di valore pari a quella dell'elettrone attraverso la d.d.p. di 1 V:

$$1 \text{ elettrovolt} = 1 \text{ eV} = e \cdot 1 = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad ,$$
$$1 \text{ J} = 6.2 \cdot 10^{18} \text{ eV} \quad .$$

Si usano i multipli chiloelettronvolt (KeV), megaelettronvolt (MeV), gigaelettronvolt (GeV), teraelettrovolt (TeV) pari rispettivamente a 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12} eV. La massima energia raggiunta negli acceleratori di particelle è, per il momento, dell'ordine del TeV.

* * *

2.1. ***Calcolare i coefficienti di capacità, induzione e potenziale per un sistema di due conduttori sferici, uno dei quali è cavo e contiene l'altro, nel caso in cui i due conduttori siano concentrici ed estendere il risultato al caso in cui non lo siano.***

Il primo caso è quello del condensatore sferico usuale; supponendo che sui conduttori ci fossero le cariche q_1 e q_2 quando erano distanti, ritroviamo, una volta costruito il sistema, la carica q_1 sul conduttore interno, di raggio R_1, e la carica $q_1 + q_2$ sulla superficie esterna del conduttore esterno, di raggio R_2. Sappiamo che in tali condizioni

$$V_2 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \, , \quad V_1 - V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \; .$$

Per confronto con le (2.2):

$$b_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad , \quad b_{12} = b_{21} = b_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \; .$$

Se si risolvono le (2.2) nelle cariche e si confronta con le (2.1) si trova

$$c_{11} = -c_{12} = -c_{21} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad , \quad c_{22} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2^2}{R_2 - R_1} \; .$$

Scritte per esteso, le relazioni tra cariche e potenziali sono:

$$q_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(V_1 - V_2) \quad ,$$

$$q_2 = -4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1 + 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2^2}{R_2 - R_1} V_2 =$$

$$= -4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \cdot (V_1 - V_2) + 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2 \quad .$$

La carica sul conduttore interno è $C_1(V_1 - V_2)$: il sistema è pur sempre un condensatore sferico di capacità C_1 data da (2.4). La carica q_2 è la somma di due parti, una di induzione pari a $-q_1$, e una pari a $C_2 V_2$, tipica di una sfera isolata a potenziale V_2; ovviamente $C_2 V_2 = q_1 + q_2$. È importante notare che c_{11} e c_{22} non sono le capacità dei conduttori interno ed esterno, come si potrebbe essere indotti a ritenere.

Nel caso delle sfere non concentriche accenniamo a un metodo di soluzione più generale. I coefficienti dipendono dalla geometria del sistema, non dai valori delle cariche e dei potenziali. Si possono pertanto studiare situazioni particolari con certi valori di q_1 e q_2; i coefficienti trovati sono validi ad ogni modo. Prendiamo allora il valore particolare $q_1 = 0$: $V_1 = V_2$ perché lo spazio interno è equipotenziale in assenza di cariche; da

$$V_1 = b_{11} q_1 + b_{12} q_2 = b_{12} q_2 \quad , \quad V_2 = b_{21} q_1 + b_{22} q_2 = b_{22} q_2 = V_1$$

segue $b_{22} = b_{12}$ $(= b_{21})$ come nel caso simmetrico. Siccome inoltre V_2 dipende solo dalla carica che c'è sul conduttore esterno, e che è distribuita uniformemente, b_{22} è ancora eguale a $1/4\pi\varepsilon_0 R_2$. Poniamo ora $q_2 = 0$; V_2 vale $q_1/4\pi\varepsilon_0 R_2$, cioè la carica indotta è distribuita uniformemente sulla sfera esterna, indipendentemente dalla posizione del conduttore interno (è uno degli effetti di schermo elettrostatico); però V_1 non si può scrivere $q_1/4\pi\varepsilon_0 R_1$ perché con i conduttori non concentrici la carica q_1 non è distribuita uniformemente sul conduttore interno; b_{11} pertanto è cambiato. Non risolviamo esplicitamente l'esercizio; notiamo solo che la capacità del condensatore si ricava da

$$V_1 - V_2 = b_{11} q_1 + b_{12} q_2 - b_{21} q_1 - b_{22} q_2 = (b_{11} - b_{21}) q_1$$

e risulta $C = q_1/(V_1 - V_2) = 1/(b_{11} - b_{21})$. Nota la carica e la differenza di potenziale si può tabulare b_{11} in funzione della posizione della sfera interna. Invertendo il sistema si possono poi calcolare i coefficienti c_{ij}; risulta ancora $c_{11} = -c_{12} = -c_{21}$, ma sia questi che c_{22} sono cambiati.

2.2. ***Due sfere conduttrici cariche, di raggi $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm, sono poste a distanza x, molto maggiore dei raggi delle sfere. La prima sfera è isolata e ha una carica $q_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ C, la seconda è mantenuta al potenziale $V_2 = 25 \cdot 10^3$ V rispetto all'infinito. Calcolare in funzione di x il potenziale***

V_1, la carica q_2 e la forza tra le sfere. Calcolare inoltre i coefficienti di potenziale, capacità e induzione.

Nelle ipotesi del problema è ragionevole assumere, trascurando le cariche indotte, che il potenziale di ciascuna sfera sia eguale alla somma del potenziale dovuto alla propria carica e del potenziale dovuto all'altra sfera:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 x} \quad , \quad V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 x} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Risolvendo nelle due incognite q_2 e V_1:

$$q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2 - \frac{R_2}{x} q_1 = 5.6\cdot 10^{-7} - \frac{10^{-7}}{x}\,\mathrm{C} \quad ,$$

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{x^2}\right) + \frac{R_2}{x}V_2 \simeq$$

$$\simeq \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{R_2}{x}V_2 = 45\cdot 10^3 + \frac{5\cdot 10^3}{x}\,\mathrm{V} \quad ,$$

cioè, nel nostro caso numerico, $q_2 \simeq 5.6\cdot 10^{-7}$ C e $V_1 \simeq 45\cdot 10^3$ V più una piccola correzione funzione della distanza tra le sfere. La forza tra i conduttori è

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{q_1 V_2 R_2}{x^2} - \frac{q_1^2 R_2}{4\pi\varepsilon_0 x^3} = \frac{25\cdot 10^{-4}}{x^2} - \frac{4.5\cdot 10^{-4}}{x^3}\ \mathrm{N}.$$

Dalla prima relazione scritta per i potenziali si ricava subito

$$b_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad , \quad b_{12} = b_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 x} \quad , \quad b_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \ .$$

I coefficienti di capacità e di induzione si ricavano da questi secondo quanto visto nel problema 2.1 e si ottiene, trascurando il prodotto $R_1 R_2$ rispetto a x^2,

$$c_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \quad , \quad c_{12} = c_{21} = -4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{d} \quad , \quad c_{22} = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \ .$$

In numeri

$$b_{11} = 9\cdot 10^{10}\ \mathrm{F^{-1}} \quad , \ b_{12} = b_{21} = \frac{9\cdot 10^9}{x}\ \mathrm{F^{-1}} \quad , \ b_{22} = 4.5\cdot 10^{10}\ \mathrm{F^{-1}} \ ,$$

$$c_{11} = 11.1\ \mathrm{pF} \quad , \ c_{12} = c_{21} = -\frac{2.2}{x}\ \mathrm{pF} \quad , \ c_{22} = 22.2\ \mathrm{pF} \ .$$

2.3. ***Le due sfere isolate del problema precedente abbiano $R_1 = 2$ cm, $R_2 = 1$ cm, $x = 30$ cm, $q_1 = 10^{-9}$ C, $q_2 = 2\cdot 10^{-9}$ C. In queste condizioni la sfera 2 viene portata a potenziale zero e poi isolata; lo stesso procedimento viene***

successivamente eseguito per la sfera 1. Calcolare i valori finali di q_1, q_2, V_1, V_2.

Con i dati numerici del testo otteniamo la seguente tabella di coefficienti:

$$b_{11} = 4.5\cdot 10^{11} \quad , \ b_{12} = b_{21} = 3\cdot 10^{10} \quad , \ b_{22} = 9\cdot 10^{11} \quad \mathrm{F^{-1}} \ ,$$

$$c_{11} = 2.22\cdot 10^{-12} \quad , \ c_{12} = c_{21} = -0.74\cdot 10^{-13} \quad , \ c_{22} = 1.11\cdot 10^{-12} \quad \mathrm{F} \ .$$

I sistemi di equazioni (2.1) e (2.2) divengono

$$V_1 = 4.5\cdot 10^{11} q_1 + 3\cdot 10^{10} q_2 \quad , \ V_2 = 3\cdot 10^{10} q_1 + 9\cdot 10^{11} q_2$$

$$q_1 = 2.22\cdot 10^{-12} V_1 - 0.74\cdot 10^{-13} V_2 \, , \ q_2 = -0.74\cdot 10^{-13} V_1 + 1.11\cdot 10^{-12} V_2 \ .$$

La condizione iniziale del sistema è caratterizzata da

$$q_1 = 10^{-9}\ \mathrm{C} \quad , \quad q_2 = 2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} \quad , \quad V_1 = 510\ \mathrm{V} \quad , \quad V_2 = 1830\ \mathrm{V} \ .$$

Quando la sfera 2 viene portata a potenziale zero, per esempio connettendola a terra con un filo conduttore, V_2 diventa eguale a zero e q_1 resta costante, essendo la sfera 1 isolata; di conseguenza $V_1 = q_1/c_{11} = 450$ V e $q_2 = c_{12}V_1 = -3.33\cdot 10^{-11}$ C. Se ora interrompiamo il collegamento tra la sfera 2 e il riferimento a potenziale zero nulla cambia e il nuovo stato del sistema è:

$$q'_1 = 10^{-9}\ \mathrm{C} \quad , \quad q'_2 = -3.33\cdot 10^{-11}\ \mathrm{C} \quad , \quad V'_1 = 450\ \mathrm{V} \quad , \quad V'_2 = 0 \ .$$

Ripetiamo il procedimento sulla sfera 1: ora q'_2 resta costante mentre $V'_1 = 0$ e utilizzando le solite relazioni otteniamo:

$$q''_1 = 0.22\cdot 10^{-11}\ \mathrm{C} \ , \ q''_2 = -3.33\cdot 10^{-11}\ \mathrm{C} \ , \ V''_1 = 0 \ , \ V''_2 = -30\ \mathrm{V} \ .$$

Sia le cariche che i potenziali sono fortemente diminuiti; continuando ancora il processo si arriva presto a scaricare entrambe le sfere.

Il risultato sopra trovato dopo le due operazioni resta lo stesso se si porta prima a zero V_1 e poi V_2?

2.4. ***È dato un partitore capacitivo, costituito da n condensatori in serie di capacità C_1, C_2, ... C_n, ai cui capi è applicata una d.d.p. V. Calcolare la d.d.p. ai capi di ciascun condensatore. Calcolare in particolare i valori delle tre capacità C_1, C_2, C_3 necessarie per dividere nelle tre parti $V_1 = 100$ V, $V_2 = 70$ V, $V_3 = 30$ V una d.d.p. $V = 200$ V applicata a un partitore capacitivo di capacità totale $C = 100$ pF.***

Sulle armature di ciascun condensatore c'è la stessa carica $q = C_1 V_1 = \ldots = C_n V_n$; la d.d.p. totale V è la somma delle singole d.d.p.: $V = V_1 + \ldots + V_n$. D'altra parte tutto il sistema in blocco si può considerare come un unico condensatore per cui vale la relazione

$$q = CV \quad \text{con} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

Pertanto $V_i = q/C_i = CV/C_i$: ai capi di ciascun condensatore c'è la frazione C/C_i della d.d.p. totale V (si ricordi che la capacità totale di una serie di condensatori è minore di ciascuna delle singole capacità).

In particolare, per due condensatori in serie, $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ e quindi

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V \quad , \quad V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V \quad , \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

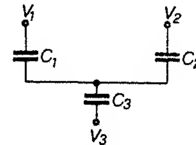
Le d.d.p. stanno tra loro nel rapporto inverso delle capacità: ai capi del condensatore di capacità maggiore c'è la d.d.p. minore. Se fissato V lo vogliamo dividere in due parti così che $V_1 = KV_2$, allora deve essere $C_2 = KC_1$.

Nel caso numerico richiesto $C_i = CV/V_i$ e si ha subito

$$C_1 = 200 \text{ pF} \quad , \quad C_2 = 286 \text{ pF} \quad , \quad C_3 = 667 \text{ pF}.$$

2.5. ***Nel sistema di condensatori in figura le armature sono connesse ai potenziali fissi $V_1 = 100$ V, $V_2 = 200$ V, $V_3 = 300$ V. Calcolare il potenziale del conduttore centrale se $C_1 = 5$ µF, $C_2 = 8$ µF, $C_3 = 3$ µF.***

Possiamo subito scrivere queste relazioni:



$$V_3 = V_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} \quad , \quad V_3 = V_2 + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} \quad ,$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

La terza discende dal fatto che la carica totale del conduttore centrale deve essere nulla, essendo questo caricato per induzione. Esplicitando:

$$3q_1 + 5q_3 = 3 \cdot 10^{-3} \qquad q_1 = 10^{-3} - \frac{5}{3} q_3 \qquad q_3 = 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

$$3q_2 + 8q_3 = 2.4 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad q_2 = 0.8 \cdot 10^{-3} - \frac{8}{3} q_3 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \qquad q_1 + q_2 + q_3 = 0 \qquad q_2 = -6.4 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

Il potenziale del conduttore centrale si ottiene così:

$$V = V_1 + \frac{q_1}{C_1} = V_2 + \frac{q_2}{C_2} = V_3 - \frac{q_3}{C_3} = 120 \text{V}.$$

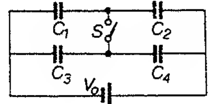
2.6. ***Nel circuito in figura la batteria fornisce una d.d.p. $V_0 = 12$ V. Le capacità dei condensatori sono $C_1 = 330$ pF, $C_2 = 470$ pF, $C_3 = 560$ pF, $C_4 = 1000$ pF. Determinare la carica di ciascun condensatore e l'energia elettrostatica del sistema a seconda che l'interruttore S sia aperto o chiuso.***

Quando l'interruttore S è aperto, C_1 e C_2 sono in serie, come lo sono C_3 e C_4. Le capacità equivalenti valgono $C_{12} = 193.9$ pF e $C_{34} = 359.0$ pF; ai capi di entrambe ci sono 12 V per cui $q_{12} = 2.33 \cdot 10^{-9}$ C e $q_{34} = 4.31 \cdot 10^{-9}$ C. Queste sono anche le cariche di C_1, C_2 e C_3, C_4 rispettivamente. Le due capacità C_{12} e C_{34} sono a loro volta in parallelo ed equivalgono ad un'unica capacità, pari alla loro somma, $C = 552.9$ pF. L'energia elettrostatica di tutto il sistema vale pertanto $W = 1/2 \; CV^2 = 39.8 \cdot 10^{-9}$ J.

Nel caso in cui l'interruttore è chiuso, C_1 e C_3 sono in parallelo, come lo sono C_2 e C_4. I due paralleli hanno le capacità $C_{13} = 890$ pF e $C_{24} = 1470$ pF; C_{13} e C_{24} sono a loro volta in serie ed equivalgono all'unica capacità $C' = 554.4$ pF. Ai capi di C_{13} ci sono 7.48 V e ai capi di C_{24} 4.52 V; le cariche dei quattro condensatori sono

$$q_1 = 2.47 \cdot 10^{-9} \text{ C} \; , \; q_2 = 2.12 \cdot 10^{-9} \text{ C} \; ,$$

$$q_3 = 4.19 \cdot 10^{-9} \text{ C} \; , \; q_4 = 4.52 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

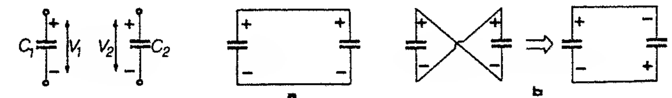


e si verifica, entro gli errori di approssimazione, che $q_1 + q_3 = q_2 + q_4$. Infine l'energia elettrostatica vale $W' = 1/2 \; C' V^2 = 39.9 \cdot 10^{-9}$ J

Per quanto piccola, la differenza è reale, cioè le capacità equivalenti dei due sistemi sono effettivamente diverse. Lasciamo come esercizio la verifica che $C = C'$ solo se $C_1 C_4 = C_2 C_3$.

2.7. ***Due condensatori C_1 e C_2, caricati ai potenziali V_1 e V_2, vengono collegati come in figura a. Calcolare le variazioni di carica, potenziale e di energia elettrostatica. Si assuma $C_1 = 2$ µF, $C_2 = 4$ µF, $V_1 = 500$ V, $V_2 = 200$ V. Determinare cosa cambia se il collegamento è fatto come in figura b.***

Nello stato iniziale abbiamo $q_1 = C_1 V_1$, $q_2 = C_2 V_2$, $W_1 = 1/2 \; C_1 V_1^2$, $W_2 = 1/2 \; C_2 V_2^2$; la carica totale è $q = q_1 + q_2$, l'energia totale $W = W_1 + W_2$. Senza perdita di generalità supponiamo che sia $V_1 > V_2$: effettuando la connessione c'è un passaggio di carica dall'armatura a V_1 all'armatura a V_2 fino a che



non viene raggiunto un potenziale comune V, intermedio tra V_1 e V_2. I due condensatori sono ora in parallelo; la carica totale è rimasta la stessa per cui

$$V = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

è il potenziale finale di equilibrio. Le variazioni di potenziale sono

$$\Delta V_1 = V - V_1 = \frac{C_2 (V_2 - V_1)}{C_1 + C_2} < 0 \quad ,$$

$$\Delta V_2 = V - V_2 = \frac{C_1 (V_1 - V_2)}{C_1 + C_2} > 0 \quad .$$

Le nuove cariche dei due condensatori valgono:

$$q_1' = C_1 V = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\, q < q_1 \quad , \quad q'_2 = C_2 V = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, q > q_2 \, .$$

Le variazioni $\Delta q_1 = C_1 \Delta V_1 < 0$ e $\Delta q_2 = C_2 \Delta V_2 > 0$ sono eguali in modulo a

$$\Delta q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,(V_1 - V_2)\, .$$

Infine l'energia elettrostatica dello stato finale è

$$W' = \frac{1}{2}\, C_1 V^2 + \frac{1}{2}\, C_2 V^2 = \frac{1}{2}\,(C_1 + C_2)\, V^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{(q_1 + q_2)^2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2}\, \frac{(C_1 V_1 + C_2 V_2)^2}{C_1 + C_2}$$

Confrontando con W si trova che l'energia di C_1 è diminuita e quella di C_2 aumentata, ma che globalmente c'è una variazione negativa: W è maggiore di W' secondo l'espressione

$$W - W' = \frac{1}{2}\, \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\, \Delta q\, (V_1 - V_2).$$

Questa frazione di energia che scompare durante il processo deve apparire sotto qualche altra forma durante le fasi intermedie che portano dallo stato iniziale a quello finale. L'argomento sarà ripreso nel problema 4.26; notiamo per ora che la diminuzione d'energia corrisponde al lavoro necessario per spostare attraverso la d.d.p. $V_1 - V_2$ la carica Δq che viene effettivamente messa in circolazione nel processo.

Passiamo al calcolo delle varie quantità:

$q_1 = 10^{-3}$ C , $q_2 = 0.8 \cdot 10^{-3}$ C , $q = 1.8 \cdot 10^{-3}$ C ,

$W = 25 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-2} = 33 \cdot 10^{-2}$ J ,

$V = 300$ V , $\Delta V_1 = -200$ V , $\Delta V_2 = 100$ V ,

$q'_1 = 0.6 \cdot 10^{-3}$ C , $q'_2 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ C , $\Delta q = 0.4 \cdot 10^{-3}$ C ,

$W' = 9 \cdot 10^{-2} + 18 \cdot 10^{-2} = 27 \cdot 10^{-2}$ J , $W - W' = 6 \cdot 10^{-2}$ J .

Se si effettua il collegamento della figura b non cambia nulla dal punto di vista formale, salvo che V_2 è diventato un numero negativo. Si può immaginare di effettuare prima il collegamento in basso: non avviene spostamento di cariche, ma rispetto al riferimento comune l'armatura in alto di C_1 è a + 500 V, quella di C_2 a −200 V. Numericamente lo stato finale è molto diverso, come ora calcoliamo:

q_1, $-q_2$, W stessi valori , $q = 0.2 \cdot 10^{-3}$ C ,

$V = 33.3$ V , $\Delta V_1 = -466.7$ V , $\Delta V_2 = 233.3$ V ,

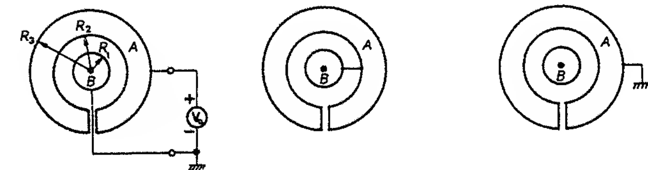
$q'_1 = 0.067 \cdot 10^{-3}$ C , $q'_2 = 0.133 \cdot 10^{-3}$ C , $\Delta q = 0.933 \cdot 10^{-3}$ C,

$W' = 0.11 \cdot 10^{-2} + 0.22 \cdot 10^{-2} = 0.33 \cdot 10^{-2}$ J ,

$W - W' = 32.67 \cdot 10^{-2}$ J .

Questa volta le cariche iniziali, quasi eguali in modulo, sono di segno opposto; con il collegamento quasi tutta la carica q_1 va a neutralizzare la carica q_2 per cui alla fine i condensatori sono praticamente scarichi; ciò avviene con notevole spostamento di carica e quindi con una notevole perdita di energia (tra l'altro anche $V_1 - V_2$ è maggiore).

2.8. *Una sfera conduttrice cava A, di raggi $R_2 = 40$ cm e $R_3 = 60$ cm, contiene una sfera conduttrice B concentrica, di raggio $R_1 = 20$ cm. Si connette alle due sfere come in figura un generatore di d.d.p. $V_0 = 900$ V. Determinare in modulo e segno le cariche q_1, q_2, q_3 presenti sulle tre superficie. Ad un certo istante viene staccato il generatore. Calcolare la variazione di energia elettrostatica nel caso che si colleghino le sfere tra loro oppure nel caso in cui si colleghi a terra la sfera A.*



Con la prima connessione la sfera B è a potenziale zero, la sfera A a V_0. Sulla superficie di raggio R_3 $V_0 = q_3 / 4\pi\varepsilon_0 R_3$ da cui $q_3 = 4\pi\varepsilon_0 R_3 V_0 = 6 \cdot 10^{-8}$ C, positiva. Nel loro insieme le due sfere costituiscono un condensatore sferico:

$$q = CV_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_0 = 44.4 \cdot 10^{-12}\, V_0 = 4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} \quad ,$$

$$q_1 = -q = -4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} \quad , \quad q_2 = +q = 4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} \quad .$$

L'energia elettrostatica è la somma di due termini, uno relativo al condensatore cioè alle cariche q_1 e q_2 che chiamiamo W_{int}, uno relativo alla carica q_3 che chiamiamo W_{est}:

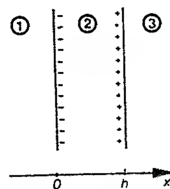
$$W = W_{int} + W_{est} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{q_3^2}{C'} = 1.8 \cdot 10^{-5} + 2.7 \cdot 10^{-5} = 4.5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}.$$

C' è la capacità del conduttore sferico A.

Quando si connettono tra loro le due sfere le cariche q_1 e q_2 si neutralizzano e si perde W_{int}: $\Delta W = -W_{int} = -1.8 \cdot 10^{-5}$ J. Quando invece si connette la sfera A a terra si annulla la carica q_3 e si perde W_{est}: $\Delta W = -W_{est} = -2.7 \cdot 10^{-5}$ J.

Cosa succederebbe se si connettesse la sfera B con l'esterno della sfera A?

2.9. ***Calcolare entro un condensatore piano indefinito campo, potenziale e densità di energia. Generalizzare il risultato a due piani carichi distanti h, con densità σ_1 e σ_2 rispettivamente.***



Le armature di un condensatore piano indefinito possono essere pensate come i supporti di due strati piani di cariche distribuite uniformemente con densità eguali in modulo e opposte in segno. Dividiamo lo spazio nelle tre regioni indicate in figura; prendiamo l'asse x ortogonale alle armature con origine sul piano negativo e verso indicato. Abbiamo visto nel problema 1.6 che un piano uniformemente carico genera un campo costante di modulo $\sigma/2\varepsilon_0$, ortogonale al piano e con verso uscente dal piano se $\sigma > 0$ ed entrante se $\sigma < 0$; nell'attraversare il piano il campo è discontinuo, con $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$ in modulo. Alla luce di tutto ciò possiamo scrivere questa tabella:

	①	②	③
Piano negativo	$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$	$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$	$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$
Piano positivo	$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$	$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$	$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$
Totale	0	$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{u}_x$	0

Il campo risultante è diverso da zero solo all'interno del condensatore: è diretto ortogonalmente alle armature da quella positiva a quella negativa e ha modulo costante σ/ε_0. Il potenziale in un generico punto interno si ricava per integrazione:

$$V(0) - V(x) = \int_0^x \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_x\, dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x \quad \Rightarrow \quad V(x) = V(0) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x\ .$$

Indicando con V_1 il potenziale dell'armatura negativa e con E il modulo del campo

$$V = V_1 + Ex \quad ; \quad \text{per } x = h \quad V_2 - V_1 = Eh \quad \Rightarrow \quad E = \frac{V_2 - V_1}{h}\ ,$$

che sono le relazioni più comunemente usate tra campo e differenza di potenziale in un condensatore piano indefinito. Per $x < 0$ il potenziale vale V_1, per $x > h$ vale V_2.

L'energia elettrostatica immagazzinata in un volume che ha base Σ sulle armature e altezza h si ricava da (2.9) e (2.4):

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}(V_2 - V_1)^2 = \frac{1}{2}\Sigma h \varepsilon_0 E^2$$

e per unità di volume $w = W/\Sigma h = 1/2\, \varepsilon_0 E^2$: si ritrova la (2.8).

Nel caso di due piani con densità σ_1 e σ_2 applichiamo sempre il principio di sovrapposizione e otteniamo

①	②	③
$-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$	$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$	$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$

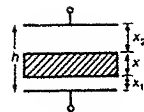
σ_1 σ_2

Il caso precedente è un caso particolare con $\sigma_1 = -\sigma$ e $\sigma_2 = \sigma$. Se invece $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (due piani con densità eguale in modulo e segno) il campo è nullo tra i due piani e vale $-\sigma/\varepsilon_0\,\mathbf{u}_x$ e $\sigma/\varepsilon_0\,\mathbf{u}_x$ nelle regioni ① e ③ rispettivamente.

2.10. ***In un condensatore piano (Σ, h) viene inserita parallelamente alle armature una lastra conduttrice a facce piane e parallele, ciascuna di area Σ, e spessa x. Calcolare di quanto varia la capacità del condensatore e quanto lavoro viene speso per inserire la lastra, nelle due ipotesi che l'inserimento avvenga mantenendo costante la carica sulle armature o costante la d.d.p. tra le medesime. Eseguire i calcoli con $\Sigma = 400$ cm², $h = 1$ cm, $x = 5$ mm, $\Delta V_0 = 10^4$ V.***

Supponiamo che anche quando la lastra è completamente inserita ci sia induzione completa tra i conduttori. Il calcolo della capacità si fa per via

puramente geometrica: dopo l'inserzione il sistema è equiparabile a due condensatori in serie per cui



$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{x_1}{\varepsilon_0\Sigma}+\frac{x_2}{\varepsilon_0\Sigma}=\frac{h-x}{\varepsilon_0\Sigma}\Rightarrow C=\frac{\varepsilon_0\Sigma}{h-x}=\frac{C_0}{k}$$

se con C_0 indichiamo la capacità iniziale del condensatore e con k il fattore $(h-x)/h$. Essendo $k<1$ la capacità risulta aumentata: si noti che l'aumento non dipende da dove viene posta la lastra, ma solo dallo spessore di questa.

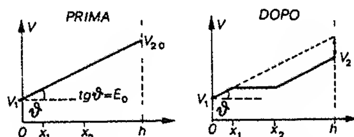
Per il calcolo del lavoro di inserzione sfruttiamo le variazioni di energia elettrostatica, distinguendo il processo a carica costante da quello a potenziale costante.

Nel primo caso supponiamo che il condensatore sia stato caricato e poi isolato dal generatore; sia q_0 la sua carica, ΔV_0 la d.d.p., $E_0=\Delta V_0/h$ il campo nel suo interno, $W_0=1/2\ C_0\Delta V_0^2=\varepsilon_0\Sigma h E_0^2/2$ l'energia elettrostatica. Effettuata l'inserzione a carica costante abbiamo naturalmente che la carica vale sempre q_0 per cui rimane costante la densità di carica e quindi il campo elettrico. Invece cambiano la d.d.p. e l'energia elettrostatica:

$$\Delta V=\frac{q_0}{C}=\frac{q_0(h-x)}{\varepsilon_0\Sigma}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(h-x)=E_0(h-x)=k\,\Delta V_0<\Delta V_0 \quad ,$$

$$W=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}=\frac{\varepsilon_0\Sigma(h-x)\,E_0^2}{2}=k\,W_0<W_0 \ .$$

Possiamo dire che nella regione in cui si trova la lastra il campo si è ridotto a zero: si sono così perse la d.d.p. E_0x e l'energia elettrostatica $W_x=\varepsilon_0\Sigma x E_0^2/2$. E infatti, guardando le formule, vediamo che ΔV è proprio ΔV_0-E_0x e $W=W_0-W_x$: tutto avviene come se la distanza tra le armature fosse diminuita di x. Nella figura è rappresentato l'andamento del potenziale nel condensatore prima e dopo l'inserzione.



Essendo il sistema isolato, la diminuzione di energia elettrostatica rappresenta il lavoro che le forze del campo hanno effettuato per attirare la lastra dentro il condensatore:

$$L_{q=\text{cost}}=-\,\Delta W=W_0-W=W_x=\frac{1}{2}\,\varepsilon_0\Sigma x E_0^2 \ .$$

Se invece il condensatore resta connesso al generatore durante il processo di inserzione, è la d.d.p. ΔV_0 tra le armature che rimane costante. Il campo elettrico deve allora aumentare per compensare il fatto di essere nullo dentro la lastra:

$$\Delta V_0=E_0h=E'(h-x) \quad\Rightarrow\quad E'=\frac{E_0}{k}>E_0 \ .$$

In corrispondenza deve essere aumentata la densità di carica e quindi la carica sulle armature dello stesso fattore: $q'=q_0/k$. Agli stessi risultati si può arrivare invece così: ΔV_0 è invariata, C è aumentata, quindi $q=C\,\Delta V_0$ è aumentata, dello stesso fattore di cui è aumentata C; di conseguenza dello stesso fattore è aumentato il campo elettrico. Per l'energia elettrostatica si trova

$$W'=\frac{1}{2}\ \varepsilon_0\Sigma(h-x)\,E'^2=\frac{W_0}{k}>W_0 \quad ,$$

$$\Delta W'=W'-W_0=W_0\,\frac{1-k}{k}=\frac{W_x}{k} \ .$$

A differenza del caso a carica costante, l'energia elettrostatica aumenta e la variazione è, in modulo, maggiore di quella precedente, ammesso che le condizioni iniziali siano le stesse. Eppure, in un caso o nell'altro, la lastra viene attirata in conseguenza nel medesimo fenomeno, l'induzione elettrostatica; ma ora ci troviamo di fronte all'apparente paradosso delle forze del campo che compiono un lavoro mentre l'energia elettrostatica aumenta. Il fatto è che nel secondo caso *il sistema condensatore-lastra non è isolato, in quanto al processo partecipa anche il generatore*: esso fornisce la carica $\Delta q=q'-q_0$ che compare in più sulle armature a inserzione compiuta: $+\Delta q$ sull'armatura positiva, $-\Delta q$ sull'armatura negativa. Globalmente è come se una carica positiva Δq fosse stata prelevata dall'armatura negativa e portata su quella positiva, attraverso una d.d.p. ΔV_0. Il lavoro per compiere questo processo, fornito dal generatore, vale

$$L_{\text{gen}}=\Delta q\,\Delta V_0=(q'-q_0)\,\Delta V_0=(C-C_0)\,\Delta V_0^2=2\,(W'-W_0)=2\,\Delta W'.$$

Il generatore fornisce dall'esterno il lavoro $2\,\Delta W'$: *di questo* $\Delta W'$ *va in aumento dell'energia elettrostatica del condensatore e il restante* $\Delta W'$ *deve essere il lavoro speso per attirare la lastra*:

$$L_{V=\text{cost}}=+\Delta W'=\frac{W_x}{k}=\frac{\varepsilon_0\Sigma x^2E_0^2}{2(h-x)}>L_{q=\text{cost}} \ .$$

Con i dati numerici del testo $C_0=35.4$ pF, $k=0.5$, $C=2C_0=70.8$ pF. Per l'energia e i lavori troviamo:

$$W_0=17.70\cdot10^{-4}\,\text{J} \ ,\ W_x=8.85\cdot10^{-4}\,\text{J} \ ,\ L_{q=\text{cost}}=-\,\Delta W=8.85\cdot10^{-4}\,\text{J} \ ,$$

$$W'=35.40\cdot10^{-4}\,\text{J} \ ,\ \frac{W_x}{k}=17.70\cdot10^{-4}\,\text{J} \ ,\ L_{V=\text{cost}}=\Delta W=17.70\cdot10^{-4}\,\text{J} \ ,$$

$$L_{\text{gen}}=2\,\Delta W'=35.40\cdot10^{-4}\ \text{J}.$$

È bene ricordare che i risultati ottenuti si applicano rigorosamente al caso ideale (e irrealistico) in cui ci sia induzione completa e il campo elettrico sia uniforme dentro il condensatore e nullo fuori con un brusco cambiamento che non è fisicamente ammissibile (¹).

Concludiamo con un'osservazione di carattere generale che tornerà utile in seguito (p.e. nel problema 3.5). Quando il sistema è isolato, $L = -\Delta W_{el}$ e, secondo le (2.11), $F_i = -\partial W_{el}/\partial x_i$. Se invece il generatore resta connesso, ciò comporta in generale variazioni di carica e di capacità allo spostarsi dei conduttori; con un ragionamento simile a quello usato si può scrivere che il generatore fornisce un lavoro $2\Delta W_{el} = \Delta W_{el} + L$ per cui $L = +\Delta W_{el}$ e $F_i = +\partial W_{el}/\partial x_i$. Anche in presenza di forze non conservative, come quelle che agiscono nel generatore, si possono ricavare forze e lavori dall'energia elettrostatica, purché si operi un cambiamento di segno.

2.11. ***Calcolare la forza per unità di superficie con cui si attirano le armature di un condensatore piano, sferico, cilindrico, cariche con una densità uniforme $\sigma = 2.98 \cdot 10^{-8}$ C/m².***

Partiamo dalle (2.11) calcolando per esempio l'energia come $W = q^2/2C$ e derivando poi rispetto a x o r per avere il modulo della forza.

In un condensatore piano (Σ, x).

$$W = \frac{1}{2}\frac{q^2 x}{\varepsilon_0 \Sigma} = \frac{\sigma^2 \Sigma x}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{dW}{dx} = \frac{\sigma^2 \Sigma}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} .$$

In un condensatore sferico (R, r, $R < r$):

$$W = \frac{q^2 (r - R)}{8\pi\varepsilon_0 R r} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{dW}{dr} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma^2 \Sigma}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad ;$$

σ è la densità di carica sull'armatura esterna, di raggio r e superficie $4\pi r^2$. Derivando invece rispetto a R e considerando la densità di carica sull'armatura interna, si arriva alla stessa espressione di p; il valore numerico è però diverso.

In un condensatore cilindrico (R, r, $R < r$, l):

$$W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\log\frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{dW}{dr} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r l} = \frac{\sigma^2 \Sigma}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad ,$$

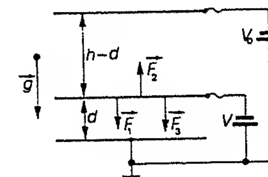
dove σ è la densità di carica sull'armatura esterna, di area $\Sigma = 2\pi r l$.

Numericamente $p = 5 \cdot 10^{-5}$ N/m². Ritroviamo qui quanto visto nel problema 1.22, e cioè che *la pressione elettrostatica sulla superficie di un conduttore è eguale a $\sigma^2/2\varepsilon_0$, cioè alla densità di energia $1/2\ \varepsilon_0 E^2$, indipendente dalla geometria.*

(¹) Si veda la nota alla fine del capitolo

2.12. ***Un condensatore piano ($\Sigma = 1$ m², $h = 3$ cm) ha l'armatura inferiore a potenziale zero, quella superiore a $V_0 > 0$. Si inserisce parallelamente alle armature una lamina metallica di spessore trascurabile, massa $m = 0.1$ kg, area $\Sigma = 1$ m², mantenendola a distanza $d = 1$ cm dall'armatura inferiore e al potenziale $V = 7 \cdot 10^3$ V. Calcolare il valore di V_0 affinché la lamina resti sospesa in questa posizione.***

La lamina risente delle forze F_1 e F_2 elettrostatiche e della forza peso F_3:



$$F_1 = p_1 \Sigma = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E_1^2 \Sigma = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \frac{V^2}{d^2}\Sigma \quad ,$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \frac{(V_0 - V)^2}{(h-d)^2}\Sigma \quad , \quad F_3 = mg \quad .$$

La condizione di equilibrio è:

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \frac{V^2}{d^2}\Sigma + mg = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \frac{(V_0 - V)^2}{(h-d)^2}\Sigma \quad ;$$

risolvendo nell'incognita V_0 si ottiene

$$V_0 = V + (h-d)\left(\frac{V^2}{d^2} + \frac{2mg}{\varepsilon_0 \Sigma}\right)^{1/2} = 7 \cdot 10^3 + 16.9 \cdot 10^3 = 23.9 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

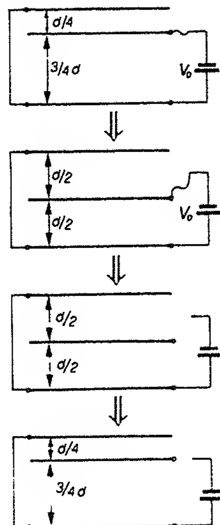
Se la lastra fosse senza peso e sempre a $7 \cdot 10^3$ V, V_0 dovrebbe valere $21 \cdot 10^3$ V: infatti $d = h/3$ e $V = V_0/3$; se invece occorre compensare l'azione del peso V_0 deve essere maggiore.

Si noti che il sistema non è elettricamente equivalente a due condensatori in serie: se si calcolano le singole cariche si trova che queste sono diverse sulle armature del condensatore, $-62.0 \cdot 10^{-7}$ C sull'inferiore, $+74.8 \cdot 10^{-7}$ C sulla superiore. Ciò è dovuto al fatto che la lamina intermedia è mantenuta a un *potenziale che non corrisponde al valore geometrico $V_0/3$*. D'altra parte se si inserisse la lamina senza connetterla a un generatore, questa avrebbe sulle due facce la stessa densità di carica, F_1 e F_2 sarebbero eguali ed opposte e non ci sarebbe nessuna posizione di equilibrio: la lamina cadrebbe sotto l'azione del peso.

2.13. ***Tre fogli conduttori piani e paralleli, di spessore trascurabile, sono collegati come nella prima figura. Il foglio centrale, di massa $m = 10$ g, può muoversi verticalmente restando parallelo agli altri due, la cui distanza è fissa e vale $d = 8$ mm. Si osserva che quando la distanza tra il foglio superiore e quello centrale è $d/4$ la carica totale presente su quest'ultimo è $q = 5.9 \cdot 10^{-7}$ C e che la forza peso è equilibrata dalle forze di campo. Calcolare la superficie Σ dei fogli e il valore di V_0. Partendo da questa situazione iniziale si esegue il seguente processo: si porta il foglio centrale in posizione mediana, si stacca il generatore, si riporta il foglio nella***

posizione iniziale. Calcolare la d.d.p. finale tra i fogli e il lavoro fatto dalle forze del campo nell'intero processo.

Il sistema è equivalente a due condensatori in parallelo; nello stato iniziale:



$$C_1 = \frac{4\,\varepsilon_0 \Sigma}{d}\ ,\ C_2 = \frac{4\,\varepsilon_0 \Sigma}{3d}\ ,\ C = C_1 + C_2 = \frac{16\,\varepsilon_0 \Sigma}{3d}\ ,$$

$$C_1 V_0 + C_2 V_0 = q \quad \Rightarrow \quad \Sigma V_0 = \frac{3qd}{16\,\varepsilon_0} = 100\ \mathrm{Vm^2}.$$

La seconda condizione da sfruttare è quella dell'equilibrio:

$$\frac{1}{2}\ \varepsilon_0 E_1^2 \Sigma - \frac{1}{2}\ \varepsilon_0 E_2^2 \Sigma = mg\ \ ,$$

con $E_1 = 4V_0/d$ e $E_2 = 4V_0/3d$. Riordinando

$$\Sigma V_0^2 = \frac{9mgd^2}{64\,\varepsilon_0} = 10^5\ \mathrm{V^2m^2}\ .$$

Mettendo insieme le due condizioni si ottiene:

$$V_0 = 10^3\ \mathrm{V}\ \ ,\ \ \Sigma = 0.1\ \mathrm{m^2}\ .$$

La prima fase del processo descritto è uno spostamento a potenziale costante: variano le capacità e le cariche dei due condensatori; alla fine le due capacità sono eguali e si ha $2CV_0 = q'$ ovvero

$$q' = \frac{4\,\varepsilon_0 \Sigma V_0}{d} = \frac{3}{4}\,q = 4.43 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}.$$

Staccando il generatore non succede niente; poi, ritornando nella posizione iniziale, si ha un processo a carica costante e alla fine vale ancora la prima relazione trovata $\Sigma V = 3q'd/16\,\varepsilon_0$: se q' è $3/4\,q$ allora $V = 3/4\ V_0 = 750$ V. Questa è la d.d.p. finale ai capi dei due condensatori, cioè il potenziale del foglio centrale riferito al potenziale degli altri due.

Per il calcolo del lavoro sfruttiamo i risultati del problema 2.10: nella fase a $V = \mathrm{cost}$ $L = \Delta W$, nella fase a $q = \mathrm{cost}$ $L = -\Delta W$; dobbiamo pertanto determinare le energie elettrostatiche del sistema. Con simboli evidenti abbiamo:

$$W_1 = \frac{1}{2}\ \frac{16\,\varepsilon_0 \Sigma}{3d}\ V_0^2\ ,\ W_2 = \frac{1}{2}\ \frac{4\,\varepsilon_0 \Sigma}{d}\ V_0^2\ ,\ W_3 = \frac{1}{2}\ \frac{16\,\varepsilon_0 \Sigma}{3d}\ \frac{9}{16}\ V_0^2\ ,$$

$$\Delta W_{12} = W_2 - W_1 = -\ \frac{2}{3}\ \frac{\varepsilon_0 \Sigma V_0^2}{d}\quad ,\quad \Delta W_{23} = W_3 - W_2 = -\ \frac{1}{2}\ \frac{\varepsilon_0 \Sigma V_0^2}{d}\quad ,$$

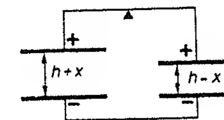
$$L = \Delta W_{12} - \Delta W_{23} \doteq -\ \frac{1}{6}\ \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{d}\ V_0^2 = -1.84 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}\ \ .$$

Non sarebbe corretto calcolare il lavoro come $W_1 - W_3$, in quanto il sistema non è sempre isolato; alla prima fase del processo partecipa anche il generatore.

Si spieghi la ragione per cui il lavoro è negativo nella prima fase e positivo nell'ultima.

2.14. *Le armature superiori di due condensatori piani sono collegate insieme da un conduttore e costituiscono i piatti di una bilancia. L'area è* **$\Sigma = 0.28$ m²**, *la distanza* **$h = 4.5$ mm**, *per entrambi i condensatori. Si porta il sistema nella posizione* **$h_1 = h + x$, $h_2 = h - x$** *con* **$x = 0.5$ mm** *e lo si carica a* **$V_0 = 2 \cdot 10^3$ V**. *Il generatore viene poi staccato e il sistema lasciato libero di muoversi fino a che* **$x = 1.5$ mm**. *In questa posizione calcolare la d.d.p. ai capi del sistema, le cariche q_1 e q_2 dei due condensatori, la risultante delle forze elettrostatiche sulle armature superiori specificando quale è scesa, il lavoro nel passaggio dalla posizione iniziale a quella finale.*

Nello stato iniziale



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h + x}\ ,\ C_2 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h - x}\ ,\ C = \frac{2\,\varepsilon_0 \Sigma h}{h^2 - x^2}\ ,$$

$$q = \frac{2\,\varepsilon_0 \Sigma h}{h^2 - x^2}\ V_0 = 2.23 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}\ \ .$$

Lo spostamento successivo avviene a carica costante; le capacità variano in quanto x passa da 0.5 a 1.5 mm:

$$C_1' = 4.13 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F}\ \ ,\ \ C_2' = 8.27 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F}\ \ ,\ \ C' = 12\ 40 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{F}\ \ ,$$

$$V = \frac{q}{C'} = 1798\ \mathrm{V}\ \ ,\ \ q_1' = C_1' V = 0.74 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}\ \ ,\ \ q_2' = C_2' V = 1.49 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

L'armatura che scende è quella di destra: nei due condensatori c'è la stessa d.d.p., ma il campo è maggiore a destra, dove minore è la distanza tra le armature:

$$F_2 - F_1 = \frac{q_2^2}{2\,\varepsilon_0 \Sigma} - \frac{q_1^2}{2\,\varepsilon_0 \Sigma} = 0.34\ \mathrm{N}\ \ .$$

Infine $L = -\Delta W$ essendo il processo a carica costante:

$$L = W_i - W_f = \frac{1}{2}\ q^2 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'}\right) = \frac{q^2}{4\,\varepsilon_0 \Sigma h}\ (x'^2 - x^2) = 2.23 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}\ ,$$

dove $x' = 1.5$ mm e $x = 0.5$ mm.

2.15. ***Nell'elettrometro assoluto di Lord Kelvin l'area delle armature sia $\Sigma = 400$ cm^2 e la distanza tra le stesse $h = 5$ mm. Connettendo l'elettrometro a un generatore si osserva che per mantenere la stessa distanza h tra le armature occorre mettere sul piatto della bilancia una massa $m = 20$ mg. Calcolare quanto vale la d.d.p. applicata e dare la sensibilità dello strumento ammesso che la minima variazione di massa apprezzabile sia $\Delta m = 1$ mg.***

L'elettrometro di Lord Kelvin è costituito da un condensatore piano in cui l'armatura superiore è uno dei piatti di una bilancia. All'equilibrio

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \frac{V^2}{h^2}\,\Sigma = mg \quad \Rightarrow \quad V^2 = 2\,\frac{h^2 g}{\varepsilon_0 \Sigma}\,m = 2\,Km \quad .$$

Essendo $K = 6.92 \cdot 10^8$ V^2/Kg , $V = 166.4$ V.

La quantità che si misura è m, quella da determinare V: lo strumento è perciò quadratico Detta sensibilità il rapporto tra la minima variazione della grandezza misurata che si riesce ad apprezzare e la corrispondente variazione della grandezza da determinare, nel nostro caso si ottiene

$$\frac{dm}{dV} = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{V}{K} \quad .$$

relazione tipica degli strumenti a scala quadratica. La sensibilità è proporzionale alla grandezza da determinare e quindi migliora al crescere di questa.

Con i nostri dati numerici la relazione precedente si può anche scrivere

$$\Delta V = \frac{K\,\Delta m}{V} = \frac{692}{V} \quad ,$$

dove ΔV rappresenta la variazione di potenziale che produce la variazione Δm.

V (V)	100	200	500	692	1000	
ΔV (V)	6.92	3.46	1.38	1	0.69	
$\frac{\Delta V}{V}$ (%)	6.92	1.73	0.28	0.14	0.07	⇐ *Errore relativo*

La misura diventa tanto più precisa quanto maggiore è V; conviene che $K\Delta m$ sia piccolo per aumentare il campo in cui lo strumento funziona bene. Si noti che $K = g \Big/ \left|\frac{dC}{dh}\right|$, se C è la capacità del condensatore.

Per misurare d.d.p. piccole, ma facilmente riproducibili, come quelle fornite dalle pile, basta mettere un buon numero di elementi in serie di modo che la d.d.p. totale, somma delle singole, divenga misurabile con precisione.

L'importanza dello *strumento* descritto sta nella sua caratteristica di essere *assoluto*, cioè di *riferire una grandezza elettrica non ad altre grandezze elettriche, bensì a grandezze meccaniche.*

2.16. ***Un condensatore piano ($\Sigma = 4 \cdot 10^{-2}$ m^2) ha le armature orizzontali. Quella inferiore è a potenziale zero, quella superiore è sospesa a un supporto isolante tramite una molla di costante elastica $K = 100$ N/m. Quando il condensatore è scarico la distanza tra le armature vale $h = 5$ mm. Si blocca l'armatura mobile in questa posizione, la si carica a una d.d.p. V, la si isola dal generatore e poi la si sblocca. Si osserva che la distanza tra le armature diviene $h' = 4.5$ mm. Calcolare V.***

Le due situazioni di equilibrio, detta m la massa sospesa, sono:

$$Kx = mg \quad , \quad Kx' = mg + F_{el} \quad .$$

Sottraendo la prima dalla seconda

$$K(x' - x) = K(h' - h) = Ky = F_{el} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2 \Sigma \quad .$$

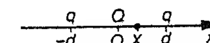
E è il campo elettrico tra le armature, costante perché il processo è a carica costante. In particolare $E = V/h$ e pertanto:

$$V^2 = 2\,\frac{Kh^2}{\varepsilon\Sigma}\,y = 2Ay \quad \Rightarrow \quad V = 2657 \text{ V} \quad .$$

Anche questo è uno *strumento assoluto*: la grandezza meccanica che si misura è una lunghezza e la relazione con V è quadratica. La sensibilità è $\Delta y/\Delta V = V/A$ e la bontà dello strumento è espressa dal prodotto $A\,\Delta y$. Per noi $A = 7.06 \cdot 10^9$ V^2/m e se si riesce ad apprezzare il decimo di millimetro $A\,\Delta y = 7.06\,10^5$ V^2, cioè lo strumento non è sensibile. Col valore di V trovato risulta $\Delta V/V = 0.1$; mettendo per y la massima elongazione, 5 mm, risulta $V = 8.4 \cdot 10^3$ V e $\Delta V/V = 0.01$.

2.17. ***Due cariche puntiformi positive eguali q sono poste agli estremi di un segmento di lunghezza 2d; nel centro del segmento si trova in equilibrio una carica puntiforme positiva Q. Determinare se l'equilibrio è stabile.***

Per provare che l'equilibrio è stabile dobbiamo verificare se, per qualunque spostamento che allontani la carica Q dal punto O, che assumiamo come origine, esiste in corrispondenza una forza che tende a riportare Q nell'origine. Consideriamo prima spostamenti lungo l'asse x, per esempio da O a X. Chiamando $\mathbf{F}_S$ la forza esercitata su Q dalla carica a sinistra e $\mathbf{F}_D$ quella esercitata dalla carica a destra, abbiamo:



$$\mathbf{F}_S = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{u}_x}{(d+x)^2} \quad , \quad \mathbf{F}_D = -\,\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{u}_x}{(d-x)^2} \quad , \quad F_D > F_S \quad .$$

La risultante è diretta da X a O; lo stesso succede per spostamenti con $x < 0$.

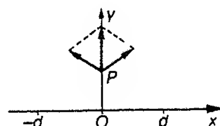
Pertanto lungo l'asse x l'equilibrio è stabile; è facile verificare che se Q fosse negativa l'equilibrio sarebbe instabile.

La situazione è diversa per spostamenti normali all'asse x (e consideriamo solo il piano x,y perché il problema gode di simmetria di rotazione rispetto all'asse x): in P

$$F_S = F_D = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d^2+y^2)} \quad \text{in modulo.}$$

La risultante ha componente nulla lungo x e vale

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y}{(d^2+y^2)^{3/2}}\,\mathbf{u}_y \quad .$$



Essa fa allontanare ancora di più Q dall'origine. Alla stessa conclusione si giunge per spostamenti con $y<0$ e anche per spostamenti generici che non siano lungo gli assi. Dunque l'equilibrio in generale non è stabile.

Il risultato trascende il semplice caso in cui è stato ricavato, si può dimostrare che *in un campo elettrostatico non esistono punti di equilibrio stabile in senso assoluto, cioè tali che in essi il campo sia nullo e in un loro intorno le forze elettrostatiche puntino tutte verso di essi.*

Invece che sulle forze si può ragionare sull'energia elettrostatica. Nell'origine la carica Q possiede l'energia $W_0 = 2qQ/4\pi\varepsilon_0 d$; in un punto generico X

$$W_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(d-x)} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0(d+x)} = \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{d^2-x^2} > W_0 \ :$$

l'origine è posizione di equilibrio stabile per spostamenti lungo l'asse x. Se ora, partendo da un generico punto dell'asse x, si esegue uno spostamento ortogonale y:

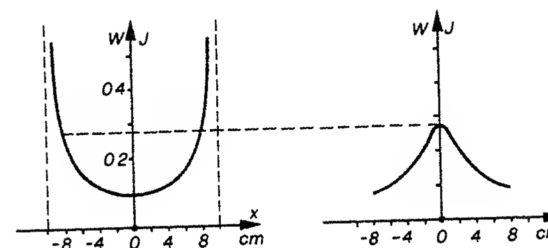
$$W_y(x) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[(d-x)^2+y^2]^{1/2}} + \frac{1}{[(d+x)^2+y^2]^{1/2}}\right\} < W_x \ ;$$

infatti ciascun termine di $W_y(x)$ è minore del corrispondente termine di W_x. Portata fuori dall'asse x la carica Q se ne allontana indefinitamente. Questo è vero in particolare anche per $x=0$:

$$W_y(0) = \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0(d^2+y^2)^{1/2}} < W_0 \quad .$$

I risultati sono illustrati nei due grafici seguenti che danno l'energia elettrostatica lungo l'asse x e lungo un generico asse parallelo all'asse y, con $q = 10^{-6}$ C, $Q = 5.55 \cdot 10^{-7}$ C, $d = 10$ cm.

L'unica maniera per stabilizzare l'equilibrio sarebbe quella di imporre alla carica Q di restare sull'asse x; ma allora entra in gioco un vincolo, cioè una forza che non è più elettrostatica. In effetti, quando sono presenti altri tipi di forze è possibile avere posizioni di equilibrio stabile, come vedremo per prossimo problema.



2.18. ***Riconsiderare i problemi 2.12, 2.15, 2.16 studiando le posizioni di equilibrio dal punto di vista della stabilità.***

Riscriviamo le forze in gioco nel problema 2.12:

verso il basso $F_1 = \dfrac{\varepsilon_0\Sigma}{2}\dfrac{V^2}{d^2}$, $F_3 = mg$ sempre costante

verso l'alto $F_2 = \dfrac{\varepsilon_0\Sigma}{2}\dfrac{(V_0-V)^2}{(h-d)^2}$.

Se diminuiamo d F_1 aumenta, F_2 diminuisce e la lamina cade sull'armatura inferiore; se aumentiamo d la lamina va a toccare l'armatura superiore; quindi l'equilibrio è instabile. Se la lamina non fosse connessa a un generatore non ci sarebbe mai equilibrio; solo in assenza della forza peso ci sarebbe equilibrio indifferente.

L'elettrometro di Lord Kelvin (problema 2.15) funziona a potenziale costante per cui la forza agente tra le armature varia al variare della distanza tra esse, crescendo se si avvicinano e diminuendo se si allontanano. Invece la forza esercitata dalla massa posta sull'altro piatto della bilancia è costante. Ne consegue che la posizione di equilibrio è instabile (in realtà, per piccoli spostamenti, l'equilibrio è reso stabile da altri fattori).

L'elettrometro assoluto descritto nel problema 2.16 è in equilibrio stabile. Se infatti dalla situazione in cui $Kx' = mg + q^2/2\varepsilon_0\Sigma$ si fa compiere uno spostamento che allontani le armature la forza elastica diminuisce e si ha una forza risultante verso il basso che riporta l'armatura mobile verso il punto di equilibrio. Analogamente, per uno spostamento che avvicini le armature si ha una forza risultante verso l'alto. Si può anche ragionare sull'energia: all'equilibrio vale

$$W_0 = \frac{q^2}{2C} + mgh + \frac{1}{2}Kx^2$$

dove abbiamo tralasciato gli apici per semplicità. Se x diminuisce di Δx

$$W = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}(h+\Delta x) + mg(h+\Delta x) + \frac{1}{2}K(x-\Delta x)^2$$

$$= W_0 + \left(\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma} + mg - Kx\right) \Delta x + \frac{1}{2} K(\Delta x)^2 = W_0 + \frac{1}{2} K(\Delta x)^2$$

in quanto il termine tra parentesi è nullo, esprimendo la condizione di equilibrio. Vediamo che $W > W_0$ e che la conclusione non dipende dal segno di Δx.

2.19. ***Due cariche positive q e due negative −q, eguali in modulo, sono poste nei vertici di un quadrato di lato l = 14.1 cm, come in figura. L'energia elettrostatica del sistema vale W = −3.6 · 10⁻⁵ J. Una carica q* viene spostata dal punto A(l/2,0) al punto B(0, l/2) compiendo un lavoro L = 2.8 · 10⁻⁷ J contro le forze del campo. Calcolare i valori di q e q*.***

L'energia elettrostatica del sistema in base a (2.6) si scrive

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \Sigma_{i,j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad , \ i = 1, 2, 3, 4, \ j = 1, 2, 3, 4, \ i \neq j \ .$$

Tutti i termini con $r_{ij} = l$ si annullano tra loro e restano i quattro termini «diagonali» con $r_{ij} = 2^{1/2} l$:

$$W = \frac{-q^2}{2^{3/2}\pi\varepsilon_0 l} = -3.6 \cdot 10^{-5} \text{ J} \quad ,$$

da cui si ricava $q = 2 \cdot 10^{-8}$ C.

Il lavoro delle forze di campo nello spostamento della carica q^* è $q^*(V_A - V_B)$: V_A è nullo, $V_B = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{l} - 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{5^{1/2} l} =$

$$\frac{q}{\pi\varepsilon_0 l}\left(1 - \frac{1}{5^{1/2}}\right) = 2822 \text{ V.}$$

Pertanto $L_{AB} = -q^* V_B = -2.8 \cdot 10^{-7}$ J da cui $q^* = 10^{-10}$ C.

2.20. ***Calcolare l'energia elettrostatica del campo prodotto da una carica q = 3.2 · 10⁻¹⁸ C distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio R = 10⁻¹³ cm. Ripetere il calcolo se la stessa carica è distribuita uniformemente in tutto il volume della sfera.***

Per le espressioni del campo elettrico ci serviamo dei risultati dei problemi 1.8 e 1.12 mentre per il calcolo dell'energia elettrostatica utilizziamo la (2.7). Per la superficie sferica carica abbiamo:

$$E(0 \leq r < R) = 0 \quad , \quad E(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad ,$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{2C} \quad ,$$

se con C indichiamo la capacità della sfera, $4\pi\varepsilon_0 R$. Numericamente

$$W = 4.61 \cdot 10^{-11} \text{ J} = 2.88 \cdot 10^8 \text{ eV} = 288 \text{ MeV} \quad .$$

La distribuzione dell'energia elettrostatica non è uniforme: la densità è maggiore per r piccolo e tende a zero per r tendente all'infinito. Lasciamo come esercizio la verifica che metà dell'energia totale è compresa entro la superficie sferica di raggio $2R$.

L'espressione trovata non è utilizzabile per una carica puntiforme: il passaggio al limite per R tendente a zero dà un risultato infinito. Questa è una difficoltà dell'elettromagnetismo che non è superabile con i soli mezzi della fisica classica; in altre parole nell'elettromagnetismo classico il concetto di carica puntiforme porta, energeticamente, ad un assurdo.

Nel caso della distribuzione di volume eseguiamo il calcolo in due maniere: utilizziamo intanto come sopra la (2.7) ricordando che

$$E(0 \leq r \leq R) = \frac{\varrho r}{3\varepsilon_0} \quad , \quad E(r \geq R) = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \ :$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$
$$= \frac{2\pi}{9\varepsilon_0}\varrho^2 R^5 \left(\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\varrho^2 R^5 = \frac{6}{5}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

essendo la carica totale della sfera $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$.

Un metodo alternativo di calcolo è il seguente: supponiamo di costruire la sfera mediante un accumulo successivo di cariche infinitesime. Precisamente, pensiamo di aver già costruito una sfera di raggio r, carica $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho$ e potenziale in superficie $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\varrho r^2}{3\varepsilon_0}$. Il lavoro necessario per aggiungere la carica $dq = \varrho d\tau = \varrho 4\pi r^2 dr$ è $dL = V dq = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\varrho^2 r^4 dr$: abbiamo così aggiunto una corteccia sferica di carica spessa dr. Il lavoro totale si ottiene integrando tra zero e R ed è uguale all'energia elettrostatica:

$$W = \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\varrho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\varrho^2 R^5 \ .$$

Anche ora la densità di energia non è uniforme: cresce da zero a R e decresce da R all'infinito. Stavolta la metà dell'energia totale è racchiusa entro

la superficie sferica di raggio $5R/3$. Notiamo che il limite per R tendente a zero è finito perché anche la carica tende a zero. Numericamente

$$W = \frac{6}{5}\, 4.61 \cdot 10^{-11} = 5.53 \cdot 10^{-11}\ \text{J} = 346\ \text{MeV}.$$

Sarebbe questa l'energia elettrostatica del nucleo di un atomo contenente 20 protoni (i neutroni sono privi di carica) e di raggio 10^{-13} cm, nell'ipotesi di distribuzione uniforme della carica entro il nucleo.

Il confronto tra le due distribuzioni, superficiale e di volume, mostra che a parità di raggio e di carica totale la sfera carica ha un'energia elettrostatica maggiore della superficie sferica carica. Viceversa, a parità di carica per produrre la stessa energia elettrostatica occorre una superficie sferica di raggio minore rispetto a quello di una sfera carica (nel rapporto $5/6$).

Un'applicazione interessante delle formule ricavate è quella del calcolo del raggio dell'elettrone. Supponiamo che la carica dell'elettrone $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C sia distribuita uniformemente in una sfera e che la sua energia a riposo, cioè l'energia dovuta al fatto di possedere una massa a riposo $m = 9.06 \cdot 10^{-31}$ Kg, sia di origine esclusivamente elettrostatica. Poiché all'energia a riposo corrisponde nella teoria della relatività l'espressione mc^2 con c velocità della luce nel vuoto ($3 \cdot 10^8$ m/s), abbiamo

$$\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = mc^2 \quad\Rightarrow\quad R = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} = 1.7 \cdot 10^{-15}\ \text{m} \quad .$$

In effetti in fisica atomica compare spesso la costante

$$R_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2} = 2.8 \cdot 10^{-15}\ \text{m} \quad ,$$

detta *raggio classico dell'elettrone*. Questo apparente successo del calcolo ha però un valore relativo: nel caso del protone troveremmo un raggio di circa 10^{-18} m in contrasto con le misure sperimentali che danno circa 10^{-15} m. Ciò può indicare che il protone ha una struttura non uniforme che non permette l'applicazione delle formule in nostro possesso.

Osserviamo infine che la sfera carica (uniformemente o meno) è un sistema che non può stare insieme se ci sono solo forze elettrostatiche: in tal caso esploderebbe. Occorrono altre forze che bilancino la repulsione elettrostatica. *Nel nucleo atomico sono le forze nucleari tra i componenti del nucleo (protoni e neutroni) che danno stabilità al sistema; la fissione nucleare ha origine dalla rottura di questo equilibrio.*

2.21. ***Z sfere uniformemente cariche, tutte di raggio R_0 e con la stessa densità di carica ϱ, inizialmente molto distanti una dall'altra, vengono fuse insieme, assumendo globalmente ancora forma sferica. Calcolare il raggio R della nuova sfera e la variazione di energia elettrostatica nel processo. Si eseguano i calcoli con $R_0 = 10^{-15}$ m, $Z = 27$.***

L'energia elettrostatica di ciascuna sfera nello stato iniziale è

$$W = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} \quad\Rightarrow\quad W_i = ZW = \frac{3}{5}\frac{Zq^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} \quad .$$

La carica totale deve essere la stessa una volta avvenuta la fusione:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho = Z\frac{4}{3}\pi R_0^3 \varrho \quad\Rightarrow\quad R = Z^{1/3} R_0 \quad ;$$

il raggio della sfera finale è proporzionale alla radice cubica del numero di componenti (e quindi il volume è proporzionale a Z). L'energia elettrostatica finale è

$$W_f = \frac{3}{5}\frac{(Zq)^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad\Rightarrow\quad \frac{W_f}{W_i} = Z^{2/3} \quad :$$

escluso il caso banale $Z = 1$, l'energia finale è maggiore di quella iniziale; infatti per fare avvenire il processo occorre spendere lavoro contro la repulsione elettrostatica.

La soluzione numerica è

$$R = 27^{1/3} \cdot 10^{-15} = 3 \cdot 10^{-15}\ \text{m} \quad , \quad \frac{W_f}{W_i} = 27^{2/3} = 9 \quad .$$

Lo stesso procedimento si potrebbe seguire per distribuzioni sferiche di massa e in effetti in natura una situazione simile è verificata nei nuclei: misure sperimentali indicano che *il raggio dei nuclei cresce come $R = A^{1/3} R_0$* dove A è il numero dei componenti (protoni più neutroni) e R_0 è una costante che vale $1.2 \cdot 10^{-15}$ m.

2.22. ***Due sfere conduttrici di raggi $R_1 = 6$ cm e $R_2 = 4$ cm sono poste a distanza d, molto maggiore di entrambi i raggi, e sono collegate da un sottile filo conduttore. Una carica $q = 10^{-19}$ C viene comunicata al sistema. Determinare come questa carica si distribuisce tra le due sfere e calcolare l'energia elettrostatica del sistema. Dimostrare che la soluzione trovata rende minima l'energia elettrostatica.***

La situazione è identica a quella del problema 2.2 con l'aggiunta che i potenziali V_1 e V_2 delle due sfere devono essere eguali:

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{q_2}{4\pi_0 R_2} \quad\Rightarrow\quad q_1 = \frac{R_1}{R_2}\frac{d - R_2}{d - R_1}\, q_2 \simeq \frac{R_1}{R_2}\, q_2$$

essendo per ipotesi $d \gg R_1$ e $d \gg R_2$. Le cariche delle sfere sono direttamente proporzionali ai raggi; se invece si considerano le densità di carica si trova $\sigma_1/\sigma_2 = R_2/R_1$, cioè le densità sono inversamente proporzionali ai raggi: dove il raggio è minore, maggiore è la densità e quindi il campo elettrico. Volendo esprimere q_1 e q_2 in funzione della carica totale $q = q_1 + q_2$ si ottiene

$$q_1 = \frac{R_1(d-R_2)}{d(R_1+R_2)-2R_1R_2}\, q \simeq \frac{R_1}{R_1+R_2}\, q = 0.6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} \quad ,$$

$$q_2 = \frac{R_2(d-R_1)}{d(R_1+R_2)-2R_1R_2}\, q \simeq \frac{R_2}{R_1+R_2}\, q = 0.4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} \quad .$$

L'energia elettrostatica del sistema è

$$W = \frac{1}{2}\, q_1 V_1 + \frac{1}{2}\, q_2 V_2 = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1 q_2}{8\pi\varepsilon_0 d} \quad .$$

Trascurando l'ultimo termine e sostituendo le espressioni di q_1 e q_2 in funzione di q:

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)} = 4.5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{J}.$$

In particolare se $R_1 = R_2 = R$ $q_1 = q_2 = q/2$, $W = q^2/16\pi\varepsilon_0 R$: l'energia è esattamente la metà di quella di una sfera conduttrice di raggio R e carica q. Se per esempio partiamo da due sfere eguali lontane, una carica e una no ($W = q^2/8\pi\varepsilon_0 R$) e poi le colleghiamo con un filo, la carica si divide tra le due e l'energia si dimezza, la perdita essendo dovuta principalmente a irraggiamento e effetti termici.

Per dimostrare che la soluzione trovata corrisponde a un minimo dell'energia elettrostatica, riscriviamo questa sostituendo a q_2 $q - q_1$:

$$W(q_1) = \frac{1}{2}\, q_1 \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q-q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} \right) + \frac{1}{2}\, (q-q_1) \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{q-q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \right)$$

$$= \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{d} \right) + \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} \quad .$$

Deriviamo rispetto a q_1 e eguagliamo a zero la derivata:

$$q_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2}{d} \right) = q \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d} \right) \quad ,$$

$$q_1 = \frac{R_1(d-R_2)}{d(R_1+R_2)-2R_1R_2}\, q \simeq \frac{R_1}{R_1+R_2}\, q \quad .$$

Si verifica subito che la derivata seconda è una costante positiva e quindi l'estremo è effettivamente un minimo. Non si è fatto uso nella dimostrazione del fatto che $V_1 = V_2$; lasciamo come esercizio la prova che con la ripartizione di carica corrispondente al minimo dell'energia questa condizione è verificata.

2.23. ***A una bolla di liquido, di raggio* 1 cm *e tensione superficiale* $\tau = 0.04$ N/m, *viene ceduta una carica elettrica e in conseguenza di ciò la bolla aumenta di raggio. Calcolare qual è il valore della carica che si può cedere alla bolla se la si vuole portare ad un raggio massimo* $R = 2$ cm.**

All'interno di una bolla di liquido c'è una pressione maggiore di quella atmosferica di una quantità $\Delta p = 4\tau/r$ se r è il raggio della bolla e τ è la tensione superficiale del liquido. Quando alla bolla viene ceduta una carica, che supporremo distribuirsi uniformemente sulla superficie sferica, la pressione elettrostatica fa dilatare la bolla e si raggiunge una situazione di equilibrio quando $\sigma^2/2\varepsilon_0 = 4\tau/R$ con $\sigma = q/4\pi R^2$ e R raggio di equilibrio. Se la pressione elettrostatica supera la tensione superficiale la bolla esplode. La relazione tra carica e raggio è:

$$q^2 = 128\pi^2\varepsilon_0 \tau R^3 \quad \Rightarrow \quad q = 0.6 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}.$$

Ragionando in termini di energia e di equilibrio, l'energia totale del sistema per un generico raggio r è

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + 2\tau 4\pi r^2 :$$

la tensione superficiale è un'energia per unità di superficie e il fattore 2 compare perché la bolla ha due facce. Derivando rispetto a r e annullando si trova $q^2 = 128\,\pi^2\varepsilon_0\tau r^3$ come condizione di minimo (la derivata seconda è positiva).

2.24. ***Una carica puntiforme positiva* $q = 4 \cdot 10^{-14}$ C *è posta a distanza* $x = 1$ cm *da un piano conduttore indefinito a potenziale zero. Calcolare l'energia elettrostatica della carica. Se questa parte con velocità nulla dalla posizione* $x_1 = 1$ cm *con che energia cinetica arriva nella posizione* $x_2 = 0.5$ cm?**

Riprendiamo i risultati del problema 1.14 di cui usiamo la figura e i simboli. La carica è attirata dal piano con una forza $F = q^2/[4\pi\varepsilon_0(2x)^2]$; sul piano c'è una carica indotta negativa distribuita con densità $\sigma = -qx\,(x^2+y^2)^{-3/2}/2\pi$. L'energia elettrostatica della carica q nel campo delle cariche indotte è

$$W = \int q\,dV = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma\, d\Sigma}{r} \quad , \quad r = (x^2+y^2)^{1/2} \quad , \quad d\Sigma = 2\pi y\, dy \quad ,$$

$$W = -\frac{q^2 x}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{d(y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_0 x} \quad .$$

Si noti che $W = qV$ se $V = -q/4\pi\varepsilon_0 2x$ è il potenziale generato dalla carica immagine nel punto in cui si trova q. L'energia elettrostatica è negativa in quanto la forza è attrattiva. Numericamente

$$W = -7.2 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J} = -4.5\ \mathrm{KeV}.$$

Per calcolare l'energia cinetica integriamo la forza cui è sottoposta q:

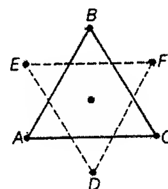
$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2}\, dx = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 3.6 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{J} = 2.25\ \mathrm{KeV}.$$

Notiamo d'altra parte che $\Delta T = -\Delta W/2$: durante l'avvicinamento l'energia elettrostatica diminuisce, ma la sua diminuzione non è eguale all'aumento di

energia cinetica e resta da assegnare $-\Delta W/2$. Il fatto è che si muove anche la carica indotta, addensandosi in prossimità dell'origine. per fare questo occorre spendere il lavoro L_i e chi lo fornisce è la diminuzione di energia elettrostatica.

Con i nostri dati $W(x_1) = -4.5$ KeV, $W(x_2) = -9$ KeV, $-\Delta W = 4.5$ KeV, $\Delta T = 2.25$ KeV, come abbiamo calcolato, $L_i = 2.25$ KeV.

2.25. ***Tre cariche puntiformi positive sono poste ai vertici del triangolo equilatero ABC di lato a; tre cariche puntiformi negative sono poste ai vertici dell'altro triangolo DEF; nell'insieme le cariche si trovano ai vertici di un esagono regolare. Calcolare l'energia elettrostatica del sistema e il lavoro che si deve spendere per separare i due triangoli portandoli a distanza infinita uno dall'altro. Tutte le cariche sono eguali in modulo a $q = 10^{-10}$ C e $a = 10$ cm.***



AC = CB = BA = a
DE = EF = FD = a
AD = $l = a/\sqrt{3}$
AF = EC = BD = $2a/\sqrt{3}$

Essendo l'energia elettrostatica data da una somma, la spezziamo in tre parti, una relativa alle tre cariche positive, una alle tre cariche negative e una ai termini incrociati. Per un singolo triangolo di lato a

$$W_I = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = 2.7 \cdot 10^{-9} \text{ J} .$$

Il calcolo è un po' più lungo per i termini incrociati:

$$W_{AE} = W_{AD} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} , \quad W_{AF} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 2l} .$$

In totale, per la carica in A, $W_A = -\frac{5}{2}\, 3^{1/2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$; il risultato è eguale per W_B e W_C per cui l'energia elettrostatica delle tre cariche positive nel campo di quelle negative, ovvero l'energia mutua dei due triangoli, è

$$W_2 = -\frac{15}{2}\, 3^{1/2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -11.7 \cdot 10^{-9} \text{ J}.$$

L'energia elettrostatica di tutto il sistema vale

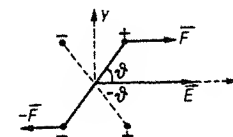
$$W = 2W_1 + W_2 = 5.4 \cdot 10^{-9} - 11.7 \cdot 10^{-9} = -6.3 \cdot 10^{-9} \text{ J} .$$

Quando si allontanano indifinitamente i triangoli l'energia del sistema è semplicemente $2W_I$; si è persa W_2, l'energia mutua. L'energia finale risulta maggiore di quella iniziale, il che vuol dire che è stato compiuto lavoro dall'esterno per separare i triangoli, come è ovvio essendo la forza tra di essi attrattiva; ed è $L_{est} = -W_2$.

2.26. ***Calcolare la forza e il momento della forza agenti su un dipolo di momento* p *posto in un campo* E.**

L'energia elettrostatica posseduta dal dipolo si scrive secondo la (2.10) $W = -pE\cos\theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ essendo θ l'angolo tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{p}$. Supponiamo che il campo elettrico sia uniforme: la risultante delle forze agenti sul dipolo ($+q\mathbf{E}$ e $-q\mathbf{E}$) è nulla e il dipolo, posto in un punto del campo, vi resta; c'è equilibrio traslazionale indifferente. Invece per quel che riguarda le rotazioni ci sono due posizioni di equilibrio, una stabile per $\theta = 0$ ($W_{min} = -pE$) e una instabile per $\theta = \pi$ ($W_{max} = pE$). Spostato angolarmente di un angolo θ dalla posizione di equilibrio il dipolo risente di un momento $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, come si capisce dalla figura: la coppia di forze ha momento $M = qEa$ sen $\theta = pE$ sen θ in modulo, diretto verso il foglio. Nel sistema di riferimento della figura $\mathbf{M} = -M\mathbf{u}_z = -pE \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{u}_z$; l'espressione resta valida anche nella posizione tratteggiata, dove l'angolo è negativo. Il segno meno significa che il momento di dipolo è un momento di richiamo, tendente a portare $\mathbf{p}$ parallelo e concorde a $\mathbf{E}$ (è come il segno meno della forza elastica $-Kx$ o del momento elastico $-K\theta$). Si noti che il momento calcolato per derivazione secondo la (2.12) risulta appunto $-pE\operatorname{sen}\theta$ A causa di questo momento il dipolo (di momento d'inerzia I) ruota attorno alla posizione di equilibrio obbedendo all'equazione

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + pE\operatorname{sen}\theta = 0 \quad .$$



Per piccole oscillazioni questa si riduce all'equazione del moto armonico che ha la soluzione $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$ con $\omega^2 = pE/I$ e $T = 2\pi/\omega = 2\pi (I/pE)^{1/2}$.

Se il campo elettrico non è uniforme oltre al momento c'è una forza risultante non nulla che tende a portare il dipolo nei punti dove il campo è più intenso. Essa risulta dalla diversità delle forze sulle cariche del dipolo, dovuta alla non uniformità del campo. Tali forze si possono scrivere

$$-q\mathbf{E} \quad , \quad q(\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}) = q\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\Delta x + q\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y}\Delta y + q\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}\Delta z$$

e la risultante e le sue componenti valgono

$$\mathbf{F} = p_x\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$$

$$F_x = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_x}{\partial z} = \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad} E_x$$

$$F_y = p_x\frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad} E_y$$

$$F_z = p_x\frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_z}{\partial z} = \mathbf{p} \cdot \operatorname{grad} E_z \quad .$$

2.27. *Calcolare l'energia elettrostatica di due dipoli di momenti* $\mathbf{p}_1$ *e* $\mathbf{p}_2$ *posti a distanza mutua r. In particolare si consideri il caso in cui* $\mathbf{p}_1$ *e* $\mathbf{p}_2$ *siano complanari e il secondo dipolo sia nella prima o nella seconda posizione principale di Gauss rispetto al primo, con* $\mathbf{p}_2$ *parallelo o ortogonale a* $\mathbf{p}_1$*; nelle varie possibilità che si presentano calcolare l'energia mutua. Applicare i risultati a due molecole d'acqua* ($p = 6.17 \cdot 10^{-30}$ Cm) *distanti* $r = 3.1 \cdot 10^{-10}$ m.

Nel problema 1.18 abbiamo trovato per il campo di un dipolo di momento $\mathbf{p}_1$:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{2p_1 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\mathbf{u}_r + \frac{p_1 \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\mathbf{u}_\theta \quad ;$$

dalla figura risulta $\mathbf{p}_1 = p_1 \cos\theta\, \mathbf{u}_r - p_1 \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{u}_\theta$. Sommando e sottraendo a $\mathbf{E}_1$ il vettore $(p_1 \cos\theta / 4\pi\varepsilon_0 r^3)\mathbf{u}_r$ otteniamo

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,(3p_1 \cos\theta\, \mathbf{u}_r - \mathbf{p}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,[3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r)\,\mathbf{u}_r - \mathbf{p}_1] \quad .$$

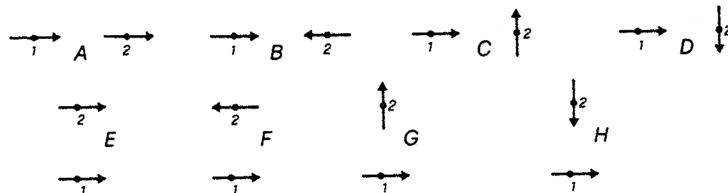
L'energia elettrostatica del secondo dipolo nel campo del primo è

$$W = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,[\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_r)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_r)] \quad .$$

I termini tra parentesi sono $p_1 \cos\theta_1$ e $p_2 \cos\theta_2$; se poi i dipoli sono con i momenti complanari $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$. Con queste sostituzioni si arriva a

$$W = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,(\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2) \quad .$$

In figura sono rappresentati i casi richiesti; la distanza 1-2 è sempre r:



In tabella sono dati i valori dell'energia mutua con $W_0 = p_1 p_2 / 4\pi\varepsilon_0 r^3 = 1.15 \cdot 10^{-20}$ J = 0.07 eV.

Utilizzando le formule del problema 2.26 si potrebbe calcolare la forza di interazione tra i dipoli, esprimendo il campo in componenti cartesiane anziché polari. Qui diciamo solo che nei casi A e F la forza è attrattiva, nei casi B e E repulsiva; nei casi C e D la forza sentita dal secondo dipolo è parallela a $\mathbf{p}_2$,

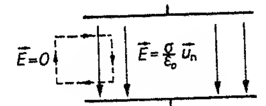
	ϑ_1	ϑ_2	$\operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2 - 2\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2$	W	W_{H_2O}
A	0	0	−2	$-2W_0$	−0.14 eV
B	0	π	2	W_0	0.14 eV
C	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0
D	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	0
E	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	1	W_0	0.07 eV
F	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	−1	$-W_0$	−0.07 eV
G	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0
H	$-\frac{\pi}{2}$	π	0	0	0

nei casi G e H è ortogonale a $\mathbf{p}_2$ (e viceversa per la forza sentita dal primo dipolo).

* * *

NOTA

La configurazione del campo di un condensatore piano ideale non è realizzabile proprio in base alle leggi fondamentali dell'elettrostatica. Infatti l'integrale di linea $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ esteso a una linea chiusa generica contenuta parzialmente entro il condensatore dà risultato diverso da zero mentre deve essere sempre nullo; in figura è mostrato un esempio. Nella realtà il campo uniforme è realizzato solo nella zona centrale del condensatore mentre verso la periferia le linee di campo sono curve e sul bordo escono dal condensatore e interessano anche le facce esterne delle armature.



Ciò non toglie che per calcoli approssimati e per capire alcune situazioni fisiche la configurazione *condensatore piano ideale* sia molto utile; ce ne siamo serviti in questo capitolo e altrettanto faremo nel prossimo. Anzi con la dicitura condensatore piano intendiamo sempre il caso ideale, trascurando gli effetti di bordo senza neppure dirlo. Analoghe considerazioni valgono per il condensatore cilindrico.

ELETTROSTATICA IN PRESENZA DI MATERIALI DIELETTRICI

3a. Un corpo dielettrico posto in un campo elettrico si polarizza acquistando un momento di dipolo elettrico per unità di volume, detto *polarizzazione* **P**. Si dimostra che il campo elettrico indotto dovuto a questa distribuzione di dipoli equivale al campo di una carica distribuita con densità superficiale σ_p sulla superficie del corpo e con densità di volume ϱ_p all'interno del corpo, ricavabili da **P**:

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = P_n \quad , \quad \varrho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad ; \tag{3.1}$$

$\mathbf{u}_n$ è il versore della normale alla superficie. La polarizzazione **P** è funzione del campo esistente all'interno del dielettrico. Nei problemi considereremo solo dielettrici lineari, nei quali **P** è proporzionale al campo; ciò avviene in generale nei gas, liquidi, solidi amorfi o a reticolo cristallino cubico (sostanze isotrope). La relazione di proporzionalità si scrive

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad . \tag{3.2}$$

La grandezza χ si chiama *suscettività dielettrica*; essa è caratteristica dei vari dielettrici e in uno stesso dielettrico può essere variabile da punto a punto.

Il campo elettrostatico, in presenza di dielettrici, si calcola a partire dalle cariche libere e dalle cariche di polarizzazione. Le equazioni di Maxwell sono

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\varrho + \varrho_P) \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad . \tag{3.3}$$

Sfruttando la seconda delle (3.1) si definisce il vettore *induzione dielettrica*

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.4}$$

il quale obbedisce all'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \tag{3.5}$$

ove compaiono solo le cariche libere. In termini integrali la circuitazione di **E** è nulla e *il flusso di* **D** *attraverso una superficie chiusa è eguale alla carica libera contenuta dentro la superficie.*

Nei dielettrici lineari, in base a (3.2) e (3.4) sussistono le relazioni

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \varepsilon_0 \varkappa \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad , \tag{3.6}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varkappa \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0 \chi} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \mathbf{P} \quad ; \tag{3.7}$$

$\varkappa = 1 + \chi$ si chiama *costante dielettrica relativa* e $\varepsilon = \varkappa \varepsilon_0$ si chiama *costante dielettrica assoluta*.

Se il dielettrico, oltre ad essere lineare, è omogeneo, cioè con densità costante, χ, $\varkappa$, ε sono costanti in tutto il dielettrico. Allora la divergenza di **P**, secondo (3.7) e (3.5), risulta nulla non essendoci all'interno del dielettrico cariche libere; di conseguenza, per la (3.1), nei dielettrici omogenei la carica di polarizzazione è distribuita solo sulla superficie esterna. Ciò avviene anche quando **P** è uniforme; questo però è un caso relativamente ristretto: per esempio si dimostra che solo corpi isotropi, omogenei e di forma ellisoidale, in particolare sferica, acquistano una polarizzazione uniforme se posti in un campo uniforme.

I dielettrici dei problemi saranno solo omogenei e isotropi, a meno di alcuni casi esplicitamente evidenziati. Inoltre assumeremo **P** uniforme in lastre dielettriche poste parallelamente alle armature di un condensatore piano, trascurando le distorsioni del campo dovute agli effetti di bordo.

Nel passaggio da un dielettrico ad un altro il campo e l'induzione dielettrica subiscono una discontinuità. Precisamente, se sulla superficie di separazione non ci sono cariche libere, allora

$$\varkappa_1 E_{1n} = \varkappa_2 E_{2n} \quad , \quad E_{1t} = E_{2t} \quad , \quad D_{1n} = D_{2n} \quad , \quad \varkappa_2 D_{1t} = \varkappa_1 D_{2t} \tag{3.8}$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono ai due mezzi mentre quelli n e t indicano le componenti normali e tangenziali alla superficie di separazione.

3b. Un condensatore, in cui lo spazio tra le armature sia riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\varkappa$, presenta una capacità

$$C = \varkappa C_0 \quad , \tag{3.9}$$

$\varkappa$ volte maggiore della capacità che avrebbe se il dielettrico fosse il vuoto (è sempre $\chi > 0$, $\varkappa > 1$).

L'energia elettrostatica in presenza di dielettrici si calcola a partire dalla densità di energia

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \Rightarrow \text{mezzi lineari} \Rightarrow w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon} \ . \tag{3.10}$$

Queste espressioni sono valide solo se $\varkappa$ non dipende dalla temperatura.

3c. Il momento di dipolo medio **p** degli atomi o delle molecole di un dielettrico sottoposto a un campo elettrico si assume, per campi non troppo intensi, proporzionale al campo elettrico che effettivamente agisce sull'atomo o sulla molecola:

$$\mathbf{p} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E} \ . \tag{3.11}$$

La costante α si dice *polarizzabilità del dielettrico*. Per molti dielettrici privi di momento elettrico intrinseco la relazione tra costante dielettrica relativa e polarizzabilità è data dall'*equazione di Clausius-Mossotti*:

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 2} = \frac{n\alpha_e}{3} \qquad \text{oppure} \qquad \varkappa - 1 = \frac{n\alpha_e}{1 - \frac{n\alpha_e}{3}} \tag{3.12}$$

essendo n il numero di dipoli per unità di volume. Per i gas, nei quali normalmente $\varkappa$ è circa eguale a 1, si può scrivere $\varkappa - 1 = n\alpha_e$.

Per i dielettrici polari, dotati cioè di momento elettrico intrinseco p_0, α è data dalla *teoria di Debye*, per campi non troppo elevati e temperature non troppo basse, come

$$\alpha_p = \frac{p_0^2}{3 \varepsilon_0 KT} \quad ; \tag{3.13}$$

K è la *costante di Boltzmann*, $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K e T la temperatura assoluta.

Questa relazione è valida solo se il dipolo elementare è praticamente libero ovvero non risente che debolmente dell'interazione con gli altri dipoli che lo circondano, come succede nei gas a pressione ordinaria e nei vapori (p.e. vapor d'acqua).

Esistono alcune sostanze che presentano entrambi i meccanismi di polarizzazione e per le quali si trova sperimentalmente che è verificata la relazione

$$\frac{3}{n} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 2} = \alpha_e + \alpha_p = \alpha_e + \frac{p_0^2}{3 \varepsilon_0 KT} \quad : \tag{3.14}$$

la polarizzabilità è data dalla somma dei due effetti, il che equivale a dire che i due meccanismi sono indipendenti.

Se non è possibile trascurare l'interazione tra i dipoli relazioni come (3.13) e (3.14) non valgono più; tipico è il caso dell'acqua.

3d. Le dimensioni delle grandezze introdotte in questo capitolo sono:

polarizzazione	coulomb/m^2
induzione dielettrica	coulomb/m^2
suscettività dielettrica	numero puro
costante dielettrica relativa	numero puro
costante dielettrica assoluta	farad/m
polarizzabilità	$p/\varepsilon_0 E = \dfrac{\text{coulomb m}}{\text{farad volt m}^{-2}} = \text{m}^3$

* * *

3.1. *Un condensatore piano (Σ, h, C_0) ha come dielettrico il vuoto. Esso viene caricato connettendolo a un generatore V_0 e poi isolandolo. Successivamente lo spazio tra le armature viene riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\varkappa$. Determinare la variazione dello stato elettrico del sistema e ripetere il calcolo se invece il generatore resta sempre connesso.*

Nello stato iniziale abbiamo questa situazione:

$$q_0 = C_0 V_0 \quad , \quad \sigma_0 = \frac{q_0}{\Sigma} \quad , \quad E_0 = \frac{V_0}{h} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad ,$$

$$\sigma_p = 0 \quad , \quad \mathbf{P} = 0 \quad , \quad \mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad .$$

Introdotto il dielettrico la capacità aumenta di un fattore $\varkappa$; la carica libera sulle armature rimane costante per cui deve diminuire la d.d.p., e con essa il campo elettrico, di un fattore $\varkappa$:

$$V = \frac{q_0}{C} = \frac{q_0}{\varkappa C_0} = \frac{V_0}{\varkappa} \quad , \quad E = \frac{V}{h} = \frac{V_0}{\varkappa h} = \frac{E_0}{\varkappa} \quad .$$

Questa diminuzione è dovuta alla comparsa delle cariche di polarizzazione sulle facce del dielettrico che toccano le armature del condensatore. Il vettore polarizzazione si scrive

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \mathbf{E}_0 \quad ,$$

parallelo e concorde a $\mathbf{E}_0$, in modulo pari a $\dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\sigma_0$, quindi uniforme nel condensatore. In base a (3.1) $\varrho_p = 0$ e la carica di polarizzazione è distribuita uniformemente sulle due facce del dielettrico con densità

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = \pm \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \sigma_0 \quad ,$$

inferiore in modulo a σ_0. L'induzione dielettrica è

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \frac{\mathbf{E}_0}{\varkappa} + \varepsilon_0 \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \mathbf{E}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0 \quad ;$$

essa resta invariata in quanto le cariche libere sono rimaste costanti. Nella figura sono rappresentati i vari vettori e le cariche con i relativi segni. **P** è diretto correttamente dalle cariche di polarizzazione negative a quelle positive, essendo un momento di dipolo per unità di volume.

La densità di energia passa dal valore $w_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$ al valore $w = \frac{1}{2}\, ED = \frac{1}{2} \frac{E_0}{\varkappa}\, \varepsilon_0 E_0 = \frac{w_0}{\varkappa}$. L'energia scomparsa va in lavoro di polarizzazione del mezzo (vedi problema 3.22).

Se la d.d.p. resta invece costante al valore V_0 la carica libera sulle armature aumenta: $q = CV_0 = \varkappa C_0 V_0 = \varkappa q_0$ (e $\sigma = \varkappa \sigma_0$). Il campo elettrico resta costante al valore $E_0 = V_0/h$, l'induzione dielettrica aumenta, $D = \varkappa \varepsilon_0 E = \varkappa \varepsilon_0 E_0 = \varkappa D_0$, la densità di energia aumenta di conseguenza di un fattore $\varkappa$.

La polarizzazione vale $P = \varepsilon_0 (\varkappa - 1) E_0$ e la densità di carica di polarizzazione è

$$\sigma_p = P = \varepsilon_0 (\varkappa - 1) E_0 = (\varkappa - 1)\, \sigma_0 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\, \sigma \quad ;$$

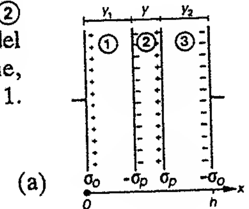
resta ovviamente invariata la sua relazione con la densità di carica libera.

Qualitativamente vale ancora la figura di prima, cambiano i valori numerici delle grandezze. La connessione continua al generatore fa sì che questo fornisca la carica supplementare $\Delta q = q - q_0 = (\varkappa - 1)\, q_0$; ciò porta con sé un aumento della carica di polarizzazione, ma le relazioni sono tali che ai fini del campo elettrico le variazioni si compensano e questo resta costante. Anche l'aumento di energia elettrostatica e il lavoro di polarizzazione avvengono a spese del generatore.

Osserviamo infine che, precisato il modo in cui avviene il processo, la conoscenza di $\varkappa$ è sufficiente per descrivere lo stato elettrico finale.

3.2. *Tra le armature di un condensatore piano (Σ, $h = 1$ cm) e parallelamente ad esse viene introdotta una lastra di materiale dielettrico (Σ, $y = 5$ mm, $\varkappa = 5$). Calcolare il rapporto tra le capacità del condensatore dopo e prima dell'inserzione.*

Calcoliamo la capacità come rapporto tra carica e d.d.p.; ci occorre allora il campo elettrico. Applichiamo il principio di sovrapposizione e quanto sappiamo sul campo prodotto da una distribuzione piana uniforme indefinita. La coppia (σ_0, $-\sigma_0$) produce dentro il condensatore il campo $\mathbf{E}_0 = \sigma_0/\varepsilon_0\, \mathbf{u}_x$, la coppia ($\sigma_p$, $-\sigma_p$) il campo $-\sigma_p/\varepsilon_0\, \mathbf{u}_x$ soltanto nella regione ②. Pertanto in ① e in ③ abbiamo $\mathbf{E}_0$, in ② $\mathbf{E} = (\sigma_0 - \sigma_p)/\varepsilon_0\, \mathbf{u}_x$. D'altra parte, per la discontinuità del campo nell'attraversare una superficie di separazione, $E_0 = \varkappa E$ secondo la (3.8) in quanto nel vuoto $\varkappa = 1$. Quindi



$$E = \frac{E_0}{\varkappa} \quad , \quad \sigma_p = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\, \sigma_0 \quad . \qquad \text{(a)}$$

Il campo nel dielettrico è inferiore al campo nel vuoto e la densità di carica di polarizzazione è data dalla solita relazione. Noto il campo, la d.d.p. vale

$$V_1 - V_2 = E_0 y_1 + Ey + E_0 y_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\,(h - y) + \frac{\sigma_0}{\varkappa \varepsilon_0}\, y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left(h - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\, y \right) .$$

La capacità ha dunque il valore

$$C = \frac{\sigma_0 \Sigma}{V_I - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h - \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa} y} > C_0 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{C_0} = \frac{h}{h - \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa} y} .$$

Il rapporto tra le capacità è sempre maggiore di 1 e cresce con y fino a valere $\varkappa$ per $y = h$. Nel caso numerico proposto $C/C_0 = 5/3$.

Abbiamo incontrato una situazione analoga nel problema 2.10: dopo l'inserzione di una lastra metallica di spessore x la capacità del condensatore diventa $C = \varepsilon_0 \Sigma/(h - x)$. Se a parità di Σ e h vogliamo vedere che spessore y di dielettrico produce lo stesso aumento di capacità troviamo $y = \varkappa x/(\varkappa - 1) > x$. Per piccoli valori di $\varkappa$ la differenza può essere sensibile mentre per $\varkappa \gg 1$ $y = x$.

Notiamo che si arriva alla stessa espressione di C considerando il sistema come tre condensatori in serie:

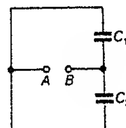
$$\frac{1}{C} = \frac{y_I}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{y}{\varkappa \varepsilon_0 \Sigma} + \frac{y_2}{\varepsilon_0 \Sigma} = \frac{h - y}{\varepsilon_0 \Sigma} + \frac{y}{\varkappa \varepsilon_0 \Sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0 \Sigma} \left(h - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} y \right) .$$

In realtà il primo e il terzo condensatore di questa serie sarebbero costituiti da una armatura conduttrice e una dielettrica con cariche diverse, ma si può immaginare una sottilissima lamina conduttrice al potenziale giusto, da una parte e dall'altra della lastra dielettrica; ciò non altera la distribuzione di cariche e riconduce il sistema a un caso molto semplice. Conviene calcolare in questo secondo modo la capacità di sistemi anche più complicati senza dover ripetere ogni volta i ragionamenti fatti all'inizio di questo problema.

3.3. ***Due condensatori C_1 e C_2 sono collegati come in figura. Il condensatore C_2 ha capacità 10^{-9} F, mentre C_I è un condensatore piano ($\Sigma = 600$ cm^2, $h = 3$ mm) avente l'aria per dielettrico. Un generatore ($V_0 = 400$V) è inizialmente collegato tra i punti A e B per caricare i condensatori e poi staccato. Successivamente lo spazio tra le armature di C_I viene riempito con acqua distillata ($\varkappa = 80$). Calcolare la variazione di carica di C_1, la variazione della d.d.p. ai capi di C_2, il lavoro fatto dalle forze del campo nel processo di riempimento.***

La capacità C_1 vale $\varepsilon_0 \Sigma/h = 1.77 \cdot 10^{-10}$ F e le cariche dei due condensatori $q_1 = C_1 V_0 = 70.8 \cdot 10^{-9}$ C, $q_2 = C_2 V_0 = 400 \cdot 10^{-9}$ C; dopo il riempimento $C'_I = \varkappa C_1 = 14.16 \cdot 10^{-9}$ F. I due condensatori sono in parallelo e la d.d.p. ai loro capi è la stessa; mettendo l'acqua essa cambia e valgono le relazioni

$$\frac{q'_1}{C'_1} = \frac{q'_2}{C_2} \quad , \quad q'_I + q'_2 = q_1 + q_2 = 470.8 \cdot 10^{-9} \text{ C}.$$



Risolvendo $q'_I = 439.7 \cdot 10^{-9}$ C , $q''_2 = 31.1 \cdot 10^{-9}$ C ,

$$V = \frac{q'_2}{C_2} = 31\ 1 \text{ V} .$$

Le variazioni richieste sono

$$\Delta q_1 = q'_1 - q_1 = 368.9 \cdot 10^{-9} \text{ C} \quad , \quad \Delta V_2 = V - V_0 = -368.9 \text{ V} .$$

Infine il lavoro si ottiene come variazione dell'energia elettrostatica:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} (C'_1 + C) V^2 - \frac{1}{2} (C_I + C_2) V_0^2 = 73.3 \cdot 10^{-7} - 941.2 \cdot 10^{-7}$$

$$= -868.3 \cdot 10^{-7} \text{ J} \quad , \quad L = -\Delta W = 868.3 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

3.4. ***Un sistema costituito da due condensatori piani uguali, connessi in serie, ciascuno di capacità $C = 10^{-10}$F, viene caricato connettendolo ad un generatore ($V_0 = 500$V) e poi isolato. Successivamente uno dei condensatori viene riempito completamente con una lastra dielettrica ($\varkappa = 3$). Calcolare i valori della d.d.p. ai capi dei due condensatori alla fine, il lavoro fatto dalle forze del campo nel processo di riempimento, la carica di polarizzazione che compare sulle superficie della lastra.***

Inizialmente la capacità totale del sistema vale $C/2 = 0.5 \cdot 10^{-10}$F, la carica sulle armature di ciascun condensatore è $q = V_0 C/2 = 2.5 \cdot 10^{-8}$C e la d.d.p. è $V_1 = V_2 = V_0/2 = 250$V.

Dopo l'inserimento del dielettrico (p.e. nel secondo condensatore)

$$V'_1 = \frac{q}{C} V_1 = 250\text{V} \quad , \quad V'_2 = \frac{q}{\varkappa C} = 83.3 V .$$

Il lavoro fatto dalle forze di campo risulta dalla variazione di energia elettrostatica nel secondo condensatore (nel primo non varia nulla):

$$L = -\Delta W_2 = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2 \varkappa C} = \frac{q^2}{2C} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{J} .$$

La carica di polarizzazione sulle superficie della lastra, in base alla (a) del problema 3.2, vale:

$$q_p = \sigma_p \Sigma = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \sigma_0 \Sigma = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} q = 1.67 \cdot 10^{-8} \text{C} .$$

3.5. ***Un condensatore piano ha le armature quadrate, di lato $l = 50$ cm, distanti $h = 2$ cm, e viene caricato con un generatore ($V_0 = 10^3$ V). Un blocco di dielettrico ($\varkappa = 5$) a forma di parallelepipedo con basi quadrate di lato l e altezza h può scorrere senza attrito tra le armature del condensatore. Calcolare, a carica costante e a potenziale costante, la forza F che agisce sul***

blocco quando esso è entrato per metà e il lavoro che tale forza compie per fare entrare completamente il blocco nel condensatore.

Cominciamo col processo a carica costante e sia q_0 la carica del condensatore. Quando il blocco è inserito per una lunghezza x il sistema può essere assimilato a due condensatori in parallelo:

$$C_1 = \frac{\varkappa \varepsilon_0 l x}{h} \ , \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 l (l - x)}{h} \ , \quad C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 l}{h} [l + (\varkappa - 1)x] \ .$$

L'energia elettrostatica del condensatore è

$$W(x) = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2 h}{2\varepsilon_0 l} \frac{1}{l + (\varkappa - 1)x}$$

e la forza (attrattiva) esercitata sul blocco è

$$F = -\frac{dW}{dx} = \frac{q_0^2 h}{2\,\varepsilon_0 l} \frac{\varkappa - 1}{[l + (\varkappa - 1)x]^2}$$

Dal momento che il campo elettrico $E(x)$ tra le armature del condensatore è dato da

$$E(x) = \frac{V(x)}{h} = \frac{Q}{hC} = \frac{Q}{\varepsilon_0 l [l + (\varkappa) x]} \ ,$$

detta $\Sigma = lh$ la sezione della faccia della lastra su cui agisce F, possiamo scrivere

$$F(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varkappa - 1) E^2(x) \Sigma \ .$$

Il lavoro si ottiene integrando su tutto il processo

$$L = \int_0^l F dx = \frac{q_0^2 h}{2\,\varepsilon_0 l} \left[\frac{1}{l + (\varkappa - 1)x} \right]_l^0 = \frac{q_0^2 h}{2\,\varepsilon_0 l^2} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$$

ed è eguale a $-\Delta W$, come si verifica facilmente. Man mano che entra il blocco acquista un'energia cinetica eguale al lavoro, cioè alla diminuzione di energia elettrostatica; T è massima quando il blocco è completamente inserito; se non viene fermato, esso prosegue il suo moto, decelerando e cedendo energia al condensatore.

Numericamente $C_0 = 1.11 \cdot 10^{-10}$ F, $q_0 = C_0 V_0 = 1.11 \cdot 10^{-7}$ C, $F(x = 0.25) = 4.94 \cdot 10^{-5}$ N, $L = 4.45 \cdot 10^{-5}$ J.

A potenziale costante, cioè mantenendo connesso il generatore, conviene usare per l'energia elettrostatica l'espressione

$$W(x) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 l}{h} [l + (\varkappa - 1)x] V_0^2 \ .$$

L'incremento, per un avanzamento del blocco di dx, è positivo:

$$dW = \frac{\varepsilon_0 l V_0^2}{2h} (\varkappa - 1)\, dx \ ,$$

e d'altra parte l'energia cinetica del blocco aumenta. Come abbiamo visto nel problema 2.10 è il generatore che fornisce lavoro consentendo sia l'aumento di energia elettrostatica che quello di energia cinetica:

$$dL_{\text{gen}} = V_0 dq = V_0^2 dC = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h} (\varkappa - 1)\, dx = 2\, dW \ ,$$

per cui il lavoro elementare per fare avanzare di dx il blocco è $dL = dW$. La forza vale

$$F = \frac{dW}{dx} = \frac{\varepsilon_0 l V_0^2}{2h} (\varkappa - 1) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varkappa - 1) E^2 \Sigma \ ,$$

formalmente eguale alla $F(x)$ ottenuta nel caso precedente. Ora però il campo **E** non dipende dalla posizione della lastra e così **F**. Il lavoro complessivo è

$$L = Fl = \frac{\varepsilon_0 l^2}{2h} V_0^2 (\varkappa - 1) = \Delta W$$

A parità di condizioni iniziali $L_{V=\text{cost}} = \varkappa L_{Q=\text{cost}}$. In numeri

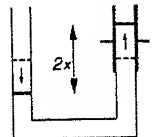
$$F = 44.4 \cdot 10^{-5} \text{ N} \quad , \quad L = 22.2 \cdot 10^{-5} \text{ J} \ .$$

Il generatore fornisce in tutto $L_{\text{gen}} = 44.4 \cdot 10^{-5}$ J .

3.6. ***Lo spazio tra le armature di un condensatore piano ($h = 2$ mm) è parzialmente riempito da un liquido ($\varkappa = 28$) di densità $\varrho = 0.8$ g/cm^3. Calcolare di quanto si alza il liquido se si collegano le armature a un generatore ($V_0 = 2 \cdot 10^3$ V).***

Per la forza agente sul dielettrico liquido usiamo l'espressione calcolata nel problema 3.5:

$$F = \frac{\varepsilon_0 l}{2h} (\varkappa - 1) V_0^2 \ ,$$

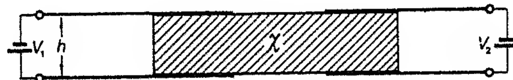


essendo l la dimensione ortogonale al disegno. A questa forza fa equilibrio la forza peso della massa di liquido spostata, $mg = \varrho h l 2 x g$:

$$x = \frac{\varepsilon_0 (\varkappa - 1) V_0^2}{4 \varrho g h^2} = 7.62 \text{ mm.}$$

Lasciamo come esercizio la verifica che si arriva alla stessa relazione collegando tra loro l'aumento di energia elettrostatica e il lavoro compiuto sul liquido.

3.7. *Due condensatori piani eguali, aventi le armature quadrate di lato $l = 50$ cm e distanti $h = 5$ mm, sono connessi a due generatori ($V_1 = 500$ V e $V_2 = 1000$ V). Una lastra di materiale dielettrico ($\chi = 3$, $\varrho = 1$ g/cm^3) di dimensioni (50 · 50 · 0.5) cm^3 può scorrere senza attrito tra i due condensatori, mantenendo sempre un estremo dentro un condensatore e uno dentro l'altro. Calcolare in quale verso avviene il moto della lastra e il tempo che essa impiega per percorrere un tratto $x = 4$ cm, se al tempo $t = 0$ è ferma. Determinare inoltre la densità di carica di polarizzazione presente sulla lastra, specificando dove è localizzata.*



La forza con cui la lastra è attirata dentro uno dei condensatori è $F = \varepsilon_0 \chi l V_0^2/2h$ per cui la risultante è

$$F_2 - F_1 = \frac{\varepsilon_0 \chi l}{2h}(V_2^2 - V_1^2) = 9.96 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad .$$

La lastra si muove entrando di più nel condensatore di destra con accelerazione

$$a = \frac{F_2 - F_1}{m} = \frac{F_2 - F_1}{l^2 h \varrho} = 7.97 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ .$$

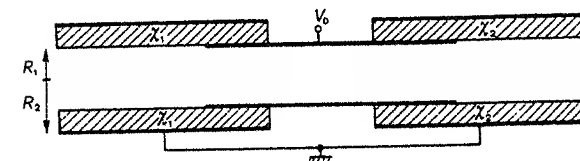
Siccome $x = \frac{1}{2}at^2$, $t = \left(\frac{2x}{a}\right)^{1/2} = 10$ s.

Le cariche di polarizzazione compaiono su quelle porzioni di facce della lastra che sono dentro i condensatori, con densità

$$\sigma_{p1} = \varepsilon_0 \chi E_1 = \varepsilon_0 \chi \frac{V_1}{h} = 2.66 \cdot 10^{-6} \ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad ,$$

$$\sigma_{p2} = \varepsilon_0 \chi E_2 = \varepsilon_0 \chi \frac{V_2}{h} = 5.32 \cdot 10^{-6} \ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad .$$

3.8. *Due condensatori cilindrici ($R_1 = 3$ cm, $R_2 = 9$ cm), riempiti da dielettrici aventi suscettività χ_1 e χ_2, con $\chi_1 > \chi_2$, sono a capacità variabile. Infatti l'armatura interna, di massa $m = 2.46$ kg, è comune ed è libera di muoversi senza attrito lungo l'asse; il moto avviene sempre in modo che le estremità dell'armatura siano dentro i condensatori. Quando il sistema viene collegato a un generatore ($V_0 = 4 \cdot 10^3$ V) il cilindro interno si mette in moto percorrendo 2.5 cm in 10s. Calcolare in che verso avviene il moto, la suscettività χ_1 se $\chi_2 = 1$, il lavoro fatto dal generatore nei 10 secondi, le polarizzazioni dei due dielettrici per $r = R_1$.*



Chiamando x la lunghezza della parte dell'armatura mobile che è dentro un condensatore, abbiamo per la capacità di quel condensatore:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log\frac{R_2}{R_1}} \varkappa x$$

L'energia elettrostatica è $W = CV_0^2/2$ e la forza $F = dW/dx = (V_0^2/2)\ (dC/dx)$. Pertanto la forza è maggiore dove maggiore è la suscettività: il moto avviene verso il condensatore di sinistra sotto l'azione di

$$F_1 - F_2 = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\log\frac{R_2}{R_1}}(\varkappa_1 - \varkappa_2) = \frac{\pi\varepsilon_0 V_0^2}{\log\frac{R_2}{R_1}}(\chi_1 - \chi_2) = 4.1 \cdot 10^{-4}\ (\chi_1 - \chi_2) \text{ N} \ .$$

Da $x = \frac{1}{2}at^2$, $a = \frac{2x}{t^2} = 5 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ e $ma = 12.3 \cdot 10^{-4}$N Eguagliando

$$\chi_1 - \chi_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \chi_1 = 4 \ .$$

Il lavoro fatto dalle forze nello spostamento x è

$$L = (F_1 - F_2)x = 3.07 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

per cui il lavoro del generatore è il doppio: $L_{gen} = 6.14 \cdot 10^{-5}$ J.

Per calcolare la polarizzazione bisogna conoscere il campo elettrico, che determiniamo in base a (3.5) e (3.6):

teorema di Gauss $2\pi r l D = \sigma_0 2\pi R_1 l \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\sigma_0 R_1}{r}$,

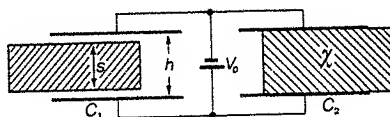
$$\sigma_0 = \frac{q}{2\pi R_1 l} = \frac{CV_0}{2\pi R_1 l} = \frac{\varkappa 2\pi\varepsilon_0 l}{\log\frac{R_2}{R_1}} \frac{V_0}{2\pi R_1 l} = \frac{\varkappa\varepsilon_0 V_0}{R_1 \log\frac{R_2}{R_1}} \ ,$$

$$D = \frac{\varkappa\varepsilon_0 V_0}{r\log\frac{R_2}{R_1}} \quad , \quad E = \frac{D}{\varkappa\varepsilon_0} = \frac{V_0}{r\log\frac{R_2}{R_1}} \ .$$

In particolare $E(R_1) = 1.21 \cdot 10^5$ V/m (eguale in entrambi i condensatori) e:

$$P_1 = \varepsilon_0 \chi_1 E = 4.28 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \quad , \quad P_2 = \varepsilon_0 \chi_2 E = 1.07 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \quad .$$

3.9. *Due condensatori piani eguali C_1 e C_2, con armature quadrate di lato l distanti $h = 1$ cm, di capacità $C_0 = 10^{-9}$ F, sono connessi ad un generatore ($V_0 = 10^3$ V). In C_1 è parzialmente inserita per un tratto x una lastra conduttrice di base l^2 e spessore $s = 6$ mm; in C_2 è parzialmente inserito per un tratto y un blocco di dielettrico di base l^2 e spessore h. Le forze F_1 e F_2 con cui i condensatori C_1 e C_2 attirano rispettivamente la lastra conduttrice e il blocco di dielettrico sono eguali. Calcolare la suscettività χ del dielettrico, il lavoro fatto dal generatore per attirare entrambe le lastre contemporaneamente, le cariche presenti sulle armature di C_1 e C_2 quando le lastre sono completamente inserite, la polarizzazione del dielettrico nella stessa condizione.*



Le capacità dei due condensatori si scrivono, per valori generici di x e y:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 l x}{h-s} + \frac{\varepsilon_0 l(l-x)}{h} \quad , \quad C_2 = \frac{\varkappa \varepsilon_0 l y}{h} + \frac{\varepsilon_0 l(l-y)}{h} \quad .$$

Se le forze sono eguali vuol dire che

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{dy} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{dC_1}{dx} = \frac{dC_2}{dy} \quad , \quad \text{cioè}$$

$$\frac{\varepsilon_0 l}{h-s} - \frac{\varepsilon_0 l}{h} = \frac{\varkappa \varepsilon_0 l}{h} - \frac{\varepsilon_0 l}{h} \quad \Rightarrow$$

$$\varkappa = \frac{h}{h-s} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \chi = \varkappa - 1 = 1.5 \quad .$$

Per il calcolo del lavoro ricorriamo alla variazione di energia elettrostatica:

$$\Delta W_1 = \frac{V_0^2}{2} \Delta C_1 = \frac{\varepsilon_0 l^2 V_0^2}{2} \left(\frac{1}{h-s} - \frac{1}{h} \right) = \frac{\varepsilon_0 l^2 V_0^2}{2h} \frac{s}{h-s} \quad ,$$

$$\Delta W_2 = \frac{V_0^2}{2} \Delta C_2 = \frac{\varepsilon_0 l^2 V_0^2}{2} \chi = \frac{\varepsilon_0 l^2 V_0^2}{2} \frac{s}{h-s} = \Delta W_1$$

in quanto $\chi = \varkappa - 1 = \frac{h}{h-s} - 1 = \frac{s}{h-s}$. Il lavoro sulle lastre è

$$L = \Delta W_1 + \Delta W_2 = 2\Delta W_1 = \frac{\varepsilon_0 l^2 V_0^2}{h} \frac{s}{h-s} = 1.5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J} \quad .$$

Il generatore fornisce in totale $L + \Delta W = 2L = 3 \cdot 10^{-3}$ J .

La carica accumulata in C_1 alla fine del processo è

$$q_1 = V_0 C_1 = V_0 \frac{\varepsilon_0 l^2}{h-s} = V_0 \frac{\varepsilon_0 l^2}{h} \frac{h}{h-s} = V_0 C_0 \frac{h}{h-s} = 2.5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}.$$

Sulle armature di C_2 c'è la carica

$$q_2 = V_0 C_2 = V_0 \varkappa C_0 = V_0 C_0 \frac{h}{h-s} = q_1 = 2.5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \ .$$

Infine la polarizzazione del dielettrico vale

$$P = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 \chi \frac{V_0}{h} = 1.33 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \quad .$$

3.10. *Un condensatore piano ($\Sigma = 100$ cm^2, $h = 0.5$ cm) ha tra le armature una lastra di materiale dielettrico (Σ, $s = 0.2$ cm, $\varkappa$). Esso è carico con una carica $q = 3 \cdot 10^{-7}$ C ed è isolato. Calcolare il lavoro necessario per allontanare le armature di $\Delta h = 0.2$ cm.*

Sappiamo dal problema 3.2 che il sistema può essere trattato come due condensatori in serie, di capacità rispettivamente

$$C_1 = \frac{\varkappa \varepsilon_0 \Sigma}{s} \quad , \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h-s} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varkappa \varepsilon_0 \Sigma}{\varkappa(h-s) + s} \quad .$$

L'energia elettrostatica del condensatore vale, all'inizio e alla fine,

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varkappa \varepsilon_0 \Sigma} [\varkappa(h-s) + s] \quad , \quad W' = \frac{q^2}{2\varkappa \varepsilon_0 \Sigma} [\varkappa(h + \Delta h - s) + s] \quad ,$$

dalle quali si ricava il lavoro ($q = \text{cost}$) come

$$L = -\Delta W = W - W' = -\frac{q^2 \Delta h}{2\varepsilon_0 \Sigma} \quad .$$

Il lavoro delle forze di campo è negativo: infatti per allontanare le armature bisogna fornire dall'esterno lavoro che va in aumento di energia elettrostatica. Il nuovo sistema equivale al vecchio, di energia W, cui sia stato aggiunto un ulteriore condensatore in serie di capacità $C_3 = \varepsilon_0 \Sigma / \Delta h$ avente l'energia $q^2/2C_3 = q^2 \Delta h / 2\varepsilon_0 \Sigma$.

Si può ottenere lo stesso risultato in modo molto più semplice partendo dal fatto che, essendo la carica costante durante il processo, è costante anche

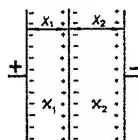
la forza $\sigma^2\Sigma/2\varepsilon_0 = q^2/2\varepsilon_0\Sigma$ che agisce tra le armature, per cui il lavoro è $F\Delta h = q^2\Delta h/2\varepsilon_0\Sigma$. In numeri $L = 1.02 \cdot 10^{-3}$ J.

È da notare che il risultato non dipende da κ. Perché?

3.11. ***Un condensatore piano ha come dielettrico due lastre di materiali diversi, di spessore $x_1 = 4$ mm e $x_2 = 6$ mm e costante dielettrica relativa $\kappa_1 = 5$ e $\kappa_2 = 3$. Calcolare la densità di carica di polarizzazione sulla superficie di separazione tra i due dielettrici se la d.d.p. applicata al condensatore vale $V_0 = 10^3$ V.***

In ciascun dielettrico il campo elettrico è uniforme e ortogonale alle armature; alla superficie di separazione c'è una discontinuità secondo (3.8). Inoltre l'integrale del campo lungo una qualsiasi linea che va dall'armatura positiva a quella negativa è eguale alla d.d.p. tra le due armature. Possiamo quindi scrivere:

$$\kappa_1 E_1 = \kappa_2 E_2 \quad , \quad E_1 x_1 + E_2 x_2 = V_0 \quad ,$$



da cui si ricavano le espressioni dei campi:

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} \quad , \quad E_2 = \frac{\kappa_1 V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} \quad .$$

Le densità di carica di polarizzazione sulle facce dei due dielettrici sono:

$$\sigma_1 = P_1 = \varepsilon_0(\kappa_1 - 1) E_1 \quad , \quad \sigma_2 = \varepsilon_0(\kappa_2 - 1) E_2 \quad ,$$

e sulla superficie di separazione

$$\sigma_p = \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0(\kappa_1 - \kappa_2) V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2}$$

Il segno dipende da κ_1 e κ_2: se $\kappa_1 > \kappa_2$ la carica è positiva. Questo risultato era qualitativamente prevedibile: κ dà l'entità dell'effetto di polarizzazione e quindi, dove κ è maggiore, maggiore è la densità di carica di polarizzazione

Il valore numerico è

$$\sigma_p = 2.53 \cdot 10^{-6} - 2.11 \cdot 10^{-6} = 0.42 \cdot 10^{-6} \ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \ .$$

3.12. ***Un condensatore piano è riempito con due dielettrici (x_1, κ_1, x_2, κ_2); le rigidità dielettriche sono E_{1S}, E_{2S}. Dare l'espressione della massima d.d.p. applicabile al condensatore. Viceversa, fissata la d.d.p. e fissati gli spessori e κ_1, calcolare il massimo valore possibile di κ_2 e della capacità del condensatore. Infine, fissate la d.d.p. e le costanti dielettriche relative, calcolare qual è il minimo spessore possibile per il condensatore.***

La rigidità dielettrica è il valore del campo che provoca la scarica nel dielettrico (in aria secca è $3 \cdot 10^6$ V/m, valori più grandi si hanno nei dielettrici solidi e liquidi). Riprendiamo le formule dei campi ricavate nel problema 3.11:

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} \quad , \quad E_2 = \frac{\kappa_1 V_0}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} \quad .$$

Il campo elettrico è più intenso dove la costante dielettrica relativa è minore, in quanto minore è la carica di polarizzazione i cui effetti si oppongono al campo applicato. Per evitare scariche nei due dielettrici occorre che sia $E_1 < E_{1S}$ e $E_2 < E_{2S}$, il che si traduce nelle diseguaglianze

$$V_0 < (\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2)\,\frac{E_{1S}}{\kappa_2} = V_1 \quad , \quad V_0 < (\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2)\,\frac{E_{2S}}{\kappa_1} = V_2 \quad .$$

Se V_0 è minore del più piccolo dei due valori V_1 e V_2, fissati dalle dimensioni del condensatore e dalle proprietà dei materiali che lo costituiscono, non si ha nessuna scarica. Nell'ipotesi $V_1 < V_2$, quando V_0 supera V_1 si ha una scarica nel primo dielettrico e *tutta la d.d.p. V_0 è applicata al secondo*: bisogna verificare in tal caso che V_0/x_2 sia minore di E_{2S}. Se ciò avviene il secondo dielettrico tiene finché $V_0 < x_2 E_{2S}$, poi si ha scarica. Solo se $\kappa_1 E_{1S} = \kappa_2 E_{2S}$ la d.d.p di scarica è data subito dalla formula $V_0 = E_{1S} x_1 + E_{2S} x_2$.

Nel secondo caso proposto sono fissati V_0, x_1, x_2, κ_1 e si vuole trovare il valore massimo di κ_2. In effetti, al crescere di κ_2 E_2 diminuisce e aumenta E_1: da $E_1 < E_{1S}$ si ha

$$\kappa_2 < \frac{\kappa_1 x_2 E_{1S}}{V_0 - E_{1S} x_1} \quad .$$

Se $V_0 < E_{1S} x_1 = V'$ κ_2 può essere qualunque; infatti V' è la d.d.p. di scarica del primo dielettrico: ora se la d.d.p. applicata è minore di V', per quanto grande sia κ_2 al massimo al primo dielettrico può essere applicata V_0 e quindi non si ha scarica.

La capacità si calcola come al solito sostituendo il condensatore con due in serie:

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \varepsilon_0 \Sigma}{x_1} \quad , \quad C_2 = \frac{\kappa_2 \varepsilon_0 \Sigma}{x_2} \quad , \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 \kappa_1 \kappa_2 \Sigma}{\kappa_2 x_1 + \kappa_1 x_2} \quad .$$

Essa cresce con κ_2 essendo $dC/d\kappa_2$ positiva; il massimo valore si ottiene quando κ_2 è massima. Oltre un certo valore di V_0 non è pertanto possibile aumentare a volontà il valore di una capacità con due dielettrici tenendone uno fisso e sostituendo via via l'altro con un dielettrico a κ maggiore.

Infine nell'ultimo caso sono fissate V_0, κ_1, κ_2 e si chiede il massimo spessore complessivo del condensatore. Cambiamo simboli ponendo $x_1 = x$ e $x_2 = h - x$ se h è lo spessore totale; i campi si scrivono

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V_0}{(\kappa_2 - \kappa_1)x + \kappa_1 h} \quad , \quad E_2 = \frac{\kappa_1 V_0}{(\kappa_2 - \kappa_1)x + \kappa_1 h} \quad .$$

Sia dE_1/dx che dE_2/dx hanno il segno di $\varkappa_1 - \varkappa_2$: se $\varkappa_1$ supera $\varkappa_2$ le derivate sono positive, E_1 cresce con lo spessore, E_2 cresce al diminuire dello spessore (se aumenta x, $d - x$ diminuisce); viceversa se $\varkappa_1 < \varkappa_2$. Il risultato generale è che il campo nel dielettrico a $\varkappa$ maggiore cresce con lo spessore, quello nel dielettrico a $\varkappa$ minore decresce con lo spessore. A limitare il campo di spessori possibili interviene la rigidità dielettrica. Per non avere scariche occorre che

$$x > \frac{\varkappa_2 V_0 - \varkappa_1 E_{1S} h}{(\varkappa_2 - \varkappa_1) E_{1S}} \quad , \quad x > \frac{\varkappa_1 V_0 - \varkappa_1 E_{2S} h}{(\varkappa_2 - \varkappa_1) E_{2S}} \quad ,$$

avendo utilizzato $E_1 < E_{1S}$, $E_2 < E_{2S}$; si sceglie come soluzione il valore maggiore. Solo se $\varkappa_1 E_{1S} = \varkappa_2 E_{2S}$ le due soluzioni sono eguali. Detta la soluzione x_0, quando $x < x_0$ si ha scarica in uno dei due dielettrici e occorre verificare che ciò non provochi scarica anche nell'altro dielettrico. A seconda dei dati è possibile che x debba essere superiore a un numero negativo: questo vuol dire che x può assumere qualunque valore; oppure può risultare $x > h$ e allora non ci sono soluzioni: ci sarà sempre una scarica perché V_0 è troppo grande.

3.13. ***Una sfera conduttrice di raggio $R_0 = 1$ cm è circondata da un involucro sferico di raggio interno R_0 e raggio esterno $R = 5$ cm, con costante dielettrica $\varkappa = 4$. Sulla sfera si trova una carica libera $q = 10^{-8}$ C. Calcolare la densità delle cariche di polarizzazione e l'energia elettrostatica del sistema.***

Calcoliamo la polarizzazione a partire dall'induzione dielettrica con la (3.7) e l'induzione dielettrica con la (3.5), cioè col teorema di Gauss. Questa via è comoda in quanto il flusso di **D** attraverso una superficie chiusa è eguale alla sola carica libera contenuta dentro la superficie:

$$\Phi(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D = q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\,\mathbf{u}_r \qquad (r \geq R_0) \quad .$$

Come sempre, il calcolo è reso semplice dalla simmetria del problema. Da **D** otteniamo **P** e le densità di carica di polarizzazione:

$$\mathbf{P} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\mathbf{D} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{q}{4\pi r^2}\,\mathbf{u}_r \qquad (R_0 \leq r \leq R) \quad ,$$

$$\sigma_p(R_0) = \mathbf{P}(R_0) \cdot \mathbf{u}_n = -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{q}{4\pi R_0^2} = -5.97 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad ,$$

$$\sigma_p(R) = \mathbf{P}(R) \cdot \mathbf{u}_n = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\frac{q}{4\pi R^2} = 0.24 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad .$$

Il versore $\mathbf{u}_n$, uscente dalla superficie del dielettrico, è discorde a $\mathbf{u}_r$ per $r = R_0$ e concorde per $r = R$. Le cariche $q_p(R_0) = 4\pi R_0^2\,\sigma_p(R_0)$ e $q_p(R) = 4\pi R^2\,\sigma_p(R)$ sono eguali in modulo tra loro e pari a $(\varkappa - 1)q/\varkappa$; la prima è negativa, la seconda positiva. La densità spaziale ϱ_p è nulla (il dielettrico è omogeneo).

L'energia elettrostatica si calcola dalla (3.10) spezzando l'integrazione:

$$W = \frac{1}{2\varkappa\varepsilon_0}\int_{R_0}^{R} D^2\,4\pi r^2\,dr + \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_{R}^{\infty} D^2\,4\pi r^2\,dr$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varkappa}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varkappa}\,\frac{(\varkappa - 1)R_0 + R}{R_0 R} = 1.8 \cdot 10^{-5}\ \text{J}.$$

Ponendo $C = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varkappa R_0 R}{(\varkappa - 1)R_0 + R}$ si può scrivere $W = \dfrac{q^2}{2C}$. Notiamo due cose. per $\varkappa = 1$ C coincide con la capacità di una sfera conduttrice; inoltre C è il valore cui tende la capacità di un condensatore sferico con due dielettrici (il primo con costante dielettrica relativa $\varkappa$, il secondo aria) quando il raggio dell'armatura esterna tende all'infinito (lo si verifichi per esercizio).

Senza ricorrere esplicitamente a **D** si può eseguire il calcolo in modo diverso: si determina il campo elettrico per $r > R$, sempre col teorema di Gauss e sfruttando il fatto che globalmente la carica di polarizzazione è nulla:

$\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathbf{u}_r$. Per $r = R$ si ricorre alla discontinuità del campo, deducendo che dentro il dielettrico $\mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varkappa r^2}\,\mathbf{u}_r$; in conclusione $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varkappa - 1)\mathbf{E} = \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa}\,\dfrac{q}{4\pi r^2}\,\mathbf{u}_r$. Noti i campi, si hanno le densità di energia $1/2\,\varkappa\varepsilon_0 E^2$ e $1/2\,\varepsilon_0 E^2$ da cui integrando si calcola l'energia elettrostatica.

3.14. ***Tre conduttori sferici cavi concentrici, di spessore trascurabile, hanno raggi $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 20$ cm, $R_3 = 40$ cm. L'intercapedine compresa tra R_2 e R_3 è interamente riempita di ossigeno liquido ($\chi = 0.5$, massa molare 16 Kg, densità $\varrho = 1.2 \cdot 10^3$ Kg/m^3) e la d.d.p. tra il conduttore più interno e quello esterno vale $V = 600$ V. Calcolare la carica q posseduta dal conduttore più interno, il valore della polarizzazione P in un punto distante $r = 25$ cm dal centro, il valore della componente parallela al campo elettrico del momento di dipolo elettrico dell'ossigeno sempre a distanza r dal centro. Mantenendo il sistema isolato si svuota l'intercapedine tra R_2 e R_3 e si riempie quella tra R_1 e R_2 di ossigeno liquido. Calcolare il lavoro fatto dalle forze del campo in questo processo.***

La d.d.p. tra i conduttori estremi si calcola integrando il campo elettrico, come si è visto più volte; si ottiene

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{q}{4\pi\varkappa\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)=$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{1}{R_2}-\frac{1}{\varkappa R_3}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{20}{3} .$$

Di qui $q=\frac{3}{20}4\pi\varepsilon_0 V=10^{-8}$ C.

Il campo elettrico nell'ossigeno liquido si scrive $E=q/4\pi\varkappa\varepsilon_0 r^2$ e quindi

$$P=\varepsilon_0\chi E=\frac{\chi}{1+\chi}\frac{q}{4\pi r^2}=4.25\cdot 10^{-9}\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \qquad (r=0.25 \text{ m}) .$$

La polarizzazione è il momento di dipolo elettrico per unità di volume; se vogliamo avere il momento (medio) del singolo dipolo dobbiamo calcolare il numero di dipoli per unità di volume. Se il dipolo elementare coincide con la molecola di ossigeno (vedi problema 3.25) possiamo scrivere:

$$\frac{\text{numero di molecole}}{\text{m}^3}=\frac{\text{numero di molecole}}{\text{Kmole}}\frac{\text{Kmoli}}{\text{Kg}}\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}=$$
$$=\text{numero di Avogadro}\frac{\text{densità}}{\text{massa molare}}$$
$$n=\frac{N}{A}\varrho=\frac{6.023\cdot 10^{26}\cdot 1.2\cdot 10^3}{32}=2.26\ 10^{28}\frac{\text{dipoli}}{\text{m}^3} .$$

Il momento di dipolo vale $\frac{P}{n}=1.88\cdot 10^{-37}$ Cm.

Le energie elettrostatiche iniziale e finale sono

$$W_1=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{1}{R_2}-\frac{1}{\varkappa R_3}\right) ,$$
$$W_2=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varkappa R_1}+\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right) ;$$

il lavoro è dato dall'opposto della variazione:

$$L=-\Delta W=W_1-W_2=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{2}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)=3.75\cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

3.15. ***Un piccolo cilindro di materiale dielettrico è posto a distanza $l=2R$ dal centro di una sfera conduttrice di raggio $R=1$ cm; le dimensioni del cilindro sono trascurabili rispetto a R, il suo volume vale $\tau=20$ mm³. Quando la sfera viene portata al potenziale $V=2\cdot 10^4$ V la forza con cui il cilindro viene attratto vale $F=2\cdot 10^{-6}$ N. Calcolare la polarizzazione del cilindro e la costante dielettrica relativa del dielettrico.***

Il cilindro, posto nel campo della sfera, si polarizza; noi lo assimiliamo a un dipolo di momento $p=P\tau$ e pensiamo che la carica di polarizzazione sia distribuita con densità P sulle due basi del cilindro. Abbiamo calcolato nel problema 2.26 la forza sentita da un dipolo in un campo non uniforme:

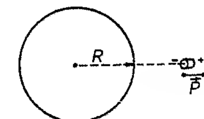
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad , \quad \frac{dE}{dr}=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \quad , \quad F=p\frac{dE}{dr}=-\frac{pq}{2\pi\varepsilon_0 r^3} .$$

Si noti che la forza è anche data dal prodotto della carica della sfera per il campo di dipolo. Siccome $q=4\pi\varepsilon_0 RV$ e $r^3=l^3=8R^3$, in modulo

$$F=\frac{P\tau V}{4R^2} \quad\Rightarrow\quad P=2\cdot 10^{-6}\frac{\text{C}}{\text{m}^2} .$$

P è parallelo e concorde a **E** e perciò a $\mathbf{u}_r$; il campo **E** nel dielettrico è dato dalla sovrapposizione del campo della sfera e del campo delle cariche di polarizzazione:

$$P=\varepsilon_0(\varkappa-1)E \quad , \quad E=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}-\frac{P}{\varepsilon_0} .$$



Eliminando E e sostituendo i valori noti per l e q,

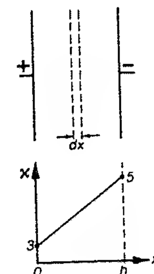
$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}=\frac{\varepsilon_0 V}{4RP}=2.21 \quad , \quad \varkappa=1\ 826 .$$

Il meccanismo di polarizzazione è tale che *il dielettrico viene sempre attirato nelle zone in cui il campo è più forte.*

3.16. ***Lo spazio tra le armature di un condensatore piano ($\Sigma=0.1$ m², $h=1$ cm) è riempito da un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa varia in modo lineare da $\varkappa_1=3$ a $\varkappa_2=5$ passando dall'armatura positiva a quella negativa. Calcolare la capacità del condensatore e le densità di carica di polarizzazione se ai capi del condensatore c'è una d.d.p. $V=10^3$ V.***

L'espressione della costante dielettrica relativa, nel sistema di coordinate della figura, è

$$\varkappa(x)=\varkappa_1+\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{h}x=3+2\cdot 10^2 x .$$



Per il calcolo della capacità schematizziamo il sistema come una serie di infinite capacità, ciascuna spessa dx e con inverso della capacità eguale a $dx/\varkappa(x)\varepsilon_0\Sigma$; l'inverso della capacità totale è la somma degli inversi delle singole capacità per cui

$$\frac{1}{C} = \int_0^h \frac{dx}{\varkappa(x)\varepsilon_0\Sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0\Sigma}\int_0^h \frac{dx}{\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{h}x} = \frac{1}{\varepsilon_0\Sigma}\frac{h}{\varkappa_2-\varkappa_1}\log\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$$

e a conti fatti $C = 346 \cdot 10^{-12}$ F.

La carica libera sulle armature è $q = CV = 3.46 \cdot 10^{-7}$ C. Non sapendo a priori come sono distribuite le cariche di polarizzazione, conviene calcolare **D** il cui flusso dipende solo dalle cariche libere. Con un procedimento identico a quello che si segue per determinare il campo all'interno di un condensatore piano si ottiene $D = \sigma = q/\Sigma$: la direzione è ortogonale alle armature, il verso da quella positiva a quella negativa. La polarizzazione è parallela e concorde a **D**, ma non risulta uniforme:

$$\mathbf{P}(x) = \left(1 - \frac{1}{\varkappa(x)}\right)\mathbf{D} = \frac{q}{\Sigma}\left(1 - \frac{1}{\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{h}x}\right)\mathbf{u}_x \quad .$$

Da questa espressione in base alle (3.1), ricaviamo le densità di carica di polarizzazione. Cominciamo con quelle superficiali:

$$\sigma_p(0) = \mathbf{P}(0)\cdot\mathbf{u}_n = -\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1}\sigma \quad , \quad \sigma_p(h) = \mathbf{P}(h)\cdot\mathbf{u}_n = \frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}\sigma \quad .$$

Le corrispondenti cariche superficiali $q_p(0) = -\frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1}q$ e $q_p(h) = \frac{\varkappa_2-1}{\varkappa_2}q$ non sono eguali ed opposte; c'è un eccesso di carica positiva $q_{sup} = \left(\frac{1}{\varkappa_1} - \frac{1}{\varkappa_2}\right)q$. Poiché nel suo insieme la lastra dielettrica è neutra, al suo interno deve trovarsi una carica spaziale di polarizzazione eguale ed opposta a quella superficiale, come del resto dobbiamo aspettarci per il fatto che il dielettrico non è omogeneo. La densità di questa carica è

$$\varrho_p = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{dP}{dx} = -\frac{q}{\Sigma}\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{h}\left(\varkappa_1 + \frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{h}x\right)^{-2}$$

mentre la carica di volume totale vale

$$q_{vol} = \int \varrho_p\, d\tau = \int_0^h \varrho_p\,\Sigma\, dx = \left(\frac{1}{\varkappa_2} - \frac{1}{\varkappa_1}\right)q = -q_{sup} \quad .$$

Passando ai numeri abbiamo:

$$\sigma_p(0) = -2.31 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \quad , \quad \sigma_p(h) = 2.77 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \quad ,$$

$$q_p(0) = -2.31 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} \quad , \quad q_p(h) = 2.77 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} \quad , \quad q_{sup} = 0.46 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} \quad ,$$

$$\varrho_p(x) = -\frac{6.92 \cdot 10^{-4}}{(3 + 200x)^2}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} \quad .$$

3.17. *Un condensatore sferico ($R_1 = 5$ cm, $R_2 = 10$ cm) ha l'intercapedine riempita da un dielettrico non omogeneo la cui costante dielettrica relativa varia secondo la legge $\varkappa(r) = a/r$ con $a = 0.2$ m. Sulla sfera interna c'è la carica $q = 10^{-9}$ C, l'armatura esterna è a potenziale zero. Calcolare il potenziale a una distanza R dal centro e determinare le densità delle cariche di polarizzazione.*

Per il teorema di Gauss $\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\mathbf{u}_r$; di conseguenza il campo elettrico vale $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varkappa\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 ar}\mathbf{u}_r$. Per il calcolo del potenziale conviene riferirsi all'armatura esterna dove il potenziale è nullo:

$$V(R) - V(R_2) = V(R) = \int_R^{R_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\log\frac{R_2}{R} \quad .$$

Il calcolo delle densità di carica di polarizzazione procede secondo la linea vista nel problema 3.16. Nota **D** abbiamo

$$\mathbf{P} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi a}\frac{a-r}{r^2}\mathbf{u}_r$$

$$\sigma_p(R_1) = \mathbf{P}(R_1)\cdot\mathbf{u}_n = -\frac{q}{4\pi a}\frac{a - R_1}{R_1^2} = -2.39 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\sigma_p(R_2) = \mathbf{P}(R_2)\cdot\mathbf{u}_n = \frac{q}{4\pi a}\frac{a - R_2}{R_2^2} = 0.40 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$q_p(R_1) = 4\pi R_1^2\sigma_p(R_1) = -\frac{q}{a}(a - R_1) = -0.75 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

$$q_p(R_2) = 4\pi R_2^2\sigma_p(R_2) = \frac{q}{a}(a - R_2) = 0.50 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

$$q_{sup} = \frac{q}{a}(R_1 - R_2) = -0.25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C} \quad .$$

La densità di volume è $\varrho_p = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{q}{4\pi a}\operatorname{div}\left[\frac{a-r}{r^2}\mathbf{u}_r\right]$. La divergenza di una funzione $f(r)\mathbf{u}_r$ il cui modulo dipende solo dalla distanza dal centro di simmetria è $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2 f(r)]$, come risulta dall'appendice, paragrafo (A9.); nel nostro caso è semplicemente $-1/r^2$ per cui $\varrho_p = q/4\pi ar^2 = 0.40 \cdot 10^{-9}/r^2$ C/m^3. Integrando

$$q_{vol} = \int \varrho_p\, d\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi ar^2}4\pi r^2 dr = \frac{q}{a}(R_2 - R_1) = -q_{sup} \quad .$$

3.18. *Calcolare il campo elettrico **E** e l'induzione dielettrica **D** in un sottile filo dielettrico molto lungo con $\varkappa = 3$ e in un sottile disco di grande raggio*

dello stesso dielettrico quando essi sono immersi in un campo elettrico uniforme $E_0 = 4 \cdot 10^4$ V/m, parallelo al filo e ortogonale al disco.

Cominciamo dal filo e poniamoci in una zona centrale, abbastanza lontana dalle estremità in modo da non risentire dell'effetto delle cariche che su queste appaiono; più sottile è il filo, più questo è approssimativamente vero. In tali condizioni, per ragioni di simmetria, possiamo supporre che **P** e **E** all'interno siano paralleli al campo esterno $\mathbf{E}_0$ e uniformi. Sulla superficie laterale del filo il campo elettrico è esclusivamente tangenziale e quindi, per le (3.8), eguale all'interno e all'esterno: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. Secondo (3.8) o (3.6) ciò non può valere per l'induzione dielettrica: all'interno $\mathbf{D} = \varkappa \mathbf{D}_0$, maggiore che all'esterno. Numericamente

$$E = 4 \cdot 10^4 \ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad D = \varkappa D_0 = \varkappa \varepsilon_0 E_0 = 1.06 \cdot 10^{-6} \ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \,.$$

Nel caso del disco supponiamo che sia così grande da poter trascurare nella zona centrale gli effetti di bordo. Ora i campi sono esclusivamente normali e, per le (3.8):

$$E_0 = \varkappa E \quad , \quad D_0 = D \quad .$$

Il campo elettrico nel disco è minore e vale $E = E_0/\varkappa = 1.33 \cdot 10^4$ V/m; l'induzione dielettrica è eguale dentro e fuori, valendo $0.35 \cdot 10^{-6}$ C/m^3.

Per caratterizzare il comportamento di un dielettrico immerso in un campo elettrico si usa definire un *fattore di depolarizzazione*, adimensionale,

$$L = \varepsilon_0 \ \frac{E_0 - E}{P} \quad .$$

Per il filo $L = 0$, per il disco $L = 1$; nel filo il campo elettrico non risente dell'effetto delle cariche di polarizzazione, nel disco l'effetto riduttivo è massimo.

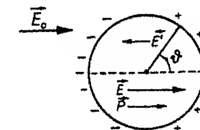
3.19. ***Una sfera di materiale dielettrico ($R, \varkappa = 4$) è immersa in un campo elettrico uniforme $E_0 = 10^5$ V/m. Calcolare il campo elettrico nel centro della sfera, la densità delle cariche di polarizzazione e il fattore di depolarizzazione della sfera, come definito nel problema 3.18. Si supponga che la presenza della sfera non alteri le sorgenti del campo $\mathbf{E}_0$.***

Essendo il dielettrico omogeneo la carica di polarizzazione è esclusivamente superficiale; essa è distribuita con densità $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n = P \cos\theta$, se θ è l'angolo tra **P** e la normale alla superficie sferica. Come ricordato nell'introduzione, la forma sferica è una delle poche che, in campo uniforme, hanno campo elettrico interno e polarizzazione uniformi e paralleli a $\mathbf{E}_0$. Pertanto, essendo P costante, σ_p è proporzionale a $\cos\theta$ e non è uniforme.

Abbiamo già incontrato questa situazione nel problema 1.20 (e anche

1.21) dove si è visto che, indipendentemente dal supporto fisico, una distribuzione superficiale sferica di carica con densità $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

— produce dentro la sfera un campo uniforme $E' = \sigma_0/3\,\varepsilon_0$ diretto come in figura,
— produce all'esterno un campo eguale a quello di un dipolo di momento $p = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0$ con **p** antiparallelo a **E**'.



Ritornando al nostro caso e riassumendo, l'azione polarizzante di $\mathbf{E}_0$ fa comparire la carica di polarizzazione distribuita con densità $\sigma = P\cos\theta$ dove θ è l'angolo tra $\mathbf{E}_0$ e la normale alla superficie; questa carica a sua volta produce nell'interno della sfera un campo elettrico $\mathbf{E}' = -\mathbf{P}/3\varepsilon_0$ per cui il campo elettrico risultante è $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{P}/3\varepsilon_0$; d'altra parte $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varkappa - 1)\mathbf{E}$. Risolvendo:

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\varkappa + 2}\,\mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{P} = 3\,\varepsilon_0 \,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 2}\,\mathbf{E}_0 \quad .$$

Il momento di dipolo equivalente è $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa + 2}\mathbf{E}_0$: il campo di dipolo si sovrappone all'esterno della sfera a $\mathbf{E}_0$ modificandolo, ma il suo effetto si sente solo nelle immediate vicinanze della sfera per poi decrescere rapidamente con la distanza.

Rispetto alla sfera conduttrice isolata e scarica posta in un campo uniforme la densità di carica e il momento di dipolo sono inferiori, per il fattore $(\varkappa - 1)/(\varkappa + 2)$ che è sempre minore di 1. Formalmente il caso della sfera conduttrice si ottiene da quello della sfera dielettrica come limite per $\varkappa$ tendente all'infinito.

I valori numerici sono

$$P = 1.33 \cdot 10^{-6} \ \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \quad , \quad \sigma(\theta) = 1.33 \cdot 10^{-6} \cos\theta \ \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad , \quad E = 0.5 \cdot 10^5 \ \frac{\text{V}}{\text{m}} \,.$$

Il fattore di depolarizzazione vale

$$L = \varepsilon_0 \frac{E_0 - E}{P} = \varepsilon_0 \ \frac{E_0 - \dfrac{3}{\varkappa + 2} E_0}{3\,\varepsilon_0 \dfrac{\varkappa - 1}{\varkappa + 2} E_0} = \frac{1}{3} \quad .$$

3.20. ***Una sfera dielettrica (R, $\varkappa_2 = 5$) è posta entro un dielettrico indefinito uniformemente polarizzato ($\varkappa_1 = 2$). Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}_i$ all'interno della sfera e la densità delle cariche di polarizzazione nell'ipotesi che il campo uniforme nel dielettrico indefinito sia $E = 3 \cdot 10^5$ V/m.***

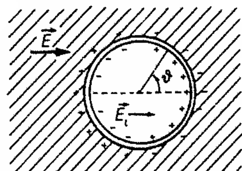
Rispetto al problema 3.19 ci sono ora cariche di polarizzazione non solo sulla superficie della sfera ma anche sulla superficie del dielettrico indefinito a contatto con la sfera, che è ancora una superficie sferica di raggio R; queste ulteriori cariche modificano la soluzione.

Determiniamo per prima cosa la densità delle cariche di polarizzazione: dentro la sfera $\mathbf{P}_i = \varepsilon_0(\varkappa_2 - 1)\mathbf{E}_i$ e sulla superficie $\sigma_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_n = \varepsilon_0(\varkappa_2 - 1) E_i \cos\theta = \sigma_0^i \cos\theta$. Per le condizioni di discontinuità (3.8) $\varkappa_1 E_{\text{est},n} = \varkappa_2 E_{i,n} = \varkappa_2 E_i \cos\theta$ da cui

$$P_{\text{est},n} = \sigma_{\text{est}} = \varepsilon_0 (\varkappa_1 - 1) E_{\text{est},n} = \varepsilon_0 \frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1} \varkappa_2 E_i \cos\theta = \sigma_0^{\text{est}} \cos\theta \,.$$

Complessivamente la carica di polarizzazione è distribuita con densità

$$\sigma = \sigma_i - \sigma_{\text{est}} = \varepsilon_0 \left(\varkappa_2 - 1 - \frac{\varkappa_1 - 1}{\varkappa_1}\varkappa_2\right) E_i \cos\theta = \varepsilon_0 \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_1} E_i \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta \,.$$



Ci sono alcuni punti da precisare: il campo $\mathbf{E}_i$ lo assumiamo uniforme e parallelo a $\mathbf{E}$ in quanto la sfera è ancora immersa in un campo uniforme. I segni delle cariche sono quelli indicati in figura, per cui è giusto scrivere $\sigma = \sigma_{\text{sfera}} - \sigma_{\text{cavità}}$.

La carica di polarizzazione è dunque distribuita proporzionalmente al coseno e sappiamo a cosa porta questa distribuzione

$$E_i = E - \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = E - \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{3\varkappa_1} E_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_i = \frac{3\varkappa_1}{2\varkappa_1 + \varkappa_2}\mathbf{E} \,,$$

$$\mathbf{P}_i = 3\varepsilon_0 \frac{(\varkappa_2 - 1)\varkappa_1}{2\varkappa_1 + \varkappa_2}\mathbf{E} \quad , \quad \sigma_0^i = P_i \quad , \quad \sigma_0^{\text{est}} = 3\varepsilon_0 \frac{(\varkappa_1 - 1)\varkappa_2}{2\varkappa_1 + \varkappa_2} E$$

$$\sigma_0 = \sigma_0^i - \sigma_0^{\text{est}} = 3\varepsilon_0 \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{3\varkappa_1 + \varkappa_2} E \quad .$$

Numericamente:

$$E_i = 2 \cdot 10^5 \, \frac{\text{V}}{\text{m}}, \ \sigma_0^i = 7.09 \cdot 10^{-6} \, \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \ \sigma_0^{\text{est}} = 4.43 \cdot 10^{-6} \, \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \ \sigma_0 = 2.66 \cdot 10^{-6} \, \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

Notiamo che con $\varkappa_2 > \varkappa_1$ è sempre $E_i < E$ e $\sigma_0^i > \sigma_0^{\text{est}}$; se invece fosse $\varkappa_1 > \varkappa_2$, troveremmo sempre $E_i > E$ e $\sigma_0^i < \sigma_0^{\text{est}}$. Notiamo poi rapidamente che all'esterno della sfera il campo delle cariche di polarizzazione si calcola come quello di un dipolo di momento

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{2\varkappa_1 + \varkappa_2}\mathbf{E} = 3.7 \cdot 10^{-11} R^3 \mathbf{E} \quad \text{Cm} \quad .$$

Il campo risultante all'esterno è $\mathbf{E}_{\text{est}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{dip}}$. Ricordando le formule che danno le componenti del campo di un dipolo (problema 1 18) e calcolandole per $r = R$, si troverebbe che $\mathbf{E}_{\text{est}}$ e $\mathbf{E}_i$ soddisfano le condizioni di discontinuità (3.8). La correzione al campo $\mathbf{E}$ diviene presto trascurabile allontanandosi dalla sfera: già a $r = 3R$ si ha un effetto che è inferiore al 3% del modulo di $\mathbf{E}$.

Dalle formule generali che abbiamo ricavato possiamo dedurre alcuni casi particolari interessanti:

1) sfera dielettrica nel vuoto, $\varkappa_1 = 1$ e $\varkappa_2$ qualsiasi

   si ritrova $\mathbf{E}_i = \dfrac{3}{\varkappa_2 + 2}\mathbf{E}$, problema 3.19

2) cavità sferica in un dielettrico indefinito. $\varkappa_1$ qualsiasi e $\varkappa_2 = 1$

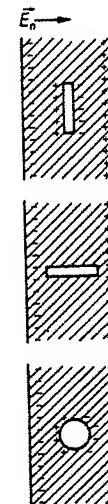
   abbiamo $\mathbf{E}_i = \dfrac{3\varkappa_1}{2\varkappa_1 + 1}\mathbf{E}$ $(E_i > E)$, $\sigma_0 = \sigma_0^{\text{est}} = -3\varepsilon_0 \dfrac{\varkappa_1 - 1}{2\varkappa_1 + 1} E < 0$;

   in particolare se $\varkappa_1 \gg 1$ $\mathbf{E}_i = \dfrac{3}{2}\mathbf{E}$, $\sigma_0 = -\dfrac{3}{2}\varepsilon_0 E$.

3) sfera conduttrice nel vuoto, $\varkappa_1 = 1$ e $\varkappa_2 = \infty$

   ritroviamo $\mathbf{E}_i = 0$, $\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$, problema 1.20

4) sfera conduttrice in un dielettrico indefinito, $\varkappa_1$ qualsiasi e $\varkappa_2 = \infty$: è ancora $\mathbf{E}_i = 0$; le cariche di polarizzazione e di induzione sono distribuite con densità $\sigma_{\text{est}} = 3\varepsilon_0(\varkappa_1 - 1) E\cos\theta$, $\sigma_i = 3\varepsilon_0\varkappa_1 E\cos\theta$: in totale $\sigma = 3\varepsilon_0 E\cos\theta$; $\mathbf{E}$ è il campo uniforme esistente nel dielettrico.

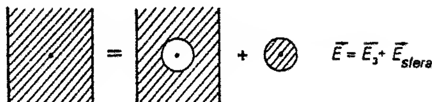


3.21. – ***Una lastra dielettrica ($\varkappa = 8$) è sottoposta a un campo elettrico uniforme $E_0 = 2 \cdot 10^4$ V/m, ortogonale alle facce. Calcolare il campo elettrico nelle tre cavità aventi le forme indicate nelle figure.***

Primo caso: si tratta di una cavità parallelepipeda lunga e sottile, col lato maggiore parallelo alle facce della lastra. Se il campo esterno è $\mathbf{E}_0$, il campo nella lastra è $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\varkappa$, come abbiamo visto più volte. Nella cavità il campo è ancora $\mathbf{E}_0$, come si ricava applicando le (3.8).

Secondo caso: è una cavità dello stesso tipo, ma parallela al campo. Sempre per le (3.8) il campo nella cavità è eguale a quello nel dielettrico.

Terzo caso: abbiamo ora una cavità sferica. Ricorriamo al principio di sovrapposizione e ai risultati del problema 3.19. Precisamente, il campo all'interno del dielettrico lo pensiamo som-



ma di due situazioni: campo all'interno di una cavità sferica più campo di una sfera immersa in un campo uniforme **E**, che sarebbe il campo nel dielettrico. In simboli:

$$\mathbf{E}_{\text{sfera}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \quad , \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} = \mathbf{E} + \frac{\varkappa - 1}{3}\,\mathbf{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_3 = \frac{\varkappa + 2}{3}\,\mathbf{E} = \frac{\varkappa + 2}{3\varkappa}\,\mathbf{E}_0 \ .$$

Lo stesso metodo adottato per il calcolo di $\mathbf{E}_3$ può essere applicato ai primi due casi usando i risultati del problema 3.18.

Le soluzioni numeriche dei tre casi proposti sono:

$$E_1 = E_0 = 2 \cdot 10^4 \ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad E_2 = \frac{E_0}{\varkappa} = 2.5 \cdot 10^3 \ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad E_3 = 8.3 \cdot 10^3 \ \frac{\text{V}}{\text{m}} \ (> E_2) \ .$$

Per concludere, vogliamo mettere in evidenza la differenza che sussiste tra il terzo caso appena visto e il caso numero due esaminato nel problema 3.20. In entrambe le soluzioni abbiamo una cavità sferica vuota all'interno di un dielettrico sede di un campo uniforme; una volta però entrano in gioco in modo esplicito le cariche di polarizzazione sulle superficie libere del dielettrico, un'altra queste non compaiono in quanto si considera il dielettrico indefinito.

3.22. ***Un condensatore piano (Σ, $h = 3$ cm) ha tra le armature una lastra di materiale dielettrico (Σ, $s = 1$ cm, $\varkappa$) ed è collegato ad un generatore (V_0). Il rapporto tra l'energia contenuta nella parte vuota W_0 e quella contenuta all'interno del dielettrico W_d vale $W_0/W_d = 4$. Il campo elettrico misurato all'interno di una piccola cavità sferica praticuta all'interno del dielettrico è $E_c = 4 \cdot 10^4$ V/m. Calcolare $\varkappa$ e V_0.***

Detto E_d il campo elettrico nel dielettrico e $E_0 = \varkappa E_d$ il campo elettrico nella parte vuota si ha:

$$\frac{W_0}{W_d} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \Sigma (h-s)}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \varkappa E_d^2 \Sigma s} = \frac{\varkappa (h-s)}{s} = 4$$

da cui si ricava $\varkappa = 4s/(h-s) = 2$.

Dai risultati del problema 3.21, terzo caso:

$$E_d = \frac{3}{\varkappa + 2} E_c = 3 \cdot 10^4 \ \frac{\text{V}}{\text{m}} \ .$$

La f.em. del generatore vale quindi:

$$V_0 = E_0(h-s) + E_d s = [\varkappa(h-s) + s]\, E_d = 1500\,\text{V} \ .$$

3.23. ***Lo spazio tra le armature di un condensatore piano ($\Sigma = 1$ m², $h = 8.85$ mm) è riempito da elio gassoso a 0° C e ad una atmosfera di pressione; in queste condizioni $\varkappa_0 = 1.000074$. Successivamente la pressione del gas viene portata isotermicamente a 5 atmosfere e durante il processo la d.d.p. ai capi del condensatore resta $V = 8850$ V. Calcolare il momento di dipolo degli atomi di elio nelle condizioni iniziali e finali, il valore finale di $\varkappa$, la variazione di carica sulle armature.***

Il campo elettrico nel gas vale sempre $E = V/h = 10^6$ V/m; nello stato iniziale $P_0 = \varepsilon_0(\varkappa_0 - 1)E = 6.55 \cdot 10^{-10}$ C/m². Il momento medio di ciascun atomo di elio si ottiene dividendo la polarizzazione per il numero n di atomi per unità di volume (problema 3.14):

$$n = \frac{N}{A}\varrho = \frac{N}{A}\frac{A}{\tau_0} = \frac{N}{\tau_0} = \frac{6.025 \cdot 10^{26}}{22.4} = 0.27 \cdot 10^{26} \ \frac{\text{atomi}}{\text{m}^3} \ ,$$

$$p = \frac{P_0}{n} = 2.43 \cdot 10^{-35} \ \text{Cm} \ ;$$

N è il numero di Avogadro, A la massa molare, τ_0 il volume molare. Nello stato finale p ha lo stesso valore perché il campo elettrico è lo stesso.

Quello che cambia nello stato finale è il numero di atomi per m³, che aumenta di un fattore 5 (proporzionalmente alla pressione in condizioni isoterme): di altrettanto aumenta la polarizzazione.

$$\frac{P}{P_0} = 5 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa_0 - 1} \quad \Rightarrow \quad \varkappa = 1.00037 \ .$$

La variazione di carica sulle armature è

$$\Delta q = (C - C_0)\,V = (\varkappa - \varkappa_0)\,\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}\,V = 2.62 \cdot 10^{-9} \ \text{C} \ .$$

Dal valore di p è possibile avere un'idea dell'ordine di grandezza degli spostamenti subiti dalle cariche elementari entro l'atomo a causa dell'azione del campo elettrico. Nell'atomo di elio ci sono due elettroni e due protoni (più due neutroni) nel nucleo; possiamo scrivere $p = 2ed$ da cui $d = p/2e = 0.8 \cdot 10^{-16}$ m. Prima dell'applicazione del campo i baricentri delle cariche positive e negative coincidevano e cadevano entrambi nel nucleo, le cui dimensioni sono dell'ordine di 10^{-15} m. Vediamo che anche in presenza di campo i baricentri, pur non coincidendo più, non escono praticamente dal nucleo.

3.24. ***Supponendo che il nucleo di un atomo possa considerarsi come una carica puntiforme positiva Ze posta al centro di una nube elettronica rappresentata come una sfera uniformemente carica di raggio R e carica totale −Ze, calcolare la polarizzabilità dell'atomo quando esso viene immerso in un campo elettrico. Sapendo che nell'elio gassoso in condizioni standard*** $\varkappa = 1.000074$ ***calcolare il raggio dell'atomo di elio.***

Supponiamo che sotto l'azione del campo elettrico avvenga uno spostamento del nucleo rispetto al centro della sfera elettronica. Ma all'interno di una sfera uniformemente carica agisce un campo elettrico radiale di modulo $\varrho r/3\varepsilon_0$, diretto nel nostro caso verso il centro perché ϱ è negativa. Sul nucleo agiscono pertanto il campo elettrico esterno e il campo della sfera, paralleli e discordi; si ha equilibrio quando

$$ZeE = Ze\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Zer = 4\pi R^3 \varepsilon_0 E$$

essendo $\varrho = Ze\Big/\frac{4}{3}\pi R^3$. Il primo membro è il prodotto della carica spostata per la distanza tra i baricentri delle cariche positive e negative e può così essere interpretato come il momento di dipolo acquistato dall'atomo. Per la (3.11):

$$p = 4\pi R^3 \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \alpha E \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4\pi R^3 \quad .$$

Nel caso dell'elio gassoso sappiamo che la (3.12) si può scrivere $\varkappa - 1 = n\alpha$; n è stato calcolato nel problema 3.23. Mettendo insieme i risultati

$$R = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^{1/3} = \left(\frac{\varkappa-1}{4\pi n}\right)^{1/3} = 6.02 \cdot 10^{-11}\ \text{m} \quad .$$

L'ordine di grandezza è in accordo col modello di Bohr.

3.25. ***La costante dielettrica dell'ossigeno gassoso, misurata alla pressione ambiente*** ($\delta_{gas} = 1.43 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3) ***è*** $\varkappa_{gas} = 1.000523$, ***mentre quella dell'ossigeno liquido*** ($\delta_{liq} = 1.19$ g/cm^3) ***vale*** $\varkappa_{liq} = 1.507$. ***Nell'ipotesi che la polarizzabilità non dipenda dallo stato di aggregazione dimostrare che questi dati permettono di stabilire che la polarizzazione dell'ossigeno è di tipo elettronico.***

Nella fase gassosa $\varkappa - 1 = n\alpha = 523 \cdot 10^{-6}$; se α è la stessa nella fase liquida

$$\frac{(n\alpha)_{liq}}{(n\alpha)_{gas}} = \frac{\delta_{liq}}{\delta_{gas}} = 8.32 \cdot 10^2 \quad \Rightarrow \quad (n\alpha)_{liq} = 0.435 \quad .$$

Dall'equazione di Clausius-Mossotti (3.12):

$$\varkappa_{liq} = 1 + \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3} = 1.509 \quad ,$$

che è in ottimo accordo col dato sperimentale. Ciò vuol dire che è corretto applicare la (3.12) ovvero che la polarizzazione è di tipo elettronico (e a posteriori che α è veramente eguale nelle due fasi). Si vede pure che il meccanismo di polarizzazione avviene a livello della molecola (invece che dell'atomo) anche nella fase liquida, come implicitamente assunto nel problema 3.14.

3.26. ***Il vapor d'acqua a 120° C e 0.74 atm ha una costante dielettrica relativa*** $\varkappa = 1.0040$. ***Calcolare il valore del momento di dipolo permanente e la polarizzabilità.***

Secondo la (3.13) $p_0^2 = 3\varepsilon_0 \alpha_p KT$; inoltre in un gas $\varkappa - 1 = n\alpha_p$. Risulta:

$$p_0^2 = 3\varepsilon_0 KT\frac{\varkappa - 1}{n} \quad .$$

Calcoliamo n dalla solita formula $N\varrho/A$ e la densità ϱ considerando il vapor d'acqua un gas ideale (i simboli dovrebbero essere evidenti):

$$p\tau = n_m RT \quad , \quad \varrho = \frac{M}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\varrho} = \frac{n_m}{M}RT = \frac{RT}{A} \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{pA}{RT} \quad .$$

Ricordando che 1 atm $= 1.013 \cdot 10^5$ N/m^2 e $K = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K abbiamo

$$n = \frac{Np}{RT} = \frac{p}{KT} = 1.38 \cdot 10^{25}\ \frac{\text{molecole}}{\text{m}^3}$$

e in definitiva

$$p_0 = KT\left(3\varepsilon_0\frac{\varkappa - 1}{p}\right)^{1/2} = 6.45 \cdot 10^{-30}\ \text{Cm} \quad .$$

In effetti l'insieme di altre misure a temperature e pressioni diverse portano a un valor medio $p_0 = 6.17 \cdot 10^{-30}$ Cm.

La polarizzabilità si ricava così:

$$\alpha_p = \frac{\varkappa - 1}{n} = 2.89 \cdot 10^{-28}\ \text{m}^3 \quad .$$

3.27. ***Un campione d'acqua distillata a 20° C*** ($\varkappa = 80$, $\varrho = 0.998$ g/cm^3) ***viene sottoposto a un campo elettrico uniforme*** $E = 10^3$ V/m. ***Calcolare quante molecole hanno il momento di dipolo orientato concordemente al campo*** ($p_0 = 6.17 \cdot 10^{-30}$ Cm). ***Verificare la non applicabilità della teoria di Debye e dell'equazione di Clausius-Mossotti all'acqua.***

La polarizzazione dell'acqua vale $P = \varepsilon_0(\varkappa - 1)E = 6.99 \cdot 10^{-5}$ C/m^2; il numero di molecole per unità di volume è

$$n = \frac{N}{A}\,\varrho = \frac{6.025 \cdot 10^{26} \cdot 0.998 \cdot 10^3}{18} = 3.34 \cdot 10^{28}\,\frac{\text{molecole}}{\text{m}^3}\,.$$

Se tutti i dipoli di momento p_0 fossero allineati concordemente al campo elettrico darebbero una polarizzazione $P' = np_0 = 0.206\ \text{C/m}^2$. Il rapporto

$$\frac{P}{P'} = \frac{1}{2947}$$

dice che tutto avviene *come se* una sola molecola su 2947 fosse orientata concordemente al campo. La non orientazione globale si deve, come è noto, all'agitazione termica.

Se la (3.13) fosse valida si dedurrebbe la polarizzabilità

$$\alpha_p = \frac{p_0^2}{3\,\varepsilon_0 KT} = 3.55 \cdot 10^{-28}\ \text{m}^3$$

e applicando l'equazione di Clausius-Mossotti (3.12) con $n\alpha = 11.83$ si troverebbe $\varkappa = -3.04$, risultato assurdo in quanto $\varkappa$ non può essere negativo.

La ragione dell'insuccesso sta nel fatto che nell'acqua le molecole non si muovono liberamente, ma tendono a formare, interagendo, lunghe catene. Da un punto di vista fenomenologico ciò comporta che il campo elettrico effettivamente agente sulla singola molecola non sia né quello macroscopico E (come nei gas) né quello dato dal semplice modello di Clausius e Mossotti, ma sia molto superiore a entrambi. Se prendiamo il valore di α_p appena calcolato, che come ordine di grandezza non può essere molto lontano dalla realtà, e utilizziamo la (3.11) abbiamo $P = np = n\alpha\varepsilon_0 E^*$, da cui con il valore $P = 6.99 \cdot 10^{-5}\ \text{C/m}^2$ otteniamo per il campo elettrico locale

$$E^* = 6.66 \cdot 10^5\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 666\ \text{E}\,.$$

Secondo Clausius e Mossotti il campo E^* è quello che noi abbiamo chiamato E_3 nel problema 3.21 e che vale quindi $(\varkappa + 2)E/3 = 27.3\ E$.

Abbiamo voluto discutere questo caso perché, come vedremo nei problemi finali del capitolo 7° dedicati al paramagnetismo e al ferromagnetismo (7.26 e 7.27), anche la formazione dei domini magnetici, catene di un gran numero di momenti magnetici orientati concordemente, viene fenomenologicamente descritta con l'azione di un campo magnetico locale molto maggiore del campo magnetico medio nel materiale.

3.28. ***La costante dielettrica relativa del cloroformio $CHCl_3$ è $\varkappa_1 = 3.71$ alla temperatura $t_1 = 100$ °C e $\varkappa_2 = 6.12$ a $t_2 = -40°$ C. La densità è praticamente costante tra queste temperature e vale $\varrho = 1.5 \cdot 10^3\ \text{Kg/m}^3$. Determinare la polarizzabilità elettronica e il momento di dipolo permanente della molecola di cloroformio.***

Per poter applicare la (3.14) calcoliamo n: la massa molare A del cloroformio vale $12 + 1 + 3 \cdot 35.45 = 119.35$ per cui

$$n = \frac{N}{A}\,\varrho = 7.57 \cdot 10^{27}\,\frac{\text{molecole}}{\text{m}^3}\,.$$

La (3.14) viene scritta per $T_1 = 373$ K e per $T_2 = 233$ K:

$$\left.\begin{aligned} 1.88 \cdot 10^{-28} &= \alpha_e + 7.32 \cdot 10^{30}\,p_0^2 \\ 2.50 \cdot 10^{-28} &= \alpha_e + 11.71 \cdot 10^{30}\,p_0^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_e &= 0.85 \cdot 10^{-28}\ \text{m}^3 \\ p_0 &= 3.76 \cdot 10^{-30}\ \text{Cm} \end{aligned}$$

A temperatura ambiente $T = 300$ K la polarizzabilità di tipo polare del cloroformio vale

$$\alpha_p = \frac{p_0^2}{3\,\varepsilon_0 KT} = 1.29 \cdot 10^{-28}\ \text{m}^3$$

per cui complessivamente

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_p = (0.85 + 1.29) \cdot 10^{-28} = 2.14 \cdot 10^{-28}\ \text{m}^3\quad ;$$

il 40% è di tipo elettronico, il 60% di tipo polare.

* * *

CORRENTI CONTINUE. RETI LINEARI. CIRCUITI RC

4a. Ogni qual volta si ha un movimento di cariche si può parlare di corrente elettrica, definendone l'intensità i attraverso una certa superficie come la carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad . \tag{4.1}$$

In generale la corrente è una funzione $i(x, y, z, t)$ e le sue caratteristiche dipendono dalle modalità con cui si svolge il movimento delle cariche. Insieme all'intensità di corrente si introduce il vettore $\mathbf{j}$, *densità di corrente*: data una superficie $d\Sigma$ attraversata da una corrente di si definisce come componente normale, rispetto a $d\Sigma$, di $\mathbf{j}$ il rapporto $j_n = di/d\Sigma$. Ne segue che la corrente è il flusso di $\mathbf{j}$ attraverso una superficie:

$$i = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma \tag{4.2}$$

In questo capitolo ci occuperemo solo di correnti elettriche in conduttori metallici omogenei e isotropi, studiandone le proprietà da un punto di vista macroscopico. La più importante è espressa dalla *legge di Ohm*: quando tra due punti di un conduttore metallico si mantiene una d.d.p. $V_2 - V_1$, così che entro il metallo sussista un campo elettrico $\mathbf{E}$, si osserva il passaggio di una corrente la cui intensità è proporzionale alla d.d.p. applicata:

$$V_2 - V_1 = Ri \tag{4.3}$$

La costante di proporzionalità si dice *resistenza* ed è caratteristica della natura del conduttore e della sua geometria. L'inverso della resistenza si chiama *conduttanza* $G = 1/R$. La (4.3) si scrive anche nelle forme più generali:

$$\mathbf{E} = \varrho \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{j} = g\mathbf{E} \quad , \tag{4.4}$$

che precisano il significato della densità di corrente. Le grandezze ϱ e $g = 1/\varrho$ sono rispettivamente la *resistività* e la *conduttività* e dipendono dalla natura del conduttore. In un metallo la resistività varia con la temperatura:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t) \quad , \tag{4.5}$$

dove ϱ_0 è la resistività a 0°C e α è una costante detta coefficiente di temperatura.

È importante notare che le (4.3) e (4.4) non sono equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, bensì hanno il ruolo di *equazioni di stato*, valide per una certa classe di conduttori (così come la relazione $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ è valida nei dielettrici isotropi).

Un conduttore di sezione Σ e lunghezza dx presenta la resistenza

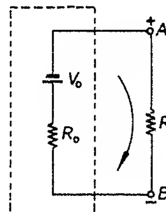
$$dR = \varrho \frac{dx}{\Sigma} \quad . \tag{4.6}$$

Per conduttori di forma generica la resistenza totale si ottiene integrando; in particolare, per conduttori di sezione costante e lunghezza totale l

$$R = \varrho \frac{l}{\Sigma} \quad . \tag{4.7}$$

4b. Le correnti più semplici sono quelle continue, ottenute mantenendo costanti nel tempo le d.d.p. ai capi dei conduttori; per esse, come del resto anche per correnti variabili non troppo rapidamente nel tempo (¹), si può ammettere la costanza dell'intensità nello stesso istante in diverse sezioni dei conduttori, per cui si scrive semplicemente i o $i(t)$ senza alcuna dipendenza dalla posizione.

Lo schema più semplice di circuito in corrente continua è quello della figura: la parte dentro la linea tratteggiata è un generatore ai cui poli A e B è connesso un conduttore di resistenza R. Come indica la figura, un generatore è caratterizzato da due parametri:



a) la *forza elettromotrice* (f.em.) V_0,
b) la *resistenza interna* R_0.

Tra la corrente che passa nel circuito e le altre grandezze sussiste la relazione:

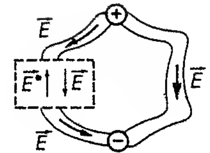
$$V_A - V_B = Ri = V_0 - R_0 i \quad \Rightarrow \quad V_0 = (R_0 + R)i \quad . \tag{4.8}$$

La (4.8) esprime la legge di Ohm per il circuito chiuso e dà il significato fisico della resistenza interna di un generatore. Per convenzione si assume come verso positivo della corrente quello che , nel circuito esterno, va dal polo positivo al polo negativo (l'argomento verrà ripreso nel problema 5.5).

Un generatore è quindi lo strumento che permette di mantenere ai capi di un conduttore la d.d.p. necessaria per lo spostamento delle cariche che danno luogo alla corrente. Sotto l'azione del campo **E** le cariche passano da A a B e poi, con un meccanismo che varia a seconda del tipo di generatore, vengono riportate attraverso il generatore stesso nel punto A: possiamo affermare, in generale, che l'elemento di carica dq è sottoposto a una forza non elettrostatica e parlare di un campo equivalente $E^* = dF/dq$ che agisce solo all'interno

(¹) Il criterio è che le variazioni avvengano in tempi superiori a quello che la luce impiegherebbe per attraversare la dimensione massima del circuito.

del generatore. Sull'unità di carica che fa un giro completo viene compiuto il lavoro



$$\int_{+}^{-} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} + \int_{-}^{+} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot \mathbf{dl} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{dl}$$

in quanto $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0$. È un dato sperimentale che questo lavoro non è nullo; inoltre fuori dal generatore $\mathbf{E}^* = 0$ e $\int_{+}^{-} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{dl} = 0$. Ne segue che il *campo* $\mathbf{E}^*$, la cui azione permette il passaggio di una corrente continua nel circuito, *non è un campo conservativo*: il suo integrale di linea dipende dal percorso, la sua circuitazione non è nulla. Al valore non nullo della circuitazione di $\mathbf{E}^*$ si dà il nome di forza elettromotrice del generatore:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{dl} = \int_{-}^{+} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{dl} = V_0 \quad . \tag{4.9}$$

Questa assume pertanto il significato di lavoro compiuto sull'unità di carica: e ripetiamo che tale lavoro dipende dal percorso, a differenza di quanto avviene in un campo elettrostatico. Per mettere ciò in evidenza si suole dare a V_0 anche il nome di *tensione elettrica* riservando il termine d.d.p., che è pur sempre un lavoro per unità di carica, solo ai campi conservativi.

La misura della f.em. si fa in base a (4.8), quando $i = 0$ $V_0 = V_A - V_B$: la f.em. è numericamente eguale alla d.d.p. che si misura tra i poli del generatore a circuito aperto (si noti che è proprio così che abbiamo usato i generatori in alcuni problemi a potenziale costante nei capitoli 2 e 3. essi facevano restare costante la d.d.p. tra due conduttori diversi, connessi ai poli ma isolati tra loro).

4c. Per mantenere la corrente in un conduttore ai cui capi ci sia la d.d.p. V occorre spendere in un tempo infinitesimo il lavoro

$$dL = Vdq = Vidt$$

cui corrisponde la potenza $P = Vi$. Se vale la legge di Ohm (4.3)

$$dL = Ri^2 dt = \frac{V^2}{R} dt \quad , \quad P = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad . \tag{4.10}$$

L'integrazione si fa subito se la corrente è continua: $L = Ri^2 t = (V^2/R)\, t$. Questo lavoro si ritrova integralmente sotto forma di calore $Q = L$ dissipato nel conduttore di resistenza R (*effetto Joule*).

Possiamo ora completare dal punto di vista energetico quanto detto prima sui generatori: per far passare la corrente i al suo interno dal polo negativo al polo positivo il generatore eroga la potenza $V_0 i$; la parte $R_0 i^2$ viene dissipata nella resistenza interna, il resto Ri^2 è disponibile all'esterno. Se invece forziamo dall'esterno una corrente i a passare dentro il generatore dal polo positivo a quello negativo, il generatore assorbe la potenza $V_0 i$.

4d. Le resistenze dei conduttori metallici sono in genere molto piccole; per ottenere valori elevati di R si usano materiali e tecniche costruttive speciali. Indicheremo col nome di *resistore* un elemento di circuito caratterizzato da un determinato valore di R; i vari resistori saranno collegati tra loro nonché ai generatori e agli eventuali strumenti per la misura delle correnti e delle d.d.p. da conduttori la cui resistenza si assumerà trascurabile.

Un sistema di resistori in serie è attraversato dalla stessa corrente; la resistenza totale e la d.d.p. ai capi del sistema sono espresse da

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \quad , \quad V_{tot} = R_1 i + R_2 i + \ldots + R_n i = R_{tot} i \quad .$$

Invece un sistema di resistori in parallelo è caratterizzato da una comune d.d.p.; la resistenza e la corrente totale sono espresse da

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \quad , \quad i_{tot} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{V}{R_n} = \frac{V}{R_{tot}} \quad .$$

In particolare, per due resistori in parallelo $R_{tot} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

4e. Una rete elettrica è formata da un insieme di rami e di nodi: i primi sono tratti conduttori costituiti da elementi attivi (generatori) ed elementi passivi (resistori), i secondi sono punti in cui convergono almeno tre rami diversi. All'interno di una rete può poi essere individuato un determinato numero di cammini chiusi, detti maglie. Reti siffatte sono chiamate lineari in quanto lineare è l'equazione di stato che vale per tutti i loro elementi.

Alle reti elettriche lineari si applicano i *principi di Kirchhoff*:

$$\begin{aligned} &\textit{nodi} \quad && \Sigma_k i_k = 0 && \equiv \text{conservazione della carica} \\ &\textit{maglie} \quad && \Sigma_k R_k i_k = \Sigma_k V_{0,k} && \equiv \text{legge di Ohm} \quad . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nell'uso pratico occorre fissare alcune convenzioni:
1) si assegna un determinato segno alle correnti che entrano in un nodo, l'opposto a quello che ne escono;
2) si assegna un determinato verso alla corrente in ogni maglia;
3) si prendono le f.em. positive se tendono a far passare corrente nel verso prefissato, negative in caso contrario.

Se i rami di una rete sono L, ci sono L correnti: si dimostra che esse non sono indipendenti tra loro e che, se N è il numero di nodi,

$$M = L - N + 1 \tag{4.12}$$

è il numero di correnti indipendenti. A ciascuna di esse si può associare una maglia e scrivendo le corrispondenti equazioni di Kirchhoff si ha un sistema lineare determinato i cui coefficienti e termini noti sono opportune combinazioni delle R_k e $V_{0,k}$ e le cui incognite sono le M correnti. Un metodo semplice e pratico per individuare le M maglie indipendenti consiste nello scegliere le maglie in modo tale che ciascuna abbia almeno un ramo che non è parte della maglia scelta precedentemente.

Da questo metodo di soluzione, che discende direttamente dal secondo principio di Kirchhoff, si ricava il cosiddetto *metodo delle maglie*. Un metodo alternativo di soluzione si basa invece sul primo principio di Kirchhoff ed è detto *metodo dei nodi*. Entrambi i metodi verranno esposti in alcuni problemi.

4f. Per circuito RC intendiamo in questo capitolo i due schemi seguenti:
a) condensatore carico che si scarica attraverso un resistore connesso tra le sue armature;
b) condensatore scarico che viene caricato da un generatore attraverso un resistore.

In entrambi i casi la soluzione sarà ottenuta facendo uso della legge di Ohm (4.3) o (4.8), del legame (4.1) tra corrente e carica e (2.3) tra carica, capacità e d.d.p.; vedremo come i circuiti RC costituiscano tipici esempi di circuiti percorsi da correnti variabili nel tempo.

4g. Diamo le dimensioni delle nuove grandezze introdotte:

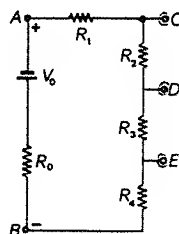
intensità di corrente	$i = \dfrac{\text{coulomb}}{\text{secondo}} = \text{ampere}$	A
densità di corrente	$j = \dfrac{\text{ampere}}{\text{m}^2}$	$\dfrac{\text{A}}{\text{m}^2}$
resistenza	$R = \dfrac{\text{volt}}{\text{ampere}} = \text{ohm}$	Ω
conduttanza	$G = \text{ohm}^{-1}$	Ω^{-1}
resistività	$\varrho = \text{ohm} \cdot \text{m}$	Ωm
conduttività	$g = (\text{ohm} \cdot \text{m})^{-1}$	$(\Omega\text{m})^{-1}$
coefficiente di temperatura	$\alpha = \text{Kelvin}^{-1}$	K^{-1}

Notiamo che la potenza $P = Vi$ si esprime in volt · ampere, cioè watt = = volt · ampere. Una unità frequentemente usata per il lavoro elettrico è il chilowattora, KWh, pari a $3.6 \cdot 10^6$ J. Ricordiamo infine che, nel caso si volessero esprimere le quantità di calore in calorie, 1 Cal = 4185 J.

Nell'uso comune ci si serve sempre, quando è il caso, dei seguenti multipli dell'ohm: chiloohm $\text{K}\Omega = 10^3\,\Omega$, megaohm $\text{M}\Omega = 10^6\,\Omega$.

* * *

4.1. ***Un generatore ($V_0 = 100$ V, $R_0 = 10$ Ω) può erogare al massimo 0.5 A. In condizioni di massima erogazione si vuole disporre contemporaneamente di punti il cui potenziale assuma i valori 90, 50, 30 V rispetto al polo negativo del generatore. Calcolare i valori delle resistenze della serie di resistori che bisogna connettere al generatore.***



Posto $i = 0.5$ A il valore globale della resistenza si calcola tramite (4.8):

$$R = \frac{V_0}{i} - R_0 = 190 \ \Omega \quad .$$

La d.d.p. ai capi della serie di resistori è

$$V_A - V_B = V_0 - R_0 i = 95 \ \text{V} \quad .$$

Per avere $V_C = 90$ V, $V_D = 50$ V, $V_E = 30$ V rispetto al polo B le resistenze R_1, R_2, R_3. R_4 devono valere:

$$R_1 = \frac{V_A - V_C}{i} = \frac{95 - 90}{0.5} = 10 \ \Omega \ , \ R_2 = \frac{V_C - V_D}{i} = \frac{90 - 50}{0.5} = 80 \ \Omega$$

$$R_3 = \frac{V_D - V_E}{i} = \frac{50 - 30}{0.5} = 40 \ \Omega \ , \ R_4 = \frac{V_E - V_B}{i} = \frac{30}{0.5} = 60 \ \Omega \ .$$

Si vede che $\Sigma_i R_i = 190$ Ω; i resistori necessari devono poi essere dimensionati in modo tale da sopportare senza danni gli effetti termici che il passaggio della corrente provoca (p.e. in R_3 viene dissipata la potenza $R_3 i^2 = 20$ W).

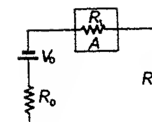
Il sistema visto è un esempio di *partitore resistivo*· esso permette di dividere in varie parti una certa d.d.p., nella pratica il problema può porsi in modo inverso, cioè sono noti i valori delle resistenze e si vogliono calcolare i potenziali; la soluzione segue la stessa linea.

4.2. ***Nel circuito in figura se si inserisce in serie a $R = 80$ Ω un amperometro di resistenza $R_1 = 10$ Ω si legge nello strumento $i = 1$ A; se invece si inserisce in parallelo a R un voltmetro di resistenza $R_2 = 500$ Ω si legge $V = 87$ V. Determinare V_0 e R_0. Determinare inoltre il valore massimo che può assumere R_1 senza che la corrente venga alterata più dello 0.1% e il valore minimo di R_2 affinché la d.d.p. ai capi di R non venga alterata più dell'1%.***

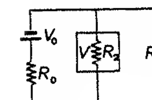
Le equazioni del circuito nei due casi sono

$$V_0 = i(R_0 + R_1 + R) \quad , \quad V_0 = i'(R_0 + R') \quad ;$$

nella seconda i' è la corrente erogata dal generatore e $R' = RR_2/(R + R_2)$ è la resistenza del parallelo tra R e il voltmetro; inoltre $i' = V/R'$. Abbiamo così un sistema nelle due incognite R_0 e V_0. Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene



$$R_0 = RR_2 \frac{V - i(R + R_1)}{RR_2 i - V(R + R_2)} = 11.5 \ \Omega$$



e sostituendo questo valore nella prima si trova $V_0 = 101.5$ V.

In assenza e in presenza dell'amperometro si ha rispettivamente

$$i = \frac{V_0}{R_0 + R} \quad , \quad i^* = i - \Delta i = \frac{V_0}{R_0 + R_1 + R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta i}{i} = \frac{R_1}{R_0 + R_1 + R} \quad ;$$

Detto K il valore percentuale dell'alterazione che non si vuole superare, la condizione $\Delta i / i \leqslant K/100$ diventa una condizione su R_1:

$$\frac{R_1}{R_0 + R_1 + R} \leqslant \frac{K}{100} \quad \Rightarrow \quad R_1 \leqslant \frac{K(R + R_0)}{100 - K} = 0.092 \ \Omega \quad .$$

Nel caso del voltmetro si ha:

$$V = Ri = \frac{RV_0}{R + R_0} \quad , \quad V^* = V - \Delta V = R'i' = \frac{RR_2}{R + R_2} \frac{V_0}{R_0 + \dfrac{RR_2}{R + R_2}} \quad ,$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{R_0 R}{R_2(R + R_0) + R_0 R} \quad .$$

Dicendo questa volta H il valore percentuale dell'alterazione che non si vuole superare, dalla condizione $\Delta V/V \leqslant H/100$ discende

$$R_2 \geqslant \frac{100 - H}{H} \frac{R_0 R}{R_0 + R} = 995 \ \Omega \quad .$$

Affinché la misura alteri il circuito il meno possibile occorre che la resistenza dell'amperometro sia trascurabile rispetto alla serie delle altre resistenze e che quella del voltmetro sia molto maggiore del parallelo delle altre.

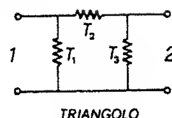
4.3. ***Tre resistori di resistenza T_1, T_2, T_3 e altri tre di resistenza S_1, S_2, S_3 sono disposti come in figura. Trovare che relazioni devono esserci tra i valori delle resistenze affinché i due schemi possano considerarsi equivalenti.***

Il problema è quello della cosiddetta *trasformazione triangolo-stella*. Se le due disposizioni sono equivalenti deve verificarsi, per esempio, che:

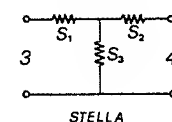
a) quando al terminale 1 e a quello 3 sono connessi due generatori identifici, mentre i terminali 2 e 4 sono aperti, le correnti erogate dai generatori sono eguali, in quanto eguali sono le resistenze che essi vedono;
b) lo stesso avvenga connettendo i generatori ai terminali 2 e 4 e lasciando 1 e 3 aperti;

c) lo stesso avvenga chiudendo in corto circuito i terminali 2 e 4.
In corrispondenza a queste tre condizioni si scrivono tre equazioni:

$$\frac{T_1(T_2+T_3)}{T_1+T_2+T_3}=S_1+S_3 \qquad (a)$$



$$\frac{T_3(T_1+T_2)}{T_1+T_2+T_3}=S_2+S_3 \qquad (b)$$



$$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}=S_1+\frac{S_2 S_3}{S_2+S_3} \ . \qquad (c)$$

Risolvendo nelle S abbiamo le resistenze della stella in funzione di quelle del triangolo:

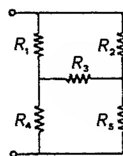
$$S_1=\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2+T_3} \quad , \quad S_2=\frac{T_2 T_3}{T_1+T_2+T_3} \quad , \quad S_3=\frac{T_3 T_1}{T_1+T_2+T_3} \ .$$

Viceversa, invertendo le relazioni:

$$T_1=\frac{S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1}{S_2} \quad , \quad T_2=\frac{S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1}{S_3} \quad , \quad T_3=\frac{S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1}{S_1} \ .$$

Queste trasformazioni tornano utili nella soluzione di circuiti non esprimibili esclusivamente in termini di serie e paralleli tra resistori.

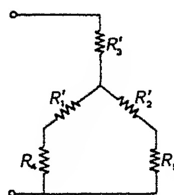
4.4. ***Calcolare la resistenza equivalente del circuito in figura. I valori delle resistenze sono $R_1=10$, $R_2=20$, $R_3=30$, $R_4=40$, $R_5=50\ \Omega$.***



Si tratta di un caso tipico in cui conviene applicare la trasformazione triangolo-stella. Le possibilità sono quattro: si possono trasformare in stelle i triangoli $R_1R_2R_3$ o $R_4R_3R_5$ oppure trasformare in triangoli le stelle $R_1R_3R_4$ o $R_2R_3R_5$. Scegliamo per esempio la prima alternativa: il circuito si trasforma come in figura con

$$R_1'=\frac{10\cdot 30}{10+30+20}=5\ \Omega \quad ,$$

$$R_2'=\frac{20\cdot 30}{60}=10\ \Omega \quad , \quad R_3'=\frac{10\cdot 20}{60}=3.3\ \Omega \ .$$



Dopo la trasformazione la soluzione è immediata: le due serie, $R_1'+R_4=45\ \Omega$ e $R_2'+R_5=60\ \Omega$, sono in parallelo tra loro ed equivalgono a $R^*=25.7\ \Omega$; la resistenza totale è $R=R_3'+R^*=29\ \Omega$.

Dai due terminali il circuito è visto semplicemente

come un resistore con $R=29\ \Omega$: nessuna misura esterna ci può permettere di risalire allo schema elettrico effettivo.

4.5. ***Verificare che per due resistori (R_1, R_2) connessi in parallelo la distribuzione delle correnti è quella che rende minima la potenza dissipata per effetto Joule.***

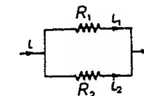
Due resistori in parallelo, di resistenze R_1 e R_2, percorsi dalle correnti i_1 e i_2, hanno la stessa d.d.p. ai loro capi per cui $i_1R_1=i_2R_2$. Inoltre, se i è la corrente nel circuito in cui il parallelo è inserito, $i=i_1+i_2$. Facendo sistema si ottiene:

$$i_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,i \quad , \quad i_2=\frac{R_1}{R_1+R_2}\,i \ . \qquad (a)$$

Invece che i_1 e i_2 chiamiamo ora i^* e $i-i^*$ le correnti che circolano nei resistori R_1 e R_2; la potenza totale vale

$$P=R_1 i^{*2}+R_2(i-i^*)^2 \ .$$

La derivata $dP/di^*=2[i^*(R_1+R_2)-iR_2]$ è nulla quando



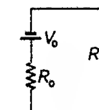
$$i^*=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,i=i_1$$

e questo estremo è un minimo in quanto $d^2P/di^{*2}=2(R_1+R_2)$ è maggiore di zero. Si è così verificato che la distribuzione reale delle correnti, data dalla (a), è proprio quella che corrisponde al minimo della potenza dissipata.

4.6. ***Calcolare qual è la condizione per cui è massima la potenza dissipata in un resistore (R) collegato ad un generatore (V_0, R_0). Disegnare l'andamento in funzione di R della potenza totale, di quella dissipata su R e su R_0, nonché della corrente nel circuito nel caso in cui $V_0=20$ V e $R_0=10\ \Omega$.***

Facciamo riferimento al semplice schema della figura: la potenza dissipata sul resistore esterno, che spesso viene detto di carico, è

$$P=Ri^2=R\,\frac{V_0^2}{(R_0+R)^2} \quad ,$$



funzione di R. Annulliamo la derivata rispetto a R:

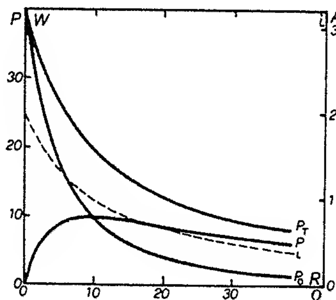
$$\frac{dP}{dR}=V_0^2\,\frac{R_0-R}{(R_0+R)^3}=0 \quad \Rightarrow \quad R=R_0 \ .$$

Questo estremo è un massimo in quanto la derivata seconda è negativa per $R = R_0$. Concludiamo quindi che la potenza dissipata sulla resistenza di carico è massima quando questa è eguale alla resistenza interna del generatore; il massimo vale $P_{max} = V_0^2/4R_0$.

La corrente nel circuito, $i = V_0/(R_0 + R)$, la potenza totale erogata dal generatore, $P_T = V_0 i = V_0^2/(R_0 + R)$ e quella dissipata su R_0, $P_0 = R_0 i^2 = R_0 V_0^2/(R_0 + R)^2$, sono funzioni monotone decrescenti della resistenza R. La potenza P dissipata su R ha invece un massimo come abbiamo appena visto e notiamo dalla figura che l'andamento di P non è simmetrico rispetto all'ascissa del massimo ($R = R_0$). Per avere un'idea dell'asimmetria si può determinare l'intervallo entro il quale la potenza è superiore o eguale a $P_{max}/2$: gli estremi sono dati da

$$P = \frac{RV_0^2}{(R_0 + R)^2} = \frac{V_0^2}{8R_0} \quad \Rightarrow \quad R^2 - 6R_0R + R_0^2 = 0$$

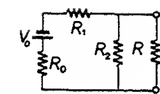
che ha le soluzioni $R = (3 \pm \sqrt{8})R_0$, cioè $R \simeq 0.17\ R_0 = 1.7\ \Omega$ e $R \simeq 5.83\ R_0 = 58.3\ \Omega$.



Nella pratica le condizioni di utilizzazione per un circuito come il nostro si discostano da quelle di massimo trasferimento di potenza. Un buon generatore ha una resistenza interna che è spesso trascurabile rispetto a quella di carico e ha, d'altra parte, un limite in corrente, cioè non può erogare più di una certa corrente. La condizione $R = R_0$ porterebbe, nella maggior parte dei casi, proprio oltre questo limite e non è realizzabile; si lavora invece con $R \gg R_0$ e tutta la potenza erogata è in sostanza spesa su R, pur restando inferiore a P_{max}. Se riguardiamo i grafici, è la situazione della parte destra della figura ($P_{max} > P \gg P_0$). Come vedremo però nel prossimo problema la condizione $R = R_0$ ha un significato più generale di quello che si potrebbe dedurre ragionando solo sul semplice schema che abbiamo considerato.

4.7. ***Calcolare che valore deve avere R nel circuito in figura affinché sia massima la potenza in essa dissipata; si prenda $R_0 = 20$, $R_1 = 30$, $R_2 = 50\ \Omega$.***

La corrente che circola nel circuito vale



$$i = \frac{V_0}{R_0 + R_1 + \dfrac{RR_2}{R + R_2}}$$

per cui quella attraverso R, in base alla relazione (a) del problema 4.5 è

$$i' = \frac{R_2}{R + R_2}\, i = \frac{R_2 V_0}{R(R_0 + R_1 + R_2) + R_2(R_0 + R_1)} \ .$$

In corrispondenza viene dissipata su R la potenza $P = Ri'^2$; la soluzione del problema si ottiene annullando dP/dR, da cui si ricava la condizione

$$R = \frac{R_2(R_0 + R_1)}{R_0 + R_1 + R_2} = 25\ \Omega \ .$$

Confrontando il risultato con la figura si nota che il valore trovato per R è il parallelo di R_2 e $R_0 + R_1$, cioè la resistenza che si vede dai terminali A e B quando V_0 è cortocircuitato, detta anche *resistenza di uscita* del circuito tra i terminali A e B (con R esclusa). In casi come questi torna molto utile l'applicazione del *teorema di Thevenin*, che enunciamo soltanto:

> presi due punti di una rete lineare comunque complessa, se tra essi si connette una resistenza R il comportamento elettrico è identico a quello che si otterrebbe se si connettesse R ai capi di un generatore di f.em. pari alla d.d.p. misurabile a vuoto tra i due punti e di resistenza interna eguale a quella vista dai due punti.

Applichiamo questa proprietà al nostro caso: tra i punti A e B, quando R non è connessa, c'è la d.d.p. $V_0' = R_2 V_0/(R_0 + R_1 + R_2)$ e la resistenza che si vede da A e B vale $R_0' = R_2(R_0 + R_1)/(R_0 + R_1 + R_2)$. La corrente attraverso R è quindi

$$i' = \frac{V_0'}{R_0' + R} = \frac{R_2 V_0}{R(R_0 + R_1 + R_2) + R_2(R_0 + R_1)} \ ,$$

che corrisponde al risultato trovato. Notiamo come dal punto di vista del teorema di Thevenin l'espressione di R sia conseguenza diretta del risultato del problema 4.6: infatti la condizione di massimo trasferimento di potenza è $R = R_0$ e nel caso ora proposto la resistenza interna, vista dai terminali A e B, è appunto R_0'. In altre parole la conoscenza del teorema di Thevenin permette di risolvere il problema immediatamente, con un semplice studio visuale del circuito, purché si abbia presente il risultato generale del problema 4.6. Vediamo così che la condizione $R = R_0$ si può realmente applicare, proprio in base al teorema di Thevenin: preso un resistore R in una rete qualsiasi, il resto è rappresentabile con due soli parametri V_0' e R_0' e ci riconduciamo allo schema semplice del problema 4.6; ma non valgono più le cautele pratiche espresse a proposito dei valori di R_0 perché ora R_0' può essere qualunque.

4.8. ***Si vuole costruire uno scalda-acqua per portare 10 litri d'acqua da 10°C a 50°C; si dispone di un generatore ($V_0 = 300$ V, $R_0 = 0$) capace di erogare al massimo 10 A e di un filo di costantana, con resistività $\varrho = 49 \cdot 10^{-8}$ Ωm e diametro $d = 1$ mm. Calcolare qual è il tempo minimo che occorre per il riscaldamento, quanti metri di filo sono necessari e quanto vale il consumo in chilowattore per un ciclo di funzionamento, se il rendimento del sistema è $\eta = 0.75$.***

La quantità di calore necessaria per il riscaldamento e il corrispondente lavoro valgono

$$Q = mc(T_2 - T_1) = 10 \cdot 1 \cdot 40 = 400 \text{ C}$$

$$L = \frac{Q}{\eta} = \frac{4.18 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^2}{0.75} = 2.23 \cdot 10^6 \text{ J} = 0.62 \text{ KWh.}$$

A sua volta il lavoro è dato da iV_0t e pertanto il tempo di minimo riscaldamento, corrispondente alle condizioni di massima erogazione, è

$$t = \frac{L}{iV_0} = 743 \text{ s} = 12' 23'' \quad .$$

La resistenza del filo deve essere $R = V_0/i = 30$ Ω per cui secondo la (4.7) è necessaria una lunghezza

$$l = \frac{R\Sigma}{\varrho} = 48.1 \text{ m}$$

(il coefficiente di temperatura della costantana è praticamente nullo).

4.9. ***Un filo di nichel, di diametro $d = 1$ mm, lungo $l = 1$ m, è mantenuto alla temperatura di 0°C. All'istante $t = 0$ esso viene connesso a un generatore ($V_0 = 1.5$ V, $R_0 = 0$). Calcolare i valori della temperatura e della resistenza del filo dopo 30 s nell'ipotesi che il filo sia termicamente isolato dall'ambiente. Le costanti fisiche del nichel sono: densità $\delta = 8.8 \cdot 10^3$ Kg/m^3, calore specifico $c = 0.45 \cdot 10^3$ J/Kg °C, resistività a 0°C $\varrho_0 = 7.8 \cdot 10^{-8}$ Ωm, coefficiente di temperatura $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ (°C)$^{-1}$. Si assuma trascurabile la dilatazione termica.***

L'aumento di temperatura di un filo conduttore, percorso da corrente e termicamente isolato, è dato dall'equazione

$$mc\,dT = P\,dt = \frac{V_0^2}{R}\,dt \quad .$$

Esprimendo $m = \delta\Sigma l$, $R = \varrho_0(1 + \alpha T)\; l/\Sigma$ e separando le variabili si ottiene:

$$(1 + \alpha T)\,dT = \frac{V_0^2}{\delta l^2 c\,\varrho_0}\,dt = K dt$$

Si integra il primo membro tra 0 e T, il secondo tra 0 e t:

$$T + \frac{\alpha}{2}\,T^2 = Kt \quad \Rightarrow \quad T^2 + \frac{2}{\alpha}\,T - \frac{2Kt}{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{\alpha}\,[-1 \pm (1 + 2K\alpha t)^{1/2}] \quad .$$

La soluzione cercata è quella col segno positivo. Passando ai numeri

$$K = \frac{V_0^2}{\delta l^2 c\,\varrho_0} = 7.26 \;\frac{°\text{C}}{\text{s}}$$

e dopo il tempo $t = 30$ s $T = 150$ °C. La resistenza iniziale vale:

$$R_0 = \varrho_0\,\frac{l}{\Sigma} = 0.099 \;\Omega \quad ;$$

dopo 30 s, ovvero alla temperatura $T = 150$°C,

$$R = R_0(1 + \alpha T) = 0.188 \;\Omega \;\simeq\; 1.9\,R_0 \quad .$$

L'aumento della resistenza col tempo comporta, essendo V_0 costante, la diminuzione della corrente che attraversa il filo.

Quando il tempo t diventa molto maggiore di $1/2K\alpha$ la relazione tra temperatura e tempo diviene con buona approssimazione

$$T = \left(\frac{2K}{\alpha}\,t\right)^{1/2} °\text{C} = 49.2\,t^{1/2} \;°\text{C}$$

essendo $1/2K\alpha = 11.5$ s. L'intervallo di tempo $t = 30$ s non soddisfa evidentemente alla condizione di essere molto maggiore di 11.5 s e infatti la formula approssimata darebbe $T = 270$ °C.

4.10. ***Un filo di stagno, di diametro $d = 1$ mm, si trova inizialmente a 0°C. All'istante $t = 0$ esso viene connesso ad un generatore che mantiene nel circuito una corrente costante $i = 4$ A. Supponendo che il filo sia termicamente isolato calcolare dopo quanto tempo esso raggiunge la temperatura di fusione $T_f = 231.8$ °C. Le costanti fisiche dello stagno sono: densità $\delta = 7.28 \cdot 10^3$ Kg/m^3, calore specifico $c = 0.23 \cdot 10^3$ J/Kg °C, resistività a 0 °C $\varrho_0 = 11.5 \cdot 10^{-8}$ Ωm, coefficiente di temperatura $\alpha = 4.2 \cdot 10^{-3}$ (°C)$^{-1}$.***

L'equazione che lega la temperatura al tempo è

$$mc\,dT = P dt = Ri^2\,dt$$

con $m = \delta\Sigma l$ e $R = \varrho_0(1 + \alpha T)\; l/\Sigma$. Sostituendo e separando le variabili

$$\frac{dT}{1 + \alpha T} = \frac{\varrho_0 i^2}{\Sigma^2 \delta c}\,dt = H\,dt \quad .$$

Integrando si arriva al risultato

$$\log(1 + \alpha T) = \alpha H t \quad \Rightarrow \quad T = \frac{e^{\alpha H t} - 1}{\alpha} \quad .$$

Vediamo che a corrente costante la variazione della temperatura nel tempo è diversa da quella che si ha a d.d.p. costante (problema 4.9); a parità di materiali e di condizioni geometriche la variazione a corrente costante è molto più rapida, come del resto è facilmente intuibile.

Nel nostro caso numerico

$$H = \frac{\varrho_0 i^2}{\Sigma^2 \delta c} = 1.78 \ \frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \quad , \quad t = \frac{1}{\alpha H} \log(1 + \alpha T_f) = 91 \ \mathrm{s} = 1'31'' \ .$$

4.11. ***Dedurre la legge con cui varia nel tempo la temperatura di un filo percorso da una corrente costante se non c'è isolamento termico. In particolare eseguire il calcolo per un filo di argentana lungo $l = 1$ m, di diametro $d = 3$ mm, percorso da una corrente $i = 10$ A. La densità dell'argentana è $\delta = 8.65 \cdot 10^3$ Kg/m^3, il calore specifico $c = 0.42 \cdot 10^3$ J/Kg °C, la resistività a 0°C $\varrho_0 = 42 \cdot 10^{-8}$ Ωm, la conducibilità termica esterna $h = 16.3$ J/m^{2}s°C, mentre il coefficiente di temperatura è nullo. Si assuma che l'ambiente esterno sia a 0°C.***

Se il filo non è termicamente isolato il calore prodotto per effetto Joule viene in parte ceduto al filo la cui temperatura aumenta, in parte ceduto all'esterno. Per quest'ultimo fenomeno supponiamo che valga la legge di Newton: la quantità di calore ceduta nel tempo dt dal filo a temperatura T all'ambiente a temperatura T_0 è data dall'espressione

$$dQ = hS(T - T_0)\,dt$$

dove S è la superficie laterale del filo e h la sua conducibilità termica esterna. Il bilancio energetico si scrive quindi:

$$Ri^2\,dt = mc\,dt + hS(T - T_0)\,dt \quad .$$

La massa è $m = \delta\Sigma l$, la resistenza $R = \varrho_0(1 + \alpha T)l/\Sigma$; posto

$$A = \varrho_0 \frac{l}{\Sigma} i^2 - hST_0 \quad , \quad B = \varrho_0 \frac{l}{\Sigma} i^2\alpha - hS \quad , \quad C = \delta\Sigma l c \ ,$$

l'equazione precedente diviene

$$(A + BT)\,dt = C\,dT \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{A + BT} = \frac{1}{C}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{A + BT}{A + BT_0} = \frac{B}{C}\,t \quad \Rightarrow \quad T(t) = \frac{(A + BT_0)e^{Bt/C} - A}{B} \quad .$$

Nel caso specifico $\alpha = 0$, $T_0 = 0$ abbiamo la soluzione:

$$T = \frac{\varrho_0 l i^2}{hS\Sigma}\left(1 - e^{-hSt/\delta\Sigma lc}\right) = T^*\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad .$$

Dopo un tempo $t \geqslant 3\tau$ con $\tau = \delta\Sigma lc/hS$ la temperatura assume in pratica il valore di equilibrio $T^* = \varrho_0 l i^2/hS\Sigma$: in queste condizioni il calore prodotto per effetto Joule viene integralmente ceduto all'ambiente.

Numericamente

$$\tau = \frac{\delta lc}{h}\frac{\Sigma}{S} = \frac{\delta lc}{h}\frac{\pi d^2}{4}\frac{1}{\pi d l} = \frac{\delta dc}{4h} = 167 \ \mathrm{s} = 2'47'' \ ,$$

$$T^* = \frac{\varrho_0 l i^2}{hS\Sigma} = \frac{4\varrho_0 i^2}{h\pi^2 d^3} = 38.8 \ °\mathrm{C} \ .$$

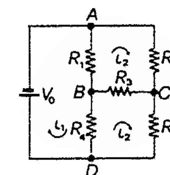
La temperatura di equilibrio viene raggiunta dopo circa 10 minuti.

4.12. ***Nel circuito in figura determinare la corrente erogata dal generatore e quella che attraversa il resistore R_3. Si assuma $V_0 = 100$ V, $R_1 = 10$, $R_2 = 20$, $R_3 = 30$, $R_4 = 40$, $R_5 = 50$ Ω.***

Risolviamo il problem[illegible] rincipio di Kirchhoff; nella rete abbiamo 4 nodi (A, B, C, D) e 6 rami per cui il numero di correnti indipendenti secondo (4.12) è

$$M = 6 - 4 + 1 = 3 \quad .$$

Scegliamo arbitrariamente le tre correnti come in figura; il criterio indicato nel paragrafo 4e. ci assicura che esse sono realmente indipendenti. Le equazioni delle corrispondenti maglie sono:



$$\begin{aligned} V_0 &= R_1(i_1 - i_2) + R_4(i_1 - i_3) \\ 0 &= R_1(i_2 - i_1) + R_2 i_2 + R_3(i_2 - i_3) \\ 0 &= R_4(i_3 - i_1) + R_3(i_3 - i_2) + R_5 i_3 \quad . \end{aligned}$$

Queste possono essere riordinate raccogliendo i coefficienti delle incognite:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4)i_1 \quad & - R_1 i_2 & - R_4 i_3 \quad & = V_0 \\ -R_1 i_1 \quad & + (R_1 + R_2 + R_3)i_2 & - R_3 i_3 \quad & = 0 \\ -R_4 i_1 \quad & - R_3 i_2 & + (R_3 + R_4 + R_5)i_3 & = 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che il sistema lineare di equazioni algebriche ottenuto gode delle seguenti proprietà:

1) la matrice dei coefficienti è simmetrica rispetto alla diagonale principale;

2) nell'equazione dell'i-esima maglia la corrente i-esima ha come coefficiente la somma delle resistenze della maglia stessa;

3) sempre nella stessa equazione i coefficienti delle correnti delle altre maglie sono eguali alla somma delle resistenze che la maglia i-esima ha in comune con ciascuna delle altre maglie (e sono quindi nulli se il tratto in comune ha resistenza trascurabile oppure se non c'è ramo comune);

4) i coefficienti diagonali sono sempre positivi; il segno del coefficiente R_{ij} è positivo o negativo a seconda che nel ramo comune alle maglie i-esima e j-esima le correnti delle due maglie siano concordi o discordi;

5) l'i-esimo termine noto è dato dalla somma delle f.em. della maglia i-esima, ciascuna presa con segno positivo o negativo a seconda che tenda o meno a far circolare corrente nello stesso verso della corrente i-esima.

Con questo semplice insieme di regole le equazioni per le correnti indipendenti possono essere scritte direttamente senza passare per il principio di Kirchhoff: tale metodo di soluzione si dice *metodo delle maglie*. Risolto il sistema le correnti possono avere segno positivo o negativo: in questo secondo caso la corrente nella realtà ha verso opposto a quello scelto arbitrariamente all'inizio.

Usando i dati numerici del testo abbiamo:

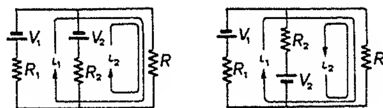
$$\begin{aligned} 50i_1 - 10i_2 - 40i_3 &= 100 \\ -10i_1 + 60i_2 - 30i_3 &= 0 \\ -40i_1 - 30i_2 + 120i_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_1 &= 3.44\ \text{A} \\ i_2 &= 1.31\ \text{A} \\ i_3 &= 1.48\ \text{A} \end{aligned} \; .$$

Le correnti circolano proprio secondo i versi scelti originariamente; la corrente erogata dal generatore è $i_1 = 3.44$ A, quella che attraversa il resistore R_3 è $i_3 - i_2 = 0.17$ A, concorde con i_3.

Il circuito studiato è identico a quello del problema 4.4; verifichiamo che il rapporto V_0/i_1 vale proprio 29 Ω: questo è cioè il valore della *resistenza d'ingresso* del circuito, calcolata per altra via nel problema 4.4.

Tale circuito è noto come *ponte di Wheatstone* (e in generale si chiamano ponti circuiti con la stessa topologia): lasciamo per esercizio la verifica che se le resistenze soddisfano alla condizione $R_1R_5 = R_2R_4$ il ponte è in equilibrio, cioè la corrente nel resistore R_3 è nulla.

4.13. ***Due generatori ($V_1 = 10$ V, $R_1 = 1$ Ω, $V_2 = 12$ V, $R_2 = 2$ Ω) possono essere connessi esclusivamente in parallelo tra loro e con un resistore ($R = 5$ Ω). Calcolare nei due casi possibili le correnti e le potenze erogate dai generatori, la d.d.p. ai capi di R e la potenza in esso dissipata.***



I due possibili collegamenti sono quelli indicati nelle figure; conviene scegliere le maglie in questa maniera perché così le incognite danno direttamente le correnti cercate. Cominciamo col circuito a sinistra, generatori concordi, e risolviamo col metodo delle maglie:

$$\begin{aligned} V_1 &= (R_1 + R)\,i_1 + R\,i_2 \\ V_2 &= R\,i_1 + (R_2 + R)\,i_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_1 &= \frac{(V_1 - V_2)R + V_1R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2} = 0.59\ \text{A} \\ i_2 &= \frac{(V_2 - V_1)R + V_2R_1}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2} = 1.30\ \text{A} \end{aligned}$$

Le potenze erogate dai genitori sono:

$$P_1 = i_1V_1 = 5.9\ \text{W} \quad , \quad P_2 = i_2V_2 = 15.6\ \text{W} \quad ;$$

la d.d.p. ai capi di R e la potenza dissipata su R valgono:

$$(i_1 + i_2)R = \frac{(V_1R_2 + V_2R_1)R}{R(R_1 + R_2) + R_1R_2} = 9.45\ \text{V} \quad , \quad P_R = R(i_1 + i_2)^2 = 17.9\ \text{W} \quad .$$

Il rendimento, definibile come $P_R/(P_1 + P_2)$, è 0.83.

Anche per il collegamento con i generatori discordi si può seguire lo stesso metodo e si ottiene un risultato che si può formalmente derivare da quello appena trovato cambiando V_2 in $-V_2$ e i_2 in $-i_2$. I numeri sono:

$$i_1 = 7.65\ \text{A} \quad , \quad i_2 = 7.18\ \text{A} \quad , \quad P_1 = 76.5\ \text{W} \quad , \quad P_2 = 86.2\ \text{W} \quad ,$$

$$(i_1 - i_2)R = 2.35\ \text{V} \quad , \quad P_R = 1.10\ \text{W} \quad , \quad \frac{P_R}{P_1 + P_2} = 6.7 \cdot 10^{-3} \quad .$$

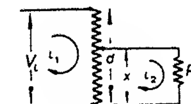
Per una utilizzazione esterna il primo collegamento è certamente più conveniente.

4.14. ***Un resistore di resistenza R e lunghezza d è lineare: quando il cursore è in posizione x (vedi figura) la resistenza della parte inferiore vale xR/d. Calcolare il rapporto tra la d.d.p. V_u ai capi di R_c e la d.d.p. V_i ai capi di R in funzione di x.***

Risolviamo il problema col metodo delle maglie:

$$V_i = R\,i_1 - \frac{x}{d}\,R\,i_2$$

$$0 = -\frac{x}{d}\,R\,i_1 + \left(R_c + \frac{x}{d}\,R\right)\,i_2$$



Moltiplichiamo la prima equazione per x/d e la sommiamo alla seconda ottenendo

$$i_2 = \frac{x}{d} \frac{V_i}{R_c + \frac{x}{d}\left(1 - \frac{x}{d}\right) R} .$$

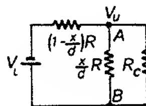
La d.d.p. V_u vale $i_2 R_c$ e pertanto

$$\frac{V_u}{V_i} = \frac{x}{d} \frac{R_c}{R_c + \frac{x}{d}\left(1 - \frac{x}{d}\right) R} . \qquad (a)$$

La relazione non è lineare, anche se tale è il resistore; solo se $R_c \gg R$ $V_u/V_i = x/d$.

La soluzione si può ottenere anche applicando il primo principio di Kirchhoff. Ridisegnamo il circuito come in figura: la somma delle correnti uscenti dal nodo A deve essere nulla; quindi

$$\frac{V_u - V_i}{\left(1 - \frac{x}{d}\right) R} + \frac{V_u}{\frac{x}{d} R} + \frac{V_u}{R_c} = 0$$



Il potenziale del nodo B è stato assunto come riferimento; inoltre V_i è stata presa col segno negativo poiché fa entrare corrente nel nodo A. Risistemando l'equazione si arriva alla relazione (a); questo secondo tipo di soluzione è un caso particolarmente semplice di applicazione del *metodo dei nodi* che troveremo nel problema 4.15.

È chiaro, naturalmente, che si può arrivare alla soluzione in base a semplici considerazioni di serie e paralleli tra resistenze; anzi lasciamo come esercizio la verifica della relazione (a) Abbiamo preferito utilizzare metodi più generali per mettere in evidenza la loro semplicità ed eleganza

Lo schema proposto permette di applicare ai capi di R_c una d.d.p. variabile con continuità, agendo su un cursore, tra il valore zero e il valore V_i; in particolare, se la condizione $R_c \gg R$ è realizzata, lo strumento è lineare. Un tale schema si chiama *potenziometro* ed è molto usato nella pratica.

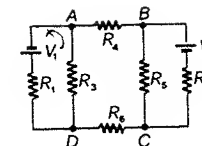
4.15. ***Risolvere il circuito della figura calcolando in particolare la corrente che attraversa il resistore di resistenza R_6. Si assuma $V_1 = 3$, $V_2 = 6$ V, $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$, $R_3 = 5$, $R_4 = 1$, $R_5 = 4$, $R_6 = 2$ Ω.***

Nel circuito ci sono in totale 4 nodi; se assumiamo come riferimento il potenziale di uno di questi, per esempio D, e applichiamo il primo principio di Kirchhoff agli altri tre nodi, prendendo le correnti sempre uscenti dai nodi, abbiamo le equazioni:

$$\frac{V_A - V_1}{R_1} + \frac{V_A}{R_3} + \frac{V_A - V_B}{R_4} = 0$$

$$\frac{V_B - V_A}{R_4} + \frac{V_B - V_C}{R_5} + \frac{V_B + V_2 - V_C}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_C}{R_6} + \frac{V_C - V_B}{R_5} + \frac{V_C - V_2 - V_B}{R_2} = 0$$



Il sistema, riordinato mettendo in evidenza le incognite V_A, V_B, V_C, diviene:

$$\begin{aligned}
&V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) - \frac{V_B}{R_4} = \frac{V_1}{R_1}\\
&-\frac{V_A}{R_4} + V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right) = -\frac{V_2}{R_2}\\
&- V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right) + V_C\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) = \frac{V_2}{R_2}
\end{aligned}$$

Si è così ottenuto un sistema lineare di equazioni algebriche con queste caratteristiche:

1) la matrice dei coefficienti è simmetrica rispetto alla diagonale principale;

2) nell'equazione dell'i-esimo nodo il potenziale di questo ha come coefficiente la somma degli inversi delle resistenze dei rami che partono dal nodo stesso;

3) sempre nella stessa equazione i coefficienti dei potenziali degli altri nodi sono dati dalla somma degli inversi delle resistenze dei rami che li collegano al nodo i-esimo; in particolare se non c'è collegamento diretto il coefficiente è nullo;

4) i coefficienti diagonali sono sempre positivi, gli altri sono tutti negativi;

5) il termine noto dell'i-esima equazione è dato dalla somma, fatta sui rami uscenti dall'i-esimo nodo, dei rapporti tra f.em. e resistenze di ogni singolo ramo; ciascun termine ha segno positivo o negativo a seconda che la f.em. tenda a far entrare corrente nel nodo o meno.

Sulla base di queste regole il sistema riordinato può essere scritto direttamente, senza passare attraverso il primo principio di Kirchhoff; il metodo di soluzione è detto *metodo dei nodi*.

Nel caso numerico che dobbiamo studiare le equazioni sono:

$$\begin{aligned}
3.20\, V_A - V_B &= 6 \\
- V_A + 2.25\, V_B - 1.25\, V_C &= -6 \\
- 1.25\, V_B + 1.75\, V_C &= 6
\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} V_A &= 1.93 \text{ V} \\ V_B &= 0.16 \text{ V} \\ V_C &= 3.54 \text{ V} \end{aligned} .$$

Noti i potenziali dei nodi rispetto al nodo D sono note le correnti nei rami del circuito. In particolare R_6 è attraversata dalla corrente $i_6 = 1.77$ A nel verso da C a D.

Vogliamo commentare brevemente i metodi di soluzione proposti in questo problema e nel problema 4.12. Essi corrispondono all'applicazione dei principi di Kirchhoff, ma hanno il vantaggio pratico di una scrittura semplificata oltre a quello essenziale di avere come incognite delle variabili indipendenti tra loro. Con il metodo delle maglie occorre risolvere $R-N+1$ equazioni, col metodo dei nodi $N-1$ equazioni; di volta in volta, a seconda della topologia del circuito, si deciderà quale metodo porge il minor numero di equazioni.

Dal punto di vista matematico entrambi i metodi portano alla soluzione di un sistema lineare di equazioni algebriche; tra le note proprietà di questi sistemi ricordiamo esplicitamente il *teorema di sovrapposizione*: se con una data n-pla a_i di termini noti si ha una certa soluzione e con una diversa n-pla b_i si ha un'altra soluzione, in corrispondenza all'n-pla $a_i + b_i$ si ha una soluzione che è la somma delle soluzioni.

4.16. ***Calcolare il valore della corrente che attraversa il resistore R_3 nel circuito in figura se $V_1 = 100$ e $V_2 = 200$ V e se $R_1 = 10$, $R_2 = 20$, $R_3 = 30$, $R_4 = 40$, $R_5 = 50$ Ω.***

Applichiamo il teorema di sovrapposizione: se cortocircuitiamo il generatore V_2 il circuito diviene quello visto nel problema 4.12 e sappiamo che in tal caso il resistore R_3 è attraversato da una corrente di 0.17 A da sinistra verso destra. Se invece cortocircuitiamo il generatore V_1 il circuito diviene quello della seconda figura, risolvibile subito con serie e paralleli di resistenze. La resistenza equivalente è

$$R = R_3 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = 52.3\ \Omega$$

e quindi la corrente erogata dal generatore vale $i = V_2/R = 3.82$ A. Questa corrente attraversa R_3 nello stesso verso di quella dovuta al generatore V_1. La corrente totale è pertanto $0.17 + 3.82 = 3.99$ A. Si verifichi che si arriva allo stesso risultato applicando il metodo delle maglie.

4.17. ***Un conduttore non ohmico, nel quale corrente e d.d.p. ai capi sono legate dalla relazione $i = 10^{-3}\ V^{3/2}$, è connesso ad un generatore ($V_0 = 150$ V, $R_0 = 50$ Ω). Calcolare la corrente erogata dal generatore e la d.d.p. ai capi del conduttore.***

La corrente erogata dal generatore è legata a V_0 e R_0 dalla relazione

$$i = \frac{V_0 - V}{R_0} = -\frac{1}{R_0} V + \frac{V_0}{R_0} \quad , \qquad \text{(a)}$$

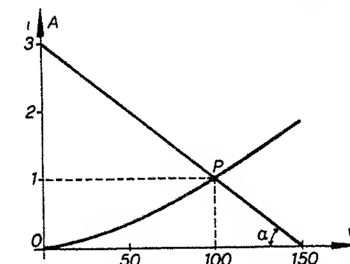
dove V è la d.d.p. ai capi del generatore e quindi del conduttore non ohmico. Inoltre:

$$i = 10^{-3}\ V^{3/2} \quad . \qquad \text{(b)}$$

La d.d.p. V risulta così determinata dall'equazione di terzo grado

$$10^{-6}\ V^3 = \left(\frac{V_0 - V}{R_0}\right)^2 \quad .$$

In generale, per una relazione qualunque tra i e V, l'equazione non ha una soluzione nota. Per questa ragione si preferisce ricorrere a una costruzione grafica: si cerca nel piano V, i l'intersezione tra le curve (a) e (b). La prima è una retta, di pendenza $-1/R_0$ e intercette $i_{V=0} = V_0/R_0$, $V_{i=0} = V_0$, detta *retta di carico*; la seconda, la cui espressione varia da caso a caso, viene chiamata caratteristica volt-ampere dell'elemento conduttore in questione. La costruzione per il nostro caso numerico è riportata in figura e le coordinate del punto di intersezione, detto punto di lavoro, sono $V = 100$ V, $i = 1$ A.



Nella pratica, la caratteristica volt-ampere di un conduttore non lineare viene data, mentre la retta di carico viene determinata in base al circuito cui il conduttore è collegato; notiamo che la pendenza dipende solo da R_0, mentre al variare di V_0 con R_0 costante la retta di carico compie una traslazione.

La f.em. V_0 e la resistenza interna R_0 vanno intese nel senso del teorema di Thevenin: V_0 è la d.d.p. che compare a vuoto tra i punti dove va connesso il conduttore, R_0 è la resistenza d'uscita vista da quei punti.

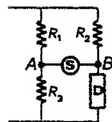
Il metodo qui delineato è importante nello studio di circuiti elettrici con elementi non lineari (valvole a vuoto, semiconduttori) e anche di sistemi diversi, come gli elettromagneti (vedi capitolo 7).

4.18. ***Nei rami di un ponte di Wheatstone sono inseriti, come mostrato in figura, tre resistori ($R_1 = 2.83$, $R_2 = 20$, $R_3 = 5$ Ω) e un conduttore non ohmico che obbedisce alla legge $i = KV^4$. Se nello strumento non si osserva passaggio di corrente, mentre quella attraverso D vale $i_2 = 0.02$ A, qual è il valore di K?***

Quando non c'è corrente nello strumento, cioè quando il ponte è in equilibrio, i punti A e B sono allo stesso potenziale e R_1 e R_3 sono percorsi dalla stessa corrente così come R_2 e D; pertanto

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 \quad , \quad i_1 R_3 = V \quad , \quad i_2 = KV^4 \quad .$$

Eliminiamo V dalla seconda e terza equazione e facciamo sistema con la prima:



$$K = \left(\frac{R_1}{R_2 R_3}\right)^4 \frac{1}{i_2^3} = 8 \cdot 10^{-2} \frac{\text{A}}{\text{V}^4} \quad .$$

4.19. ***Calcolare la resistenza offerta da una sfera cava di materiale conduttore al passaggio di una corrente radiale. Siano $R_1 = 0.5$ cm e $R_2 = 2$ cm i raggi interno ed esterno e $\varrho = 35 \cdot 10^{-6}$ Ωm la resistività del materiale.***

Ad una corrente radiale il conduttore presenta una sezione che dipende dal raggio, per cui occorre usare la (4.6): il tratto di conduttore compreso tra i raggi r e $r + dr$ ha la resistenza

$$dR = \varrho \frac{dr}{\Sigma} = \varrho \frac{dr}{4\pi r^2} \quad .$$

La resistenza totale si ottiene per integrazione:

$$R = \int_{R_1}^{R_2} dr = \frac{\varrho}{4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\varrho}{4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Numericamente $R = 4.18 \cdot 10^{-4}$ Ω.

All'espressione (a) si arriva anche con un diverso procedimento Supponiamo che tra le armature di un condensatore, mantenute ai potenziali V_1 e V_2 rispettivamente, venga inserito un materiale conduttore di resistività ϱ. In esso si stabilisce una corrente di densità j legata al campo elettrico E dalla (4.4). Se consideriamo una superficie Σ che racchiude una delle armature abbiamo:

$$\int_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \varrho \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{\varepsilon_0} = \varrho i = \varrho \frac{V_1 - V_2}{R} \qquad \text{(b)}$$

$$\Rightarrow \quad RC = \varrho \varepsilon_0 \quad .$$

Questa formula permette di ricavare espressioni di resistenze da espressioni di capacità, in condizioni geometriche equivalenti. Il caso che abbiamo visto è quello di un condensatore sferico di capacità $C = 4\pi\varepsilon_0 \, R_1 R_2/(R_2 - R_1)$ e da questa espressione e dalla (b) si ricava la (a).

4.20. ***Due sfere conduttrici eguali sono immerse a grande profondità in acqua marina ($\varrho = 0.25$ Ωm): il loro raggio è $r = 1$ cm, la distanza tra i loro centri $d = 10$ m. Calcolare la corrente che passa da una sfera all'altra quando tra di esse è applicata una d.d.p. $V = 10$ V.***

Utilizziamo la relazione (b) del problema precedente oltre ai risultati del problema 2.2. Abbiamo due sfere eguali, molto distanti tra loro, con cariche q e $-q$ rispettivamente, che si trovano ai potenziali:

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) \quad , \quad V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) \quad .$$

Esse costituiscono un condensatore di capacità

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{rd}{d - r} = 2\pi\varepsilon_0 r \qquad (d \gg r) \quad .$$

Ne segue che la resistenza tra le due sfere vale

$$R = \varrho \frac{\varepsilon_0}{C} = \frac{\varrho}{2\pi r} \quad .$$

Introducendo i valori dati $R = 3.98$ Ω e $i = V/R = 2.51$ A.

4.21. ***Un generatore elettrostatico di tipo Van de Graaf ha la testa sferica di raggio $R = 1.5$ m; la cinghia che serve a caricarlo ha una larghezza $d = 25$ cm e trasporta la carica, distribuita con densità uniforme $\sigma = 10^{-5}$ C/m², con una velocità $v = 20$ m/s. Si calcoli il lavoro che bisogna spendere per far assumere alla testa, inizialmente scarica, il massimo potenziale V_M, compatibilmente col fatto di non avere scariche nell'aria in condizioni ordinarie di pressione e temperatura. A regime, cioè a potenziale costante, si preleva dal generatore la massima corrente continua che può erogare; calcolare la potenza necessaria per mantenere tale corrente.***

La limitazione al massimo potenziale raggiungibile dalla testa sferica è posta dalla rigidità dielettrica dell'aria, $E_S = 3 \cdot 10^6$ V/m: il campo elettrico superficiale σ_0/ε_0 non può superare E_S. Detta $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ la capacità della sfera, si ha:

$$V = \frac{q}{C} = \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} R \quad \Rightarrow \quad V_{max} = E_S R = 4.5 \cdot 10^6 \text{ V} \quad .$$

Il lavoro necessario per portare la testa al potenziale V_{max} è

$$L = \frac{1}{2} C V_{max}^2 = 2\pi\varepsilon_0 R^3 E_S^2 = 1.69 \cdot 10^3 \text{ J} \quad .$$

In condizioni di regime la massima corrente prelevabile è eguale alla corrente trasportata dalla cinghia; in un secondo questa porta alla testa la carica distribuita sulla superficie ld, dove l è lo spazio percorso dalla cinghia in un secondo, pari a v; quindi

$$q^* = \sigma v d = 5 \cdot 10^{-5}\ \frac{C}{s} \quad\Rightarrow\quad i = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{A}$$

$$\Rightarrow\quad P = i\, V_M = 225\ \text{W}.$$

4.22. ***Nel circuito in figura il condensatore è carico a una d.d.p. V_0; all'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore. Dare le leggi con cui variano nel tempo la carica e la d.d.p. del condensatore, la corrente che passa nel circuito e il lavoro speso nel resistore. Si assuma $C = 1\ \mu F$, $R = 1\ M\Omega$, $V_0 = 100$ V.***

Quando l'interruttore viene chiuso le cariche possono passare attraverso il resistore da un'armatura all'altra, dando origine ad una corrente; in tal caso si ha una progressiva diminuzione delle cariche sulle armature e della d.d.p. ai capi del condensatore. Convenzionalmente si assume che cariche positive passino dall'armatura positiva a quella negativa del condensatore.

Nell'istante generico t del processo valgono le seguenti relazioni:

$$R i(t) = V(t) = \frac{q(t)}{C} \quad , \quad i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} \quad ,$$

il segno meno essendo necessario in quanto, mentre la corrente è un numero intrinsecamente positivo, la carica ha derivata negativa, diminuendo nel tempo. Ne risulta l'equazione

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \quad\Rightarrow\quad \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} \quad -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow\quad \log\frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC} \quad\Rightarrow\quad q = q_0\, e^{-t/\tau} \quad , \quad \tau = RC \quad .$$

La costante $q_0 = CV_0$ è il valore della carica iniziale del condensatore, al tempo $t = 0$. Dall'espressione trovata per q si ricavano quelle per V e i:

$$V = \frac{q}{C} = V_0\, e^{-t/RC} \quad , \quad i = -\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/RC} \quad .$$

Sia q che V che i seguono lo stesso tipo di variazione: decrescita esponenziale a partire dal massimo valore, quello iniziale. La decrescita è regolata dalla *costante di tempo* $\tau = RC$: dopo $t = \tau$ la grandezza in esame si è ridotta di un fattore $1/e$, dopo 2τ di $1/e^2$ e così via. Anche se teoricamente il valore zero sarebbe raggiunto in un tempo infinito, il condensatore risulta in pratica scarico dopo un tempo t dell'ordine di qualche costante di tempo: la rapidità della scarica dipende dal prodotto RC.

La potenza dissipata su R e il corrispondente lavoro nel tempo dt sono:

$$P = R i^2 = \frac{V_0^2}{R}\, e^{-2t/RC} \quad , \quad dL = P dt \quad .$$

In un intervallo di tempo finito si spende il lavoro

$$L = \frac{V_0^2}{R}\int_0^t e^{-2t/RC}\, dt = \frac{1}{2}\, CV_0^2\, (1 - e^{-2t/RC}) \quad .$$

Per $t \to \infty$ il termine esponenziale tende a zero e si vede che complessivamente su R alla fine del processo è stata dissipata l'energia elettrostatica del condensatore.

Numericamente $RC = 10^6 \cdot 10^{-6} = 1$ s, $CV_0 = 10^{-4}$ C, $V_0/R = 10^{-4}$ A e perciò

$$q = 10^{-4}\, e^{-t} \quad , \quad V = 10^2 e^{-t} \quad , \quad i = 10^{-4}\, e^{-t} \quad , \quad W = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{J}.$$

4.23. ***Un condensatore ($C = 1\ \mu F$) ha un dielettrico di resistività $\varrho = 10^{10}\ \Omega$m. Se esso è carico a una d.d.p. $V_0 = 10^3$ V, calcolare dopo quanto tempo la d.d.p. ai suoi capi vale 100 V.***

La resistività non infinita del dielettrico permette un passaggio di carica attraverso il condensatore. Per calcolare la resistenza di scarica utilizziamo la relazione (b) del problema 4.19:

$$R = \varrho\,\frac{\varepsilon_0}{C} = 88.5\ \text{K}\Omega \quad .$$

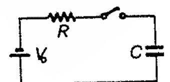
La legge di scarica secondo il problema 4.22 è

$$V = V_0 e^{-t/RC} \quad\Rightarrow\quad t = RC\, \log\frac{V_0}{V} = 0.2\ \text{s} \quad .$$

Il passaggio di cariche attraverso il dielettrico è il principale meccanismo con il quale si scaricano tutti i condensatori che siano prima caricati e poi lasciati isolati.

4.24. ***Nel circuito in figura il condensatore è inizialmente scarico; all'istante $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Dare le leggi di variazione nel tempo della carica e della d.d.p. del condensatore nonché della corrente che passa nel circuito. Calcolare inoltre il lavoro totale fatto dal generatore e quello speso su R. Si assuma $C = 1\ \mu F$, $R = 1\ M\Omega$, $V_0 = 100$ V.***

Alla chiusura dell'interruttore il generatore fa affluire cariche sulle armature del condensatore ai cui capi compare una d.d.p.; l'equazione del circuito è:



$$V_0 = V_R + V_C = R i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

con $i(t) = dq(t)/dt$ (questa volta la carica cresce). Otteniamo così:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} - \frac{V_0}{R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dq}{q - CV_0} = -\frac{dt}{RC} \ .$$

Integrando tra l'istante $t = 0$ in cui $q = 0$ e l'istante generito t otteniamo

$\log \frac{q - CV_0}{-CV_0} = -\frac{t}{RC}$ e in definitiva:

$$q = CV_0\,(1 - e^{-t/RC}) \quad , \quad V_C = \frac{q}{C} = V_0\,(1 - e^{-t/RC}) \quad ,$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0 - V_C}{R} = \frac{V_0}{R}\,e^{-t/RC} \ .$$

La carica e la d.d.p. del condensatore tendono a un limite finito, raggiungibile in teoria dopo un tempo infinito, in pratica dopo alcune costanti di tempo; la corrente invece decresce esponenzialmente tendendo a zero.

Il lavoro speso dal generatore in un tempo t è:

$$L = \int_0^t V_0\,i\,dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^t e^{-t/RC}\,dt = CV_0^2\,(1 - e^{-t/RC}) \ .$$

Il lavoro totale fornito dal generatore nel processo di carica del condensatore è CV_0^2: di questo $1/2\ CV_0^2$ va in energia elettrostatica e quindi la restante parte $1/2\ CV_0^2$ è dissipata in R per effetto Joule, come si può verificare direttamente integrando l'espressione $Ri^2\,dt$ tra zero e infinito.

Senza eseguire nessun calcolo si poteva osservare che la corrente nel circuito è la stessa sia nel processo di carica che in quello di scarica per cui il lavoro speso su R è lo stesso nei due casi. Nella scarica L è fornito dal condensatore ($L = W$), nella carica lo stesso L è fornito dal generatore che quindi eroga il lavoro $2W = CV_0^2$.

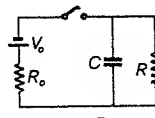
Numericamente

$$q = 10^{-4}\,(1 - e^{-t}) \quad , \quad V = 10^2\,(1 - e^{-t}) \quad , \quad i = 10^{-4}\,e^{-t} \quad ,$$

$$L = 10^{-2}\ \text{J} \quad , \quad L_R = W = \frac{L}{2} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{J} \ .$$

4.25. ***All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore nel circuito in figura. Calcolare il valore massimo della d.d.p. ai capi del condensatore e la costante di tempo del sistema se $V_0 = 10^3$ V, $R_0 = 5$ KΩ, $C = 10$ μF, $R = 15$ KΩ.***

All'istante generico t dopo la chiusura dell'interruttore valgono nel circuito le seguenti relazioni:



$$V_0 - R_0\,i(t) = V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} + \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V(t)}{R} + C\,\frac{dV(t)}{dt} \ .$$

Riordinando e prendento $V(t)$ come funzione incognita si ottiene:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R'C} - \frac{V_0}{R_0C} = 0$$

dove R' è il parallelo di R e R_0. Questa equazione si integra per separazione delle variabili; imponendo la condizione iniziale $V = 0$ per $t = 0$ si ha:

$$V = \frac{R}{R + R_0}\,V_0\,(1 - e^{-t/R'C}) \ .$$

La d.d.p. ai capi del condensatore tende al valore $RV_0/(R + R_0)$ con costante di tempo $R'C = RR_0C/(R + R_0)$. Il risultato era facilmente prevedibile: in condizioni di regime il condensatore non influisce più sulla distribuzione delle correnti e la d.d.p. ai capi di R (e di C) è $V = V_0 - R_0 i$; ma $i = V_0/(R + R_0)$ e perciò

$$V = V_0 - R_0\,\frac{V_0}{R + R_0} = \frac{R}{R + R_0}\,V_0 \ .$$

Un altro metodo di soluzione si può avere sfruttando il teorema di Thevenin; se consideriamo il condensatore staccato dal resto del circuito dai suoi estremi si vede la resistenza $R' = RR_0/(R + R_0)$, mentre la d.d.p. a vuoto è quella ai capi di R, $V' = RV_0/(R + R_0)$: il condensatore dunque vede un generatore di f.e.m. V' e resistenza interna R' per cui la legge di carica è

$$V = V'\,(1 - e^{-t/R'C}) = \frac{R}{R + R_0}\,V_0\,(1 - e^{-t/R'C}) \ .$$

L'espressione numerica di $V(t)$ è

$$V(t) = 750\,(1 - e^{-t/3\,75 \cdot 10^{-2}})\ \text{V} \quad :$$

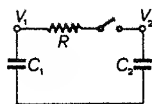
il valore finale di 750 V può considerarsi raggiunto dopo circa 0.15 s.

Secondo quanto visto nel problema 4.23 il circuito studiato ora può essere assimilato al circuito equivalente per la carica di un condensatore con dielettrico a resistività non infinita: ai capi del condensatore bisogna infatti immaginare in tal caso la presenza di una *resistenza di perdita*.

4.26. ***I condensatori in figura sono carichi ai potenziali $V_{0,1} = 500$ V e $V_{0,2} = 200$ V; i valori delle capacità sono $C_1 = 2$ μF e $C_2 = 4$ μF, la resistenza vale $R = 3$ MΩ. All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore. Calcolare come variano nel tempo le cariche e i potenziali dei condensatori e la corrente nel circuito. Dare inoltre il valore del lavoro totale speso su R.***

Quando viene chiuso l'interruttore c'è un flusso di cariche dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore; la carica q_1 e il potenziale V_1 del condensatore C_1 decrescono, l'opposto succede per q_2 e V_2. La corrente

si può scrivere $i = -dq_1/dt = dq_2/dt$ e l'equazione del circuito in un istante generico è



$$\frac{q_1}{C_1} = Ri + \frac{q_2}{C_2} \quad .$$

Se deriviamo rispetto al tempo, usiamo le definizioni della corrente e definiamo $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, otteniamo $R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$ da cui integrando

$$i = i_0 e^{-t/RC} \quad .$$

All'istante $t = 0$ la corrente vale $i_0 = (V_{0,1} - V_{0,2})/R$ e quindi

$$i = \frac{V_{0,1} - V_{0,2}}{R} e^{-t/RC} = 10^{-4} e^{-t/4} \text{ A} \quad .$$

Nella costante di tempo compare la serie delle capacità: e in effetti per la corrente le due capacità appaiono in serie.

Nota la corrente si possono determinare le cariche dei condensatori:

$$i = \frac{dq_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad dq_2 = \frac{V_{0,1} - V_{0,2}}{R} e^{-t/RC}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad q_2 = -C(V_{0,1} - V_{0,2})\, e^{-t/RC} + \text{cost} \quad .$$

La costante si determina in base al fatto che per $t = 0$ $q_2 = C_2 V_{0,2}$ e risulta $\frac{C_2}{C_1 + C_2}(C_1 V_{0,1} + C_2 V_{0,2})$; l'espressione finale della carica q_2 è quindi

$$q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(C_1 V_{0,1} + C_2 V_{0,2}) - C(V_{0,1} - V_{0,2})\, e^{-t/RC}$$

In modo analogo si potrebbe calcolare q_1, ma conviene ricorrere alla conservazione della carica: in ogni istante deve essere $q_1 + q_2 = q_0 = C_1 V_{0,1} + C_2 V_{0,2}$ per cui

$$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(C_1 V_{0,1} + C_2 V_{0,2}) + C(V_{0,1} - V_{0,2})\, e^{-t/RC} \quad .$$

Per $t \to \infty$ le cariche tendono ai valori

$$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q_0 \quad , \quad q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q_0 \quad .$$

Note le cariche, sono note le differenze di potenziale: $V_1 = q_1/C_1$ e $V_2 = q_2/C_2$. Passando ai numeri

$$q_1 = 6 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} e^{-t/4} \text{ C} \quad , \quad q_2 = 12 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} e^{-t/4} \text{ C} \quad ,$$

$$V_1 = 300 + 200\, e^{-t/4} \text{ V} \quad , \quad V_2 = 300 - 100\, e^{-t/4} \text{ V}$$

$$q_{1,\infty} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad , \quad q_{2,\infty} = 12 \cdot 10^{-4} \text{ C} \quad , \quad V_{1,\infty} = V_{2,\infty} = 300 \text{ V} \quad .$$

Infine, il lavoro speso su R vale

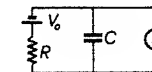
$$L = \int_0^\infty R i^2\, dt = \frac{(V_{0,1} - V_{0,2})^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC}\, dt = \frac{1}{2}\, C(V_{0,1} - V_{0,2})^2 = 6 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad .$$

Abbiamo così ritrovato tutti i risultati del problema 2.7; in particolare notiamo che il lavoro speso su R è proprio la differenza tra energia elettrostatica iniziale e finale del sistema.

4.27. ***Un condensatore ($C = 10$ nF) viene caricato attraverso un resistore ($R = 15$ KΩ) mediante un generatore ($V_0 = 300$ V). Una lampadina al neon L, avente un potenziale di innesco $V_1 = 200$ V e uno di disinnesco $V_2 = 100$ V, è connessa in parallelo al condensatore. Assumendo che il tempo di scarica della lampadina sia trascurabile, determinare l'intervallo di tempo tra due accensioni successive.***

La lampadina si può schematizzare come un elemento di circuito avente resistenza infinita finché la d.d.p. ai suoi capi è minore di V_1 e resistenza nulla non appena si raggiunge V_1. A questo punto la lampadina permette il passaggio della corrente che avviene finché la d.d.p. ai suoi capi scende al valore V_2; in tali condizioni la lampadina si spegne, la sua resistenza diviene infinita e occorre attendere che si ristabilisca la d.d.p. V_1 per avere una nuova accensione.

Nel circuito in figura il condensatore viene caricato dal generatore fino ad avere ai suoi capi la d.d.p. V_1; si innesca allora la scarica attraverso L che dura un tempo trascurabile rispetto al tempo di carica; quando la d.d.p. ai capi di C è scesa a V_2, cessa la scarica ed ha inizio una nuova carica attraverso R. Sappiamo dal problema 4.24 che la legge di carica è



$$V = V_0(1 - e^{-t/RC}) \quad ;$$

i valori V_1 e V_2 sono raggiunti ai tempi t_1 e t_2:

$$V_1 = V_0(1 - e^{-t_1/RC}) \quad , \quad V_2 = V_0(1 - e^{-t_2/RC}) \quad ,$$

$$\frac{V_0 - V_2}{V_0 - V_1} = e^{(t_1 - t_2)/RC} \quad , \quad t_1 - t_2 = RC \log \frac{V_0 - V_2}{V_0 - V_1} = 104 \text{ μs} \quad .$$

* * *

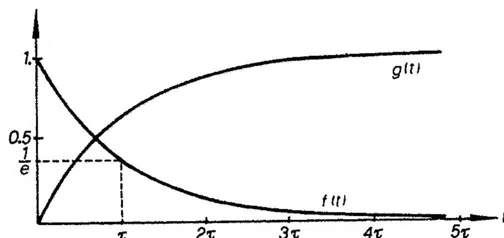
NOTA

Studiando i circuiti RC abbiamo trovato che le variazioni nel tempo delle grandezze interessate sono di tipo esponenziale decrescente:

$$f(t) = A\,e^{-t/\tau} \quad , \quad g(t) = B(1 - e^{-t/\tau}) \quad .$$

Nel primo caso $f(t)$ tende a zero al crescere del tempo e A è il suo valore iniziale, per $t = 0$; nel secondo caso $g(t)$ tende al valore B al crescere del tempo. La rapidità del fenomeno è governata dalla *costante di tempo* τ: più piccola è τ più rapida è la decrescita o la crescita della funzione, dopo un tempo dell'ordine di qualche τ il fenomeno variabile è praticamente cessato.

Nella figura sono riportati gli andamenti per $A = B = 1$ e $\tau = 1$ s.



Se t è molto minore di τ si può sviluppare $f(t)$ in serie e arrestarsi al primo termine:

$$f(t) = f(0) + t\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0} = A\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \quad ;$$

analogamente $g(t) = \dfrac{B}{\tau}\, t$.

Le stesse condizioni valgono per una funzione esponenziale di una qualsiasi variabile, come $f(x) = A\,e^{-Kx}$. È importante osservare che l'argomento dell'esponenziale deve essere adimensionale, per cui la variabile è sempre accompagnata da una costante che ha le dimensioni inverse: se x è una lunghezza, K si misura in m^{-1} e così via, $1/K$ dà sempre la rapidità di variazione del fenomeno.

* * *

CAPITOLO 5

MAGNETOSTATICA NEL VUOTO

5a. Una corrente elettrica continua genera nello spazio circostante un campo magnetico **B** legato alla densità **j** della corrente dalla relazione

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad , \tag{5.1}$$

la costante μ_0 è detta *permeabilità magnetica del vuoto*. All'equazione differenziale (5.1) corrisponde la relazione integrale, detta *teorema di Ampère*,

$$\Gamma_C(\mathbf{B}) = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad . \tag{5.2}$$

La circuitazione di **B** è estesa ad una qualunque linea chiusa C concatenata con la corrente di intensità i La (5.2) è utile per determinare il campo **B** in casi di particolari simmetrie; in generale però, è necessario per il calcolo di **B** fare uso anche della sua proprietà di essere solenoidale,

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad , \tag{5.3}$$

ovvero, in termini integrali, del fatto che è nullo il flusso di **B** attraverso una qualsiasi superficie chiusa:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{B}) = \oint_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad . \tag{5.4}$$

Le (5.1) e (5.3) sono le *equazioni di Maxwell per la magnetostatica nel vuoto*, ossia per quella parte dell'elettromagnetismo che riguarda le azioni magnetiche nel vuoto dovute a correnti elettriche continue. Esse sono lineari nel campo **B** e quindi è lecito applicare il *principio di sovrapposizione*, analogamente a quanto visto per l'elettrostatica (paragrafo 1a).

5b. La presenza in una regione di spazio vuoto di un campo magnetico **B** è messa in evidenza dalla forza su una carica elettrica q in moto con velocità $\boldsymbol{v}$. Tale forza detta *forza di Lorentz*, vale

$$\mathbf{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \mathbf{B} \quad . \tag{5.5}$$

La (5.5) può essere usata come definizione di **B** che risulta così dato esclusivamente tramite grandezze meccaniche e la nozione di carica elettrica ([1]).

La forza di Lorentz dà origine a due effetti che nel caso più generale si sovrappongono, ma che per adesso enunciamo separatamente. Il primo. che studieremo nel prossimo capitolo, consiste nel fatto che all'interno di un conduttore in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ in un campo magnetico **B** le cariche, a causa dell'azione della forza di Lorentz, tendono a ridistribuirsi dando origine a forze elettromotrici. Il secondo effetto, che ci interessa ora, si manifesta quando un conduttore in quiete, percorso da una corrente i, si trova in un campo magnetico **B**: sulle cariche che costituiscono la corrente agisce la forza di Lorentz e l'impulso acquistato da queste si trasmette al conduttore medesimo che risulta essere sottoposto nel suo complesso a una forza.

Nel caso di un circuito filiforme C tale forza ha l'espressione

$$\mathbf{F} = i \int_C \mathbf{dl} \times \mathbf{B} \tag{5.6}$$

essendo **dl** l'elemento infinitesimo di circuito. La (5.6) può essere pensata come risultante di infinite forze infinitesime, ciascuna applicata al singolo trattino **dl**.

$$\mathbf{dF} = i\,\mathbf{dl} \times \mathbf{B} \tag{5.7}$$

Questa relazione è conosciuta come *seconda formula elementare di Laplace*.

5c. Se vale la (5.3) si dimostra che il campo **B** può essere espresso come rotore di un altro campo vettoriale **A**, chiamato potenziale vettore ([2]):

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} \quad . \tag{5.8}$$

Il potenziale vettore è legato in generale alla densità di corrente; nel caso particolare di un circuito filiforme si arriva all'espressione

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{dl}}{r} \quad ; \tag{5.9}$$

l'integrazione è estesa a tutto il circuito; r è la distanza tra il trattino **dl** di circuito e il punto in cui si calcola **A**. Dal potenziale vettore tramite la (5.8) si passa al campo **B** dato, sempre per un circuito filiforme, dalla *legge di Biot-Savart*:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad . \tag{5.10}$$

([1]) Per il problema legato alla misura di una carica in movimento si veda, per esempio, E M Purcell, Elettricità e Magnetismo, Zanichelli 1971, Parte I, pag 177

([2]) Il potenziale vettore è qui introdotto esclusivamente allo scopo di familiarizzare il lettore con questo concetto, ne faremo uso solo in alcuni casi semplici

Come per la (5.6) si può pensare **B** come risultante di infiniti contributi infinitesimi, espressi dalla *prima formula elementare di Laplace*:

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\mathbf{dl} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad . \tag{5.11}$$

Mettendo insieme (5.6) e (5.10) si ottiene l'espressione dell'interazione tra due circuiti percorsi da correnti di intensità i_1 e i_2. La forza risentita dal circuito 2 sotto l'azione del campo generato dal circuito 1 è

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{C_2} \mathbf{dl}_2 \times \oint_{C_1} \frac{\mathbf{dl}_1 \times \mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3} \tag{5.12}$$

Si verifica (appendice paragrafo A9.) che $\mathbf{F}_{2,1} = -\mathbf{F}_{1,2}$, in accordo col terzo principio della meccanica.

5d. In base alle leggi date è possibile calcolare il campo magnetico prodotto da una spira infinitesima di area $d\Sigma u_n$, percorsa da una corrente i, in punti abbastanza lontani dalla spira. Si trova che il campo ha l'andamento visto nel problema 1.18 con $\mu_0/4\pi$ al posto di $1/4\pi\varepsilon_0$ e con

$$\mathbf{d\mu} = i\, d\Sigma \mathbf{u}_n \tag{5.13}$$

al posto di **p**: cioè è eguale al campo di un ipotetico *dipolo magnetico* di momento **dμ**, coincidente con la spira. Il verso di $\mathbf{u}_n$ è legato al verso di percorrenza della corrente dalla *convenzione della vite destrogira*: dalla punta di $\mathbf{u}_n$ si deve vedere circolare la corrente in senso antiorario. La (5 13) è detta *teorema di equivalenza di Ampère*. da essa è possibile prevedere che la spira, immersa in un campo **B**, risente di un momento orientatore

$$\mathbf{dM} = \mathbf{d\mu} \times \mathbf{B} \quad . \tag{5.14}$$

La (5.14) si estende a una spira piana di forma qualunque, percorsa da una corrente i e immersa in un campo **B**: il momento vale

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = i \Sigma \mathbf{u}_n \times \mathbf{B} \quad , \tag{5.15}$$

dove Σ è l'area della spira e per i versi sussite la convenzione sopra riportata. L'espressione (5.15) viene anche usata per un ago magnetico di momento **μ** sottoposto ad un campo **B**.

Un corpo di massa m e carica q, ruotante attorno ad un asse, assume un momento magnetico **μ** parallelo all'asse; il rapporto tra **μ** e il momento angolare **L** rispetto all'asse si dice *rapporto giromagnetico*. La sua espressione generale risulta

$$G = \frac{|\boldsymbol{\mu}|}{|\mathbf{L}|} = g \frac{q}{2m} \quad ; \tag{5.16}$$

il fattore g è un numero adimensionale che dipende dalla struttura meccanica ed elettrica del corpo. Pertanto, per un corpo carico rotante, immerso in un

campo **B** che formi un angolo diverso da zero con l'asse di rotazione, il teorema del momento angolare si scrive

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = -G\mathbf{B} \times \mathbf{L} \quad ; \tag{5.17}$$

è noto come in tal caso il corpo non si orienti con l'asse di rotazione parellelo a **B**, ma preceda attorno alla direzione di **B** con velocità angolare

$$\omega_p = G\mathbf{B} = g\,\frac{q}{2m}\,\mathbf{B} \tag{5.18}$$

5e. Sia nel caso dell'energia magnetica, come vedremo più avanti, che soprattutto nello studio dei fenomeni di induzione elettromagnetica, ha interesse considerare il flusso $\Phi_\Sigma(\mathbf{B})$ del campo magnetico **B** concatenato con un certo circuito; Σ indica una qualunque superficie che abbia il circuito come contorno (**B** è solenoidale!). Tale flusso è in generale la somma di più contributi, dei quali uno è dovuto al circuito stesso (il cosiddetto *autoflusso*), gli altri ai restanti circuiti distribuiti nello spazio.

Il flusso $\Phi_{k,i}$ concatenato con l'i-esimo circuito e dovuto al k-esimo circuito, percorso dalla corrente i_k, è proporzionale a quest'ultima, e viceversa

$$\Phi_{k,i} = M_{k,i}\, i_k \quad , \quad \Phi_{i,k} = M_{i,k}\, i_i \tag{5.19}$$

Si dimostra che $M_{k,i} = M_{i,k}$; a tale coefficiente si dà il nome di *coefficiente di mutua induzione* tra i due circuiti: esso dipende dalla forma dei due circuiti e dalla loro mutua distanza.

Analogamente, l'autoflusso di un circuito è proporzionale all'intensità della corrente che percorre il circuito stesso·

$$\Phi = L\,i \quad , \tag{5.20}$$

dove alla quantità L, dipendente anch'essa esclusivamente dalle caratteristiche geometriche del circuito, si dà il nome di *coefficiente di autoinduzione*.

L è sempre positivo, invece M può avere segno sia positivo che negativo, a seconda dei versi delle correnti nei vari circuiti (anche ai flussi si attribuisce un verso in relazione all'orientazione della superficie su cui sono calcolati, orientazione a sua volta legata al verso della corrente dalla convenzione della vite destrogira; si assume pertanto $\Phi_{k,i}$ positivo, e con esso $M_{k,i}$, se ha verso concorde con l'autoflusso del circuito).

5f. In una regione di spazio vuoto, sede di un campo magnetico **B**, è distribuita energia magnetica con densità

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{5.21}$$

e pertanto in un volume finito si trova l'energia

$$W = \int_\tau w\,d\tau = \frac{1}{2\mu_0}\int_\tau B^2 d\tau \tag{5.22}$$

essendo l'integrale esteso a tutti i punti in cui $B \neq 0$.

Nel caso particolare di N circuiti filiformi, la (5.22) si può scrivere anche

$$W = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N}{}_k\, i_k\, \Phi_k \quad ; \tag{5.23}$$

i_k è la corrente che percorre il k-esimo circuito e Φ_k il flusso di **B**, concatenato con esso, generato da tutti i circuiti. Per un solo circuito si ha

$$W = i\,\Phi \tag{5.24}$$

Le relazioni (5.22) e (5.23) rispecchiano il dualismo di interpretazione già trovato in elettrostatica: *l'energia può essere pensata legata al campo o alle sorgenti che lo producono.*

Quanto visto nel paragrafo precedente permette di suddividere la (5.23) in due parti, una detta *energia mutua*, legata alle posizioni relative dei circuiti,

$$W_1 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N}{}_i \sum_{1}^{N}{}_k M_{i,k}\, i_i\, i_k \qquad i \neq k \quad , \tag{5.25}$$

e una detta *autoenergia* o *energia intrinseca*

$$W_2 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N}{}_k L_k\, i_k^2 \quad . \tag{5.26}$$

Dall'energia magnetica W si può pensare di ricavare le forze e i momenti che agiscono su circuiti percorsi da corrente immersi in campi magnetici. Se ci limitiamo, come faremo nella maggior parte dei casi, a quei processi in cui l'intensità della corrente è mantenuta costante in tutti i circuiti, l'energia magnetica non è l'unica forma di energia presente. Occorre infatti considerare che quando un circuito si muove in un campo **B** possono avere origine forze elettromotrici indotte, contro le quali bisogna spendere lavoro se si vuole mantenere costante la corrente; oltre a ciò vi è ovviamente dissipazione di energia per effetto Joule. *L'energia totale W_T è perciò diversa da quella magnetica W.* Tuttavia si dimostra che la componente nella direzione x della forza esercitata dal campo sul k-esimo circuito è

$$F_x = -\frac{\partial W_T}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = i_k\,\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \quad ; \tag{5.27}$$

in altre parole, *l'energia magnetica, pur non essendo l'energia totale, è semplicemente l'opposto di questa*; essa è così ancora utile per i calcoli di forze, momenti, lavori, purché le si cambi il segno. Ad esempio, per il lavoro elementare corrispondente ad uno spostamento del k-esimo circuito, l'espressione è

$$dL = dW = i_k\, d\Phi_k \quad . \tag{5.28}$$

Poiché le intensità sono costanti, alle dette relazioni non contribuiscono le parti di autoenergia, ovvero gli autoflussi, sempre che i circuiti non subiscano deformazioni. Cioè Φ_k che compare nelle (5.27), (5.28) è dovuto solo agli altri circuiti o, meglio, essendo la parte dovuta al circuito stesso costante, essa scompare quando si eseguono derivazioni o differenziazioni; così, pur essendo $W = W_1 + W_2$, quando compaiono variazioni basta considerare W_1, in cui gli M sono variabili con la posizione, essendo W_2 costante.

Un'importante conseguenza di (5.27) e (5.28) è che per un circuito *la posizione di equilibrio è quella in cui la sua energia magnetica è massima.*

Nel suo complesso questa situazione a corrente costante ricorda quella vista per i processi elettrostatici a potenziale costante.

5g. Le dimensioni delle nuove grandezze introdotte in questo capitolo sono:

flusso di **B**	$\frac{\text{joule}}{\text{ampere}} = \text{volt} \cdot \text{s} = \text{weber}$	Wb
campo magnetico	$\frac{\text{weber}}{\text{m}^2} = \text{tesla}$	T
potenziale vettore	$\frac{\text{weber}}{\text{m}}$	$\frac{\text{Wb}}{\text{m}}$
momento magnetico	$\text{ampere} \cdot \text{m}^2$	$\text{A}\,\text{m}^2$
rapporto giromagnetico	$\frac{\text{coulomb}}{\text{kg}}$	$\frac{\text{C}}{\text{kg}}$
coefficiente di mutua induzione	$\frac{\text{weber}}{\text{ampere}} = \text{ohm} \cdot \text{s} = \text{henry}$	H
coefficiente di autoinduzione	henry	H

La permeabilità magnetica del vuoto ha le dimensioni H/m e per essa è *fissato* il valore $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (di qui e dalla relazione $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ deriva il valore di ε_0 dato nel primo capitolo).

Nella pratica come unità di misura di **B** viene spesso usato il gauss, pari a 10^{-4} T.

Ricordiamo inoltre che nei sistemi atomici il momento angolare viene misurato rispetto all'unità $h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js, dove h è la costante di Planck, pari a $6.625 \cdot 10^{-34}$ Js. Per i momenti magnetici atomici si assume come unità di misura il *magnetone di Bohr*,

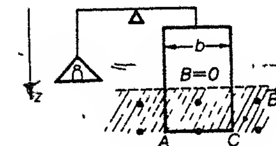
$$\mu_B = \frac{e}{2m}\frac{h}{2\pi} = 0.928 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2;$$

e ed m sono la carica e la massa dell'elettrone.

* * *

5.1. ***Al giogo di una bilancia è sospesa una spira rigida conduttrice rettangolare, larga b = 2 cm. La parte inferiore della spira è immersa in un campo magnetico uniforme B, ortogonale alla spira. Se in questa viene inviata una corrente i = 1A con verso opportuno, si osserva che per riequilibrare la bilancia occorre una massa m = 40 · 10⁻³g. Calcolare il modulo di B.***

Il lato AC della spira, sottoposto al campo magnetico, risente di una forza in quanto è percorso da corrente. La forza elementare agente sull'elemento infinitesimo è data dalla (5.7); essa è parallela all'asse z ed anche concorde, visto che per riottenere l'equilibrio occorre aggiungere la massa m sull'altro piatto della bilancia. Essendo **B** uniforme le forze elementari sui singoli trattini sono tutte eguali e la forza totale è



$$\mathbf{F} = iBb\,\mathbf{u}_z$$

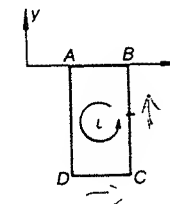
Sempre applicando la (5.7) si verifica che sui tratti verticali di spira sottoposti al campo **B** agiscono forze eguali e contrarie, con risultante nulla (e momento nullo). Quindi, in equilibrio. $mg = iBb$ ovvero

$$B = \frac{mg}{ib} = 196 \cdot 10^{-4}\,\text{T} = 196 \text{ gauss} \quad .$$

5.2. ***Una spira rettangolare rigida, di lati AB = a = 10 cm e BC = b = 20 cm, ha una massa per unità di lunghezza m = 0.05 g/cm. Essa può ruotare senza attrito attorno al lato AB ed è percorsa da una corrente i = 6A nel verso indicato in figura. Determinare il modulo e il verso del campo magnetico B, uniforme e parallelo all'asse y, che produce una rotazione della spira verso il lettore di θ = 12° rispetto al piano del disegno. Calcolare inoltre il lavoro compiuto dal campo sulla spira per produrre detta rotazione.***

Nelle condizioni di equilibrio, individuate dall'angolo θ formato dal piano della spira col piano x, y, il modulo del momento rispetto all'asse x delle forze magnetiche eguaglia quello del momento, rispetto allo stesso asse, delle forze peso. Il primo vale, per la (5.15),

$$M_m = \mu B \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \mu B \cos\theta \quad ,$$



dove per μ va inteso il prodotto $i\Sigma = iab$. Per il secondo, vediamo che la massa totale è $2(a+b)m$; il centro di massa dista $b/2$ dall'asse e quindi il momento risultante delle forze peso è

$$M_p = mb(a+b)g \operatorname{sen}\theta$$

L'eguaglianza tra i due momenti dà per il modulo del campo

$$B = \frac{mg}{i}\left(1 + \frac{b}{a}\right)\operatorname{tg}\theta = 5.21 \cdot 10^{-3}\,\text{T} \quad .$$

Per quanto riguarda il verso di **B** notiamo che **μ** è diretto verso il lettore e $\mathbf{M}_m$ è discorde all'asse x, visto come ruota la spira; ne segue che **B** è concorde all'asse y.

Il lavoro compiuto dal campo sulla spira si ottiene integrando il momento:

$$L = \int_0^\theta M_m d\theta = iabB\int_0^\theta \cos\theta d\theta = iabB \operatorname{sen}\theta = 0.13 \cdot 10^{-3}\,\text{J} \quad .$$

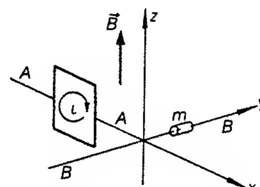
Oppure si può utilizzare la (5.28):

$$L = \int i d\Phi = i\int d\left[B\Sigma\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = iabB\int_0^\theta d(\operatorname{sen}\theta) = iabB\operatorname{sen}\theta \quad .$$

5.3. *Una bobina quadrata di lato $l = 5$ cm, costituita da $N = 10$ spire, è percorsa da una corrente $i = 4$A nel verso indicato ed è posta in un campo uniforme* **B**, *parallelo al piano x,z contenente la bobina, con direzione e verso eguali a quelli dell'asse z. All'asse AA della bobina (asse x) è collegata un'asta BB (asse y) su cui può scorrere senza attrito una massa $m = 20$ g. Determinare il modulo del campo* B, *sapendo che affinché la bobina rimanga in equilibrio nella porzione della figura occorre spostare la massa m dall'origine di $y = 25.5$ cm, e l'errore ΔB se l'errore di posizionamento è $\Delta y = 1$ mm. La stessa bobina, senza l'asta BB e la massa m, lasciata libera di ruotare attorno all'asse AA, assume una nuova posizione di equilibrio. Determinare qual è questa nuova posizione e calcolare il valore del momento d'inerzia della bobina rispetto all'asse AA sapendo che il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio è $T = 3.14$ s.*

Il momento magnetico della bobina è

$$\boldsymbol{\mu} = Nil^2\mathbf{u}_y$$



(somma dei contributi delle singole spire) e il momento $\mathbf{M}_m = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ tende a portare **μ** parallelo e concorde a **B**: stando sull'asse x positivo si vedrebbe l'asta BB ruotare in senso antiorario. Per equilibrare tale effetto la massa m si deve spostare lungo l'asse y positivo così che

$$mgy = \mu B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{mgy}{\mu} = \frac{mgy}{Nl^2 i} = 0.5\ \text{T}.$$

Essendo y e B proporzionali

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta y}{y} \quad \Rightarrow \quad \Delta B = \frac{\Delta y}{y}B = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \quad .$$

In assenza dell'asta BB e della massa, la posizione di equilibrio stabile è quella in cui **μ** è parallelo e concorde a **B** (bobina nel piano x,y). Per le piccole oscillazioni il teorema del momento angolare si scrive

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu B\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

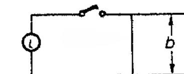
con $\omega^2 = (2\pi/T)^2 = \mu B/I$ per cui

$$I = \frac{\mu BT^2}{4\pi^2} = \frac{Nil^2BT^2}{4\pi^2} = 12.5 \cdot 10^{-3}\ \text{Kgm}^2.$$

5.4. *Un sottile filo di alluminio, di diametro $d = 10$ μm, è libero di scorrere senza attrito su due guide metalliche parallele e orizzontali, di resistenza elettrica trascurabile. Il filo può essere alimentato da un generatore di corrente costante ed è immerso in un campo magnetico uniforme, ortogonale al disegno. All'istante $t = 0$ si chiude il circuito di alimentazione e il filo si muove verso destra scorrendo sulle guide. Si constata che al tempo $t = t_0$ esso ha una velocità $v_0 = 200$ m/s, ha percorso uno spazio $l = 3$ mm e ha una temperatura superiore di 50°C a quella iniziale. Calcolare i valori di i e B. Le costanti fisiche del filo sono: calore specifico $c = 920$ J/Kg°C, densità $\delta = 2.7 \cdot 10^3$ Kg/m³, resistività $\varrho = 2.8 \cdot 10^{-8}$ Ωm. Si supponga il filo termicamente isolato e con resistenza costante.*

Se il filo è termicamente isolato e la sua resistenza è costante, scriviamo

$$Ri^2t_0 = mc\Delta T \qquad \text{(a)}$$



con $R = \varrho b/\Sigma$, $m = \delta b\Sigma$; $\Sigma = \pi d^2/4$. Occorre dunque conoscere il tempo t_0. La forza cui è sottoposto il filo è costante e vale $F = ibB$: il moto è uniformemente accelerato per cui

$$l = \frac{1}{2}at_0^2 \quad , \quad v_0 = at_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{2l}{v_0} = 3 \cdot 10^{-5}\ \text{s} \quad .$$

Riprendiamo la formula (a) del bilancio energetico effettuando le sostituzioni:

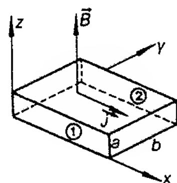
$$i = \Sigma\left(\frac{\delta c\Delta T}{\varrho t_0}\right)^{1/2} = 0.96\ \text{A} \quad .$$

Il campo magnetico a sua volta si ottiene da

$$B = \frac{F}{ib} = \frac{ma}{ib} = \frac{\delta\Sigma v_0}{it_0} = 1.48\ \text{T} \quad .$$

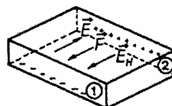
5.5. ***Una sbarra metallica conduttrice, prismatica a sezione rettangolare ($a = 0.2$ cm, $b = 1$ cm) è percorsa da una corrente $i = 100$A ed è immersa in un campo magnetico uniforme B, di modulo 2T. Il verso della corrente è ortogonale alla direzione di B, come mostrato in figura. Calcolare modulo e verso del campo elettrico trasverso $\mathbf{E}_H$, diretto secondo l'asse y, che compare nella sbarra. Il numero di elettroni di conduzione per cm^3 è $n = 5.86 \cdot 10^{22}$.***

Nei conduttori metallici il passaggio della corrente è dovuto al moto degli elettroni di valenza. Sotto l'azione di un campo elettrico esterno, per esempio quello applicato connettendo un generatore ai capi del conduttore, si sovrappone al moto disordinato un moto con velocità parallela al campo elettrico. Se il conduttore è immerso in un campo magnetico gli elettroni risentono della forza di Lorenz (5.5); cioè, per il fatto di muoversi, un elettrone di conduzione è sottoposto al campo elettrico



$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \boldsymbol{v} \times \mathbf{B} \quad .$$

Nella situazione della figura $\boldsymbol{v}$ è diretta in senso contrario alla densità di corrente $\mathbf{j}$. infatti convenzionalmente si attribuisce il passaggio di corrente al moto di fittizie cariche positive. Il campo E risulta parallelo e concorde all'asse y e la forza che gli elettroni risentono è, a causa del segno negativo della loro carica, parallela e discorde all'asse y. Questo fatto tende a fare accumulare elettroni verso il lato 1 della sbarra con il che si crea un campo antagonista $\mathbf{E}_H$ il quale tende a impedire un ulteriore arrivo di cariche negative (proprio per repulsione elettrostatica). Si ha equilibrio quando



$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{E} = -\boldsymbol{v} \times \mathbf{B} \quad .$$

Il campo $\mathbf{E}_H$ risulta così parallelo e discorde all'asse y, diretto dal lato 2 al lato 1.

Il calcolo del modulo di $\mathbf{E}_H$ richiede il calcolo della velocità degli elettroni di conduzione, che si effettua in base alle considerazioni seguenti. La carica che per secondo e per unità di sezione attraversa il conduttore è data per definizione dal modulo della densità di corrente (paragrafo 4a.): essa è eguale a quella contenuta entro un prisma avente base unitaria e altezza v, se v è la velocità delle cariche (infatti in un secondo le cariche percorrono una distanza pari a v). Pertanto $\mathbf{j} = \varrho\boldsymbol{v}$ essendo ϱ la densità di carica nel volume suddetto; detto n il numero di elettroni per unità di volume, e la carica dell'elettrone, abbiamo $\varrho = -ne$ e quindi

$$\mathbf{j} = -ne\boldsymbol{v} \quad , \quad \mathbf{E}_H = \frac{1}{ne}\,\mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad .$$

Il modulo vale $E_H = iB/neab = 1.07 \cdot 10^{-3}$ V/m.

Il fenomeno visto si chiama *effetto Hall* (trasversale). Al campo elettrico $\mathbf{E}_H$ corrisponde, tra punti sui lati 1 e 2 aventi la stessa coordinata x la forza elettromotrice $\mathscr{E}_H = E_H b = 1.07 \cdot 10^{-5}$ V. Per quanto piccola questa f.em. dà luogo a correnti apprezzabili se i due punti in questione sono connessi con un filo metallico, che può facilmente presentare resistenza inferiore a 10^{-3} Ω. Dalla misura della corrente si deduce il valore di $\mathbf{E}_H$ e quindi il valore di $\mathbf{B}$. Nella pratica le *sonde a effetto Hall* sono molto usate per la misura di campi magnetici.

Notiamo che lo stabilirsi del campo $\mathbf{E}_H$ nel metallo sottopone il reticolo cristallino (positivo) a una forza parallela e concorde a $\mathbf{E}_H$; se la sbarra non è vincolata, essa entra in movimento secondo il verso negativo dell'asse y, cioè esattamente secondo $\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$, come previsto nella seconda formula di Laplace che, del resto, si può ricavare direttamente dalla forza di Lorenz. Il caso fisico ora illustrato mette in evidenza qual è il meccanismo che dà origine alla forza macroscopica risentita dal conduttore.

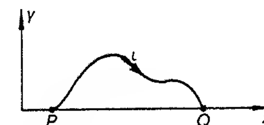
Una conseguenza interessante delle formule viste è la seguente. Il campo $\mathbf{E}_H$ dipende dalla velocità delle cariche che determinano la corrente; in particolare il suo verso, e quindi il segno di $\mathscr{E}_H$, danno il verso della velocità; allora una misura del segno di $\mathscr{E}_H$ permette di dedurre il segno dei portatori di carica nel conduttore, cioè se la corrente è dovuta a cariche positive che vanno nel conduttore dal polo positivo a quello negativo del generatore oppure a cariche negative che si muovono in verso opposto; si noti che nei due casi la densità di corrente $\mathbf{j} = \varrho\boldsymbol{v}$ ha lo stesso verso.

Infine, dalla misura di $\mathscr{E}_H$ in un campo magnetico $\mathbf{B}$ noto si può ricavare $n = iB/eab\mathscr{E}_H$, cioè il numero dei portatori di carica per unità di volume.

5.6. ***Un tratto di filo conduttore, di estremi P e Q, posto nel piano x, y, è percorso da una corrente i ed è immerso in un campo magnetico uniforme B. Dimostrare che la forza agente sul filo è $\mathbf{F} = i\,\mathbf{PQ} \times \mathbf{B}$ e ricavare la forza totale che agisce su un circuito chiuso piano percorso da corrente e posto in un campo magnetico uniforme.***

Assumiamo come asse x la congiungente i punti P e Q. Sull'elemento di filo $\mathbf{dl} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y$ agisce la forza $\mathbf{dF} = i\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{dF} &= i(dx\,\mathbf{u}_x + dy\,\mathbf{u}_y) \times (B_x\mathbf{u}_x + B_y\mathbf{u}_y + B_z\mathbf{u}_z)\\ &= i[B_z dy\,\mathbf{u}_x - B_z dx\,\mathbf{u}_y + (B_y dx - B_x dy)\mathbf{u}_z] \quad .\end{aligned}$$



La forza totale $\mathbf{F}$ è data dall'integrale vettoriale tra P e Q di $\mathbf{dF}$: dei quattro termini però il primo e l'ultimo danno risultato nullo in quanto P e Q hanno la stessa coordinata y e il campo è uniforme. Quindi

$$\mathbf{F} = -iB_z|\mathbf{PQ}|\,\mathbf{u}_y + iB_y|\mathbf{PQ}|\,\mathbf{u}_z = i\mathbf{PQ} \times \mathbf{B} \quad ;$$

la seconda eguaglianza si ricava scrivendo i vettori in forma cartesiana e ricordando che $\mathbf{PQ}$ è parallelo all'asse x. In conclusione la forza dipende esclusivamente dagli estremi e non dalla lunghezza e dalla forma del filo.

Se ora si chiude il circuito con un tratto diverso di filo da Q a P, sempre restando nel piano x,y, si trova allo stesso modo $\mathbf{F} = i\mathbf{QP} \times \mathbf{B}$ e la risultante delle forze magnetiche risentite dall'intero circuito chiuso è nulla. Il risultato si

può facilmente estendere a circuiti di forma qualunque (non piani). Ritornando al caso in esame, l'assenza di una forza risultante non vuol dire che non c'è alcuna azione magnetica. Sappiamo infatti che il circuito risente di un momento $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \pm i\Sigma \mathbf{u}_z \times \mathbf{B}$: Σ è l'area del circuito e il segno dipende da come si chiude il circuito da Q a P, cioè dal verso della corrente.

5.7. ***Calcolare il campo magnetico prodotto da un filo conduttore rettilineo indefinito di sezione trascurabile percorso da una corrente $i = 1$A in un punto P distante $y = 1$ m dal filo. Calcolare inoltre l'energia magnetica per unità di lunghezza.***

Impostiamo il calcolo sulla base della prima formula di Laplace (5.11) adottando i simboli indicati in figura. Il campo infinitesimo prodotto in P dall'elemento di filo $\mathbf{ds} = dx\mathbf{u}_x$ posto in Q vale

$$\mathbf{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta\, dx}{r^2} \quad .$$

Esso è diretto verso il lettore, ortogonalmente al disegno, se la corrente scorre secondo il verso positivo dell'asse x. Conviene esprimere x e r in funzione di θ e y; precisamente $r\operatorname{sen}(\pi - \theta) = r\operatorname{sen}\theta = y$ da cui $r^2 = y^2/\operatorname{sen}^2\theta$ e $x\operatorname{tg}(\pi - \theta) = -x\operatorname{tg}\theta = y$ da cui $dx = y\,d\theta/\operatorname{sen}^2\theta$. Effettuando queste sostituzioni e integrando (i campi elementari sono tutti paralleli e concordi):

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi y} \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{\mu_0 i}{4\pi y} [\cos\theta]_0^\pi = \frac{\mu_0 i}{2\pi y} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Il campo dipende esclusivamente dall'intensità di corrente e dalla distanza dal filo: esso ha lo stesso valore in tutti i punti di una superficie cilindrica coassiale al filo cui è tangente mantenendosi nel contempo ortogonale al filo. In altre parole, le linee di $\mathbf{B}$ sono circonferenze concentriche al filo, poste in piani ortogonali ad esso; il verso è legato a quello della corrente dalla solita convenzione destrogira.

Più in generale, in un punto di coordinate (x, y, z) distante $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$ dall'asse x che coincide col filo, il modulo del campo vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi (y^2 + z^2)^{1/2}} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Se si invocano considerazioni di simmetria, basate anche sull'osservazione delle linee di campo fatta con la limatura di ferro, il calcolo di $\mathbf{B}$ è immediato tramite il teorema di Ampère (5.2). Come linea di integrazione si prende una circonferenza di raggio r con centro sul filo e ortogonale a questo. Il campo $\mathbf{B}$ è costante in modulo nei punti della circonferenza e parallelo a $\mathbf{dl}$; perciò

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = B \oint dl = 2\pi r B = \mu_0 i \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad .$$

Abbiamo qui un esempio dell'utilità del teorema di Ampère in casi dotati di simmetria, che ci ricorda l'uso del teorema di Gauss in elettrostatica.

Numericamente, per $r = 1$ m e $i = 1$ A, $B = 2 \cdot 10^{-7}$ T. Si potrebbe assumere questo caso come definizione dell'unità di misura di $\mathbf{B}$: a un metro di distanza da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente di un ampere il campo magnetico vale $2 \cdot 10^{-7}$ T. La definizione è però concettuale, vista l'impossibilità pratica di realizzare un filo rettilineo indefinito.

Per il calcolo dell'energia magnetica usiamo le espressioni (5.21) e (5.22): in una guaina cilindrica infinitesima, coassiale col filo, di altezza unitaria e superficie di base $d\Sigma = 2\pi r\, dr$, cioè compresa tra i raggi r e $r + dr$, è contenuta l'energia

$$dW_l = \frac{B^2}{2\mu_0} d\Sigma = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

e quindi l'energia totale per unità di lunghezza vale

$$W_l = \int_R^\infty dW_l = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \int_R^\infty \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \Big[\log r\Big]_R^\infty \quad ,$$

avendo indicato con R il raggio del filo che, per quanto di sezione trascurabile, è pur sempre di dimensioni finite ([1]). L'energia risulta infinita: ancora una volta si trova un risultato assurdo in quanto il sistema, filo di lunghezza infinita, non ha realtà fisica; le (a) e (b) sono però importanti, come casi limiti di situazioni reali.

5.8. ***Una spira rettangolare rigida ($a = 5$ cm, $b = 20$ cm) è posta a distanza $y = 10$ cm da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente $i_1 = 10$ A. La spira e il filo appartengono allo stesso piano. Calcolare il flusso di B attraverso la spira e il coefficiente di mutua induzione del sistema. Se la spira stessa è sede di una corrente $i_2 = 1.5$ A calcolare l'energia mutua filo-spira e la forza esercitata dal filo sulla spira per i due possibili versi di i_2.***

Il campo magnetico prodotto dal filo indefinito ha il modulo $B = \mu_0 i_1/2\pi y$, secondo la (a) del problema 5.7, e nel semipiano in cui si trova la spira è diretto verso il lettore. Su una superficie infinitesima di area $d\Sigma = b\,dy$, scelta in base al criterio che $\mathbf{B}$ sia lo stesso in tutti i suoi punti, il flusso vale

$$d\Phi = B\, d\Sigma = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi} \frac{dy}{y}$$

([1]) Rimandiamo al problema 5.14 per il calcolo del campo B tra z contributo all'energia è finito

e in totale, attraverso la spira, abbiamo il flusso

$$\Phi = \frac{\mu_0 i_1 b}{2\pi} \log \frac{y+a}{y} \quad ,$$

diretto verso il lettore. Per la (5.19) il coefficiente di mutua induzione del sistema risulta

$$M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \log \frac{y+a}{y} = 1.62 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{H} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Il valore numerico del flusso è $\Phi = M i_1 = 1.62 \cdot 10^{-7}$ Wb.

Se nella spira circola una corrente i_2 l'energia mutua si calcola dalla (5.25) con $N = 2$ e dalla (5.19):

$$W = M i_1 i_2 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 b}{2\pi} \log \frac{y+a}{y} = i_2 \Phi \quad .$$

Il segno dipende da quello di M, cioè dal verso di i_2 (paragrafo 5e.). Se la corrente circola nella spira in senso antiorario, Φ e l'autoflusso sono equiversi, M e W sono positivi; poiché, secondo la (5.28), il lavoro delle forze del campo tende a portare la spira dove il flusso e l'energia sono maggiori, la spira è attratta dal filo. Se invece i_2 circola in senso orario, M e W sono negativi, la spira è respinta dal filo.

La forza si calcola da (5.27):

$$F = \frac{dW}{dy} = i_2 \frac{d\Phi}{dy} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 ab}{2\pi y(y+a)} \quad ;$$

essa è parallela all'asse y poiché il flusso dipende solo da y. Se la corrente è antioraria F è negativa, cioè discorde all'asse y, e quindi attrattiva, come abbiamo appena concluso; nell'altro caso, $\Phi \to -\Phi$ e la forza è repulsiva. I valori numerici sono

$$W = 2.43 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{J} \quad , \quad F = 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N} \quad .$$

Il calcolo della forza può essere condotto per altra via, attraverso la seconda formula di Laplace (5.7). Nel caso della corrente antioraria il tratto infinitesimo **dl** del lato PQ è attirato dal filo in quanto $\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$ è rivolto verso il filo, mentre per RS si ha repulsione. Le forze risultanti, per i due lati paralleli al filo, sono

$$\mathbf{F}_{PQ} = i_2 \int_P^Q \mathbf{dl} \times \mathbf{B} = -i_2 b B(y) \mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{F}_{RS} = i_2 b B(y+a) \mathbf{u}_y \quad .$$

Nei punti di PQ il campo vale $B(y) = \mu_0 i_1 / 2\pi y$, in quelli di RS $B(y+a) = \mu_0 i_1 / 2\pi(y+a)$ e quindi

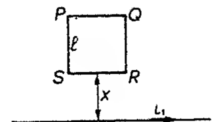
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{PQ} + \mathbf{F}_{RS} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 ab}{2\pi y(y+a)} \mathbf{u}_y \quad .$$

Le forze sui lati PS e QR sono eguali ed opposte per cui **F** è la forza totale agente sulla spira. Se la corrente è oraria cambiano di verso i **dl** e di conseguenza **F** diviene $-\mathbf{F}$.

5.9. ***Una bobina rigida, quadrata di lato l, formata da $N = 10$ spire, è posta a distanza $x = l$ da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente $i_1 = 100$ A nel verso indicato in figura; bobina e filo stanno sullo stesso piano orizzontale. Quando la bobina è percorsa da una corrente i_2 bisogna applicarle una forza $F = 1.96 \cdot 10^{-4}$ N, ortogonale al filo, per impedirle di andare verso il filo. Calcolare il valore e il verso di i_2. Calcolare inoltre il lavoro che bisogna spendere per far compiere alla bobina una traslazione che la porti da $x_1 = l$ a $x_2 = 2l$ rispetto al filo, con $l = 0.5$ m. Se invece della traslazione la spira compie una rotazione di 180° rispetto al lato PQ, quanto vale il lavoro?***

Come si è visto nel problema 5.8, la forza cui è sottoposta la bobina vale

$$F = \frac{\mu_0 N i_1 i_2 l^2}{2\pi x(x+l)} \quad \Rightarrow \quad F(x=l) = \frac{\mu_0 N i_1 i_2}{4\pi} \quad .$$



Dai dati capiamo che questa forza è attrattiva, per cui nel lato SR la corrente i_2 deve essere equiversa a i_1. Eguagliando l'espressione della forza al valore dato otteniamo $i_2 = 1.96$A.

Il lavoro fatto dal campo per allontanare la bobina è

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \frac{\mu_0 N i_1 i_2 l^2}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x(x+l)} = \frac{\mu_0 N i_1 i_2 l^2}{2\pi} \frac{1}{l} \left[\log \frac{x+l}{x} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{\mu_0 N i_1 i_2 l}{2\pi} \log \frac{x_1(x_2+l)}{x_2(x_1+l)} = N i_2 [\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] \quad ,$$

essendo Φ il flusso prodotto dal campo del filo attraverso la spira (problema 5.8). Numericamente, essendo $x_1 = l$ e $x_2 = 2l$,

$$L = \frac{\mu_0 N i_1 i_2 l}{2\pi} \log \frac{3}{4} = -5.6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J} \quad .$$

Il lavoro che occorre spendere è quindi $5.6 \cdot 10^{-5}$ J.

Se invece della traslazione la spira compie la rotazione di 180° attorno al lato PQ, lo stato finale è diverso in quanto i_2 non è più antioraria (per chi guarda il disegno), ma oraria: fisicamente la spira è respinta invece di essere attirata. Il lavoro è sempre $N i_2 (\Phi_2 - \Phi_1)$, però adesso Φ_2 ha cambiato segno per cui

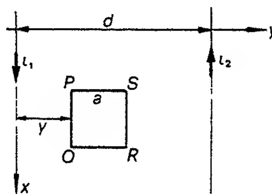
$$L = N i_2 \left(-\frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \log \frac{x_2+l}{x_2} - \frac{\mu_0 i_1 l}{2\pi} \log \frac{x_1+l}{x_1} \right)$$

$$= -\frac{\mu_0 N i_1 i_2 l}{2\pi} \log \frac{(x_1+l)(x_2+l)}{x_1 x_2} =$$

$$= -\frac{\mu_0 N i_1 i_2 l}{2\pi} \log 6 = -35.1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{J}.$$

Supponiamo che la traslazione con $\Delta x = l$ avvenga parallelamente al filo e che la rotazione avvenga rispetto al lato QR: cosa cambia nelle risposte?

5.10. ***Due fili rettilinei indefiniti paralleli distanti d = 1 m sono percorsi in versi opposti dalle correnti $i_1 = 1$A, $i_2 = 2$A. Tra i due fili e complanare con essi si trova una spira quadrata, di lato a = 20 cm, percorsa dalla corrente i_3. Determinare le eventuali posizioni di equilibrio della spira.***



Fissiamo il sistema di riferimento come in figura e supponiamo che i_3 percorra la spira in senso orario. I lati PS e QR risentono di forze eguali ed opposte e vengono perciò esclusi. Il lato PQ è percorsa da una corrente discorde a i_1 e concorde a i_2: dal primo filo è respinto, dal secondo attirato e le forze valgono rispettivamente

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_3 a}{2\pi y}\mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 i_2 i_3 a}{2\pi(d-y)}\mathbf{u}_y \quad .$$

Per il lato RS succede l'opposto, è attirato dal primo filo e respinto dal secondo con le forze

$$\mathbf{F}_3 = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi(y+a)}\mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{F}_4 = -\frac{\mu_0 i_2 i_3 a}{2\pi(d-y-a)}\mathbf{u}_y \quad .$$

Nelle eventuali posizioni di equilibrio la risultante $\mathbf{F} = \sum_1^4 \mathbf{F}_i$ deve essere nulla, cioè

$$\frac{i_1}{y} - \frac{i_1}{y+a} + \frac{i_2}{d-y} - \frac{i_2}{d-y-a} = 0 \quad .$$

La condizione non dipende dalla corrente i_3 che circola nella spira; infatti per quanto riguarda il modulo, tutte e quattro le forze sono proporzionali a i_3, mentre per il verso il cambiamento di quello di i_3 fa cambiare semplicemente verso a tutte le forze. L'equazione risolutiva è:

$$y^2(i_1 - i_2) + y[i_1(a-2d) - i_2 a] + i_1 d(d-a) = 0 \qquad \text{(a)}$$

Il discriminante è sempre maggiore di zero, così che ci sono due soluzioni reali. Nel nostro caso numerico

$$y^2 + 2.2y - 0.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0.32 \text{ m} \quad , \quad y_2 = -2.52 \text{ m} \quad .$$

L'equilibrio si ha con la spira tra i fili o con la spira nel semipiano di sinistra, oltre il filo percorso dalla corrente minore, come è semplice rendersi conto con ragionamenti qualitativi basati sui segni e sulle intensità delle forze.

In particolare, se $i_1 = i_2$, la (a) diviene $y = (d-a)/2$: c'è un'unica soluzione, con la spira posta tra i due fili ed equidistante da essi.

Si verifichi che si arriva allo stesso risultato scrivendo l'energia mutua della spira $W = i_3\,(\Phi_1 + \Phi_2)$ e annullandone la derivata rispetto a y; Φ_1 e Φ_2 sono i flussi dei campi dei due fili concatenati con la spira.

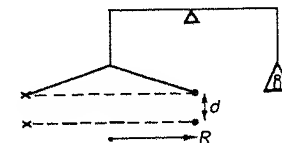
Se poi le due correnti fossero concordi, il medesimo procedimento porterebbe a una relazione simile alla (a), ma con il segno cambiato per i_2. In tal caso però il discriminante risulta sempre negativo e non si hanno soluzioni fisiche.

5.11. ***Due spire circolari, di raggio R = 30 cm, aventi lo stesso asse, sono poste in piani paralleli orizzontali, distanti d = 3 mm. La spira superiore è sospesa al giogo di una bilancia, come mostrato in figura. Se nelle spire circola la stessa corrente nello stesso verso, per ristabilire l'equilibrio occorre aggiungere sull'altro piatto della bilancia una massa $m = 10^{-2}$ g. Determinare il valore della corrente. Inoltre, se la minima variazione di massa che la bilancia può rivelare è di 10^{-3} g discutere la sensibilità dello strumento e la precisione delle misure.***

Poiché le due spire sono piuttosto grandi e molto vicine, possiamo calcolare con buona approssimazione la forza (attrattiva) tra di esse come se fossero due tratti di fili rettilinei paralleli di lunghezza $2\pi R$. In tal caso per una lunghezza generica l e due correnti diverse i_1 e i_2 la forza vale $i_1 B_2 l = i_2 B_2 l = \mu_0 i_1 i_2 l/2\pi d$: con $l = 2\pi R$ e $i_1 = i_2$ e in equilibrio

$$F = \mu_0 i^2 \frac{R}{d} = mg \quad ,$$

$$i^2 = \frac{mgd}{\mu_0 R} \quad \Rightarrow \quad i = 0.88 \text{ A.}$$



Questo strumento si chiama *elettrodinamometro assoluto a bilancia*; esso dà la corrente attraverso misure meccaniche e geometriche. Come per gli elettrometri assoluti (problema 2.15) la relazione che lega la grandezza misurata m a quella incognita i è quadratica, $m = \mu_0 R i^2/gd$, per cui la sensibilità dello strumento risulta funzione della grandezza incognita:

$$\frac{dm}{di} = \frac{2\mu_0 R}{gd}\, i = ki = 2.56 \cdot 10^{-5} i \,\frac{\text{Kg}}{\text{A}} \quad .$$

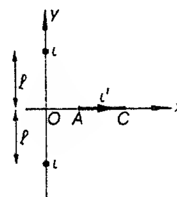
La precisione con cui la corrente è misurabile, se $\Delta m = 10^{-6}$ Kg, si scrive

$$\Delta i = \frac{\Delta m}{ki} = \frac{3.90 \cdot 10^{-2}}{i} = 4.43 \cdot 10^{-2} \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta i}{i} = 5.0 \ \%$$

Questo se $i = 0.88$ A; è facile verificare che occorre superare il valore 1.98 A perché l'errore relativo scenda al di sotto dell'1%. Lo strumento non appare

adatto a misure precise di piccole correnti. A parità di geometria un possibile miglioramento consiste nell'usare due coppie di n spire ciascuna; la costante dello strumento k aumenta di un fattore n^2 e di altrettanto diminuisce $\Delta\iota$, con lo stesso Δm.

5.12. ***Due fili indefiniti paralleli all'asse z, distanti $2l = 20$ cm, sono percorsi entrambi da una stessa corrente $i = 100$ A concorde all'asse z. Un tratto di filo AC, lungo $a = 5$ cm, è posto sull'asse x con l'estremo A distante a dall'origine ed è percorso da una corrente $i' = 5$ A diretta da A verso C. Calcolare in modulo, direzione e verso la forza F sul tratto di filo AC.***



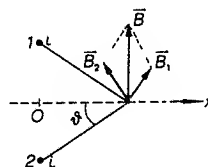
Secondo la (b) del problema 5.7 il campo prodotto da uno dei fili in un punto generico x del segmento AC vale in modulo

$$B = \frac{\mu_0 \iota}{2\pi(x^2 + l^2)^{1/2}} \quad .$$

Vettorialmente le componenti x si elidono e il campo risultante, parallelo e concorde all'asse y, è

$$B(x) = 2\,\frac{\mu_0 i \cos\theta}{2\pi(x^2 + l^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 i x}{\pi(x^2 + l^2)}$$

essendo $\cos\theta = x/(x^2 + l^2)^{1/2}$ La forza sull'elemento dx di AC, percorso dalla corrente ι, è



$$\mathbf{dF} = i'\,\mathbf{dx} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \iota \iota' x\,dx}{\pi(x^2 + l^2)}\,\mathbf{u}_z \quad .$$

Direzione e verso della risultante sono quelli dell'asse z (uscente dal foglio) e il modulo si ottiene integrando:

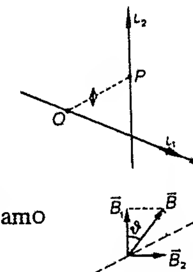
$$F = \frac{\mu_0 i i'}{\pi}\int_a^{2a} \frac{x\,dx}{x^2 + l^2} = \frac{\mu_0 \iota i'}{2\pi}\int_a^{2a} \frac{d(x^2 + l^2)}{x^2 + l^2} = \frac{\mu_0 \iota i'}{2\pi}\log\frac{4a^2 + l^2}{a^2 + l^2} \quad .$$

Il valore numerico è $4.7 \cdot 10^{-5}$N.

5.13. ***Due fili rettilinei indefiniti sono disposti come in figura; le correnti hanno i versi indicati e le intensità $i_1 = 10$A, $i_2 = 15$A; i fili sono ortogonali tra loro e posti in due piani paralleli distanti $d = 40$ cm. Un ago magnetico, con momento ortogonale a QP, si muove lungo QP velocità uniforme $v = 1$ cm/s. Supponendo che le oscillazioni dell'ago attorno alla posizione di equilibrio siano tanto smorzate da poter assumere che durante il moto esso dia esattamente la direzione di B, calcolare la velocità angolare dell'ago quando passa nel punto di mezzo di QP.***

Nel punto generico del segmento QP il campo magnetico è dato dalla composizione dei campi dei due fili. Detta x la coordinata lungo QP misurata a partire da Q,

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x} \quad , \quad B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(d - x)} \quad , \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{B_2}{B_1} = \frac{i_2}{i_1}\,\frac{x}{d - x} \quad .$$



L'ago è diretto lungo il campo risultante **B**; per averne la velocità angolare deriviamo rispetto al tempo l'ultima relazione:

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{i_2}{\iota_1}\,\frac{d}{(d - x)^2}\,\frac{dx}{dt} \quad .$$

Ponendo $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\theta}$, $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$, $\dfrac{dx}{dt} = v$, otteniamo

$$\omega = \frac{\iota_1 i_2 v d}{i_1^2(d - x)^2 + i_2^2 x^2} \Rightarrow \omega\left(x = \frac{d}{2}\right) = \frac{4 \iota_1 \iota_2 v}{d(\iota_1^2 + \iota_2^2)} = 4.62 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} .$$

5.14. ***Un cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico rettilineo di raggio $R_1 = 0.1$ cm, contenuto entro una guaina conduttrice cilindrica, coassiale al conduttore interno, di raggi $R_2 = 0.55$ cm e $R_3 = 0.60$ cm. Calcolare e dare il grafico del campo magnetico B in tutto lo spazio se il conduttore interno è percorso da una corrente $i = 4$A, nei due casi in cui a) la corrente sia distribuita uniformemente solo sulla superficie del conduttore b) la corrente sia distribuita uniformemente su tutta la sezione del conduttore. Si assuma che la stessa corrente percorra in senso inverso la guaina, uniformemente distribuita sulla sezione di questa. Calcolare inoltre, per unità di lunghezza, l'energia magnetica, il coefficiente di autoinduzione e la pressione risentita dal conduttore esterno, nel caso limite $R_2 = R_3$. Ai fini del calcolo si consideri il sistema indefinito.***

Dividiamo lo spazio nelle quattro regioni seguenti:

$$O < r \leqslant R_1 \quad , \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \quad , \quad R_2 \leqslant r \leqslant R_3 \quad , \quad r \geqslant R_3 \quad ;$$

r è la distanza dall'asse del sistema. Per le condizioni di simmetria del problema è senz'altro possibile l'applicazione del teorema di Ampère (5.2).

Nella quarta regione, all'esterno del sistema, il campo è nullo: la corrente concatenata ha infatti il valore $\iota - i$, il cavo appare come un filo non percorso da corrente.

Nella seconda regione ricadiamo nel problema 5.7: non importa come sia distribuita la corrente nel conduttore interno, purché sia rispettata la simmetria cilindrica, come avviene nelle due ipotesi a) e b). Pertanto $B = \mu_0 i/2\pi r$ per $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$.

Nella prima regione, se la corrente è superficiale, il campo è nullo. La simmetria del sistema e il teorema di Ampère porgono, per una qualunque circonferenza ortogonale all'asse e con centro su questo, $B2\pi r = 0$ e ciò è possibile solo se $B = 0$. Se invece la corrente è uniformemente distribuita sulla sezione, l'applicazione del teorema di Ampère alla stessa circonferenza dà $B2\pi r = \mu_0 i_r$, dove i_r è quella parte di i concatenata dalla circonferenza di raggio r. La relazione tra i e i_r si ottiene tramite la densità di corrente: $i = j\pi R_1^2$, $i_r = j\pi r^2$, $i_r = ir^2/R_1^2$ e in conclusione

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2} = \frac{1}{2}\mu_0 j r \quad . \qquad \text{(a)}$$

Il campo magnetico è nullo sull'asse, poi cresce linearmente fino a raccordarsi, a $r = R_1$, col campo nell'intercapedine.

Infine, nella terza regione. cioè all'interno della guaina, la corrente ha la densità $j = i/\pi(R_3^2 - R_2^2)$, per cui quella concatenata da una circonferenza con raggio compreso tra R_2 e R_3 vale $i - i_r = i - j\pi(r^2 - R_2^2)$ e quindi

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\,\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad .$$

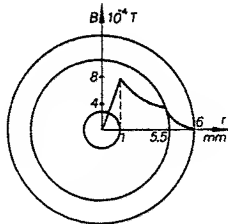
Per $r = R_2$ il campo vale $\mu_0 i/2\pi R_2$, poi decresce fino ad annullarsi per $r = R_3$. Nella figura è mostrata la sezione del cavo, col grafico del modulo del campo. Le espressioni numeriche sono.

$0 \leqslant r \leqslant R_1$ $\qquad B = 0$ oppure $B = 0.8r$ T

$R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ $\qquad B = \dfrac{0.8 \cdot 10^{-6}}{r}$ T

$R_2 \leqslant r \leqslant R_3$ $\qquad B = \dfrac{0.13(3.6 \cdot 10^{-5} - r^2)}{r}$ T

$r \geqslant R_3$ $\qquad B = 0$.



Il calcolo dell'energia magnetica per unità di lunghezza (vedi problema 5.7) lo eseguiamo applicando (5.22) nella regione in cui $B \neq 0$. Poiché ci limitiamo al caso in cui la guaina ha spessore trascurabile, l'energia è somma di due parti, quella relativa al conduttore centrale e quella relativa all'intercapedine, $W = W_1 + W_2$. Nelle due ipotesi fatte:

a) $$W_1 = 0 \quad , \quad W_2 = \frac{1}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0^2 i^2}{4\pi^2 r^2}\, 2\pi r\, dr = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \log\frac{R_2}{R_1} \quad .$$

b) $$W_1 = \frac{1}{2\mu_0}\int_0^{R_1} \frac{\mu_0^2 i^2 r^2}{4\pi^2 R_1^2}\, 2\pi r\, dr = \frac{\mu_0 i^2}{16\pi} \quad , \quad W_2 \text{ come sopra}$$

L'energia magnetica totale per unità di lunghezza vale così:

a) $$W = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\log\frac{R_2}{R_1} = 2.73 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{J}}{\text{m}} \quad .$$

b) $$W = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \log\frac{R_2}{R_1}\right) = (0.40 + 2.73)\cdot 10^{-6} = 3.13 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{J}}{\text{m}} \quad .$$

I coefficienti di autoinduzione nelle due ipotesi si ottengono da (5.26):

a) $$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\log\frac{R_2}{R_1} = 0.34 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad .$$

b) $$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \log\frac{R_2}{R_1}\right) = 0.39 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad .$$

La differenza tra i due casi è data dal fattore costante $\mu_0/8\pi = 5 \cdot 10^{-8}$ H/m, la cui importanza decresce al crescere del rapporto R_2/R_1; nel nostro caso l'incidenza su L (ipotesi b) è del 13%.

Infine calcoliamo la forza per unità di lunghezza che agisce sulla guaina, derivando l'energia magnetica scritta in funzione di r, cioè con r al posto di R_2; il risultato è lo stesso nelle due ipotesi in quanto la differenza tra le energie corrispondenti è una costante.

$$F = \frac{d}{dr}\left(\frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\log\frac{r}{R_1}\right)_{r=R_2} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi R_2} \quad .$$

La superficie laterale per unità di lunghezza è $2\pi R_2$ e quindi la pressione vale

$$p = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 R_2^2} = \frac{B^2(R_2)}{2\mu_0} = 0.84 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad .$$

Come in elettrostatica, *la pressione è eguale alla densità di energia.*

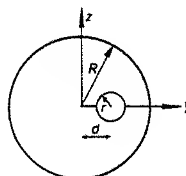
5.15. ***Entro un conduttore cilindrico di raggio $R = 5$ cm è praticato un foro cilindrico parallelo all'asse, di raggio $r = 1$ cm; l'asse del foro dista dall'asse del conduttore $d = 3$ cm. Se il conduttore è percorso da una corrente di densità $j = 4$ A/mm²; uniforme su tutta la sezione, dare l'espressione del campo magnetico lungo la congiungente i due centri e in particolare nel centro del foro.***

Questo problema si presta ad una applicazione del principio di sovrapposizione. Immaginiamo che una corrente $i = j\pi R^2$ percorra tutto il conduttore, compreso il foro, per esempio verso il lettore, e che una corrente $i' = j\pi r^2$ percorra in verso opposto il foro. Se sommiamo queste due correnti otteniamo il caso fisico proposto; d'altra parte, con la scomposizione fittizia della corrente totale in i e i',

abbiamo ridotto il problema al calcolo del campo magnetico di due correnti rettilinee indefinite. La prima dà luogo al campo

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j y\,\mathbf{u}_z \quad 0 \leqslant y \leqslant R \quad , \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 j \pi R^2}{2\pi y}\,\mathbf{u}_z \quad y \geqslant R \quad ,$$

nei punti del semiasse positivo y. Sempre negli stessi punti la seconda corrente produce il campo



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi(d-y)}\,\mathbf{u}_z \quad 0 \leqslant y \leqslant d-r \quad , \quad y \geqslant d+r$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j (d-y)\,\mathbf{u}_z \quad d-r \leqslant y \leqslant d+r$$

Il campo della prima corrente è sempre concorde all'asse z; il campo della seconda è concorde all'asse z per $0 \leqslant y \leqslant d$, si annulla per $y = d$, diviene discorde all'asse z per $y > d$. Per il campo risultante abbiamo:

$0 \leqslant y \leqslant d-r$	$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j \left(y + \frac{r^2}{d-y}\right)\mathbf{u}_z$	crescente
$d-r \leqslant y \leqslant d+r$	$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j d\,\mathbf{u}_z$	costante
$d+r \leqslant y \leqslant R$	$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j \left(y - \frac{r^2}{y-d}\right)\mathbf{u}_z$	crescente
$y \geqslant R$	$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j \left(\frac{R^2}{y} - \frac{r^2}{y-d}\right)\mathbf{u}_z$	decrescente

Numericamente il campo cresce dal valore $0.84 \cdot 10^{-2}$T che ha nell'origine fino al valore $7.54 \cdot 10^{-2}$T, costante entro il foro, poi cresce ancora fino a $11.30 \cdot 10^{-2}$T per $y = R$ e infine decresce fino ad annullarsi all'infinito.

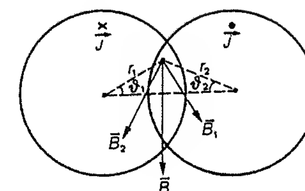
Per punti che non siano sull'asse y la composizione vettoriale dei campi è più difficile in quanto essi cessano di essere paralleli. In ogni caso la simmetria cilindrica è distrutta dalla presenza del foro.

5.16. ***Due correnti rettilinee indefinite, di valore eguale ma di verso opposto, uniformemente distribuite con densità j entro due superficie cilindriche di raggio R, sono parzialmente compenetrate come mostrato in figura; la distanza tra i loro centri è d. Calcolare il campo magnetico nella zona di intersezione. Facendo poi tendere d a zero e j all'infinito in modo che il loro prodotto resti costante, calcolare la densità di corrente sul bordo della distribuzione (si confronti col problema 1.21).***

I campi delle due correnti valgono in modulo (problema 5.14)

$$B_1 = \frac{1}{2}\,\mu_0 j r_1 \quad , \quad B_2 = \frac{1}{2}\,\mu_0 j r_2$$

e hanno le direzioni e i versi mostrati in figura. Le componenti orizzontali sono eguali ed opposte:



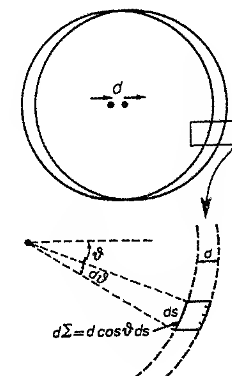
$$B_{1,x} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j r_1 \operatorname{sen}\theta_1 \;, \; B_{2,x} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j r_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

e dal disegno si vede che $r_1 \operatorname{sen}\theta_1 = r_2 \operatorname{sen}\theta_2$, mentre i segni sono opposti. Il campo risultante è verticale e vale

$$B = B_{1,y} + B_{2,y} = \frac{1}{2}\,\mu_0 j r_1 \cos\theta_1 + \frac{1}{2}\,\mu_0 j r_2 \cos\theta_2 = \frac{1}{2}\,\mu_0 j (r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mu_0 j d \quad .$$

Il campo risulta così costante nella zona di intersezione, dove non c'è corrente in quanto le due distribuzioni si elidono.



Far tendere d a zero vuol dire portare le due correnti quasi a sovrapporsi così che resta corrente solo sul bordo; la corrente attraversa in pratica non più una superficie, ma una linea (il contorno della distribuzione) e noi vogliamo calcolare come è distribuita lungo questa linea. Nell'ingrandimento è mostrato un elemento di superficie attraversato dalla corrente (uscente dal foglio) di con densità j per cui $di = j d\Sigma$. La superficie $d\Sigma$ ha base d e altezza $ds \cos\theta$ per cui $di = j d \cos\theta ds$. Al limite per d tendente a zero $d\Sigma$ tende a diventare ds e la corrente di si trova ad attraversare ds con una densità

$$\frac{di}{ds} = j d \cos\theta = j_s \cos\theta \quad .$$

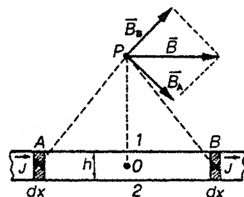
Si parla in tal caso di densità lineare di corrente (dimensioni A/m).

Possiamo concludere che quando si mettono insieme due mezze superficie cilindriche, percorse da due correnti eguali, ma di verso opposto, distribuite ciascuna proporzionalmente al coseno dell'angolo tra il raggio vettore del punto corrente e l'orizzontale, il campo magnetico dentro la superficie cilindrica è costante, con direzione verticale, e vale $B = 1/2\,\mu_0 j_s$, se j_s è il valore massimo della densità lineare di corrente.

5.17. ***Una sottile lamina piana conduttrice indefinita, di spessore h = 1 mm, è percorsa da una corrente distribuita con densità uniforme j, parallela alla***

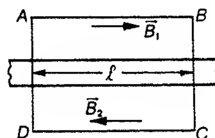
lamina, di modulo* 10 A/mm². *Calcolare il campo magnetico* B *prodotto da tale corrente.

Prendiamo un punto generico P e consideriamo un tratto di lamina, secondo quanto mostrato in figura. La lamina è ortogonale al disegno, la corrente è entrante. Dividiamo la lamina in tante parti, di lunghezza indefinita, altezza h e larghezza dx, che possono essere assimilate a fili indefiniti percorsi dalla corrente $di = j\,d\Sigma = jh\,dx$. Per ognuna di queste parti ce n'è una simmetrica rispetto a O e pertanto il campo $\mathbf{B}$ in P risulta parallelo alla lamina, con verso eguale a quello di $\mathbf{j} \times \mathbf{OP}$. Nel punto simmetrico di P rispetto alla lamina il campo $\mathbf{B}$ è in direzione e modulo eguale a quello in P, ma di verso opposto. Concludiamo che le linee di $\mathbf{B}$ sono parallele tra loro e alla lamina, ortogonali a $\mathbf{j}$, dirette da sinistra a destra nella regione 1 e viceversa nella regione 2.



A questo punto, viste le condizioni di simmetria, invece di eseguire l'integrazione diretta applichiamo il teorema di Ampère (5.2) al rettangolo di lunghezza l alla lamina, mostrato in figura. I lati AD e BC sono ortogonali a $\mathbf{B}$ e ortogonale alla lamina, non danno contributo alla circuitazione. Lungo i lati AB e CD il campo è costante e quindi si ha

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_1 l + B_2 l = \mu_0 i = \mu_0 j l h \quad .$$



B_1 e B_2 sono eguali (i lati AB e CD sono equidistanti dalla lamina), per cui

$$B_1 = B_2 = \frac{1}{2}\,\mu_0 j h \quad .$$

Il risultato non dipende da P: vuol dire che da entrambe le parti della lamina il campo è uniforme, con il valore suddetto. È facile provare in modo analogo che all'interno della lamina, passando dal centro al bordo, il campo cresce lineamente secondo la legge

$$B = \mu_0 j z \quad \text{con} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad .$$

Il prodotto $j_s = jh = i/l$ rappresenta una densità lineare di corrente; essa torna utile nel caso di una lamina infinitamente sottile, percorsa da una corrente finita (j tende a infinito, h a zero, ma il loro prodotto resta finito e vale appunto j_s). $\mathbf{B}$ subisce ora una rotazione brusca di 180° passando da una parte all'altra:

$$\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = \frac{1}{2}\,\mu_0 j_s \mathbf{u}_x - \left(-\frac{1}{2}\,\mu_0 j_s \mathbf{u}_x\right) = \mu_0 j_s \mathbf{u}_x \quad .$$

Nel caso numerico proposto

$$B = 6.28 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \quad , \quad \Delta B = 2B = 12.56 \cdot 10^{-3}\ \text{T} \quad .$$

Oltre alla lamina conduttrice possono esserci altre sorgenti di $\mathbf{B}$. In tal caso si dimostra che la discontinuità $\mu_0 j_s$ permane per la componente del campo parallela alla lamina; in altre parole, una superficie percorsa da corrente è fonte di discontinuità per la componente tangenziale di $\mathbf{B}$; la componente normale resta invece invariata nell'attraversamento. Con notazione vettoriale, data una lamina sottile percorsa da una corrente di densità lineare $\mathbf{j}_s$, questa è legata ai valori del campo magnetico da una parte e dall'altra della lamina dalla relazione

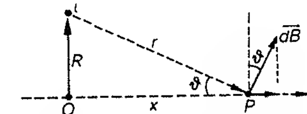
$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\mu_0}\,(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \times \mathbf{u}_n \quad ; \qquad \text{(a)}$$

$\mathbf{u}_n$ è il versore della normale alla lamina, orientata dalla regione 1 alla regione 2. La (a) è vera in generale, qualunque sia la forma della superficie di discontinuità e la direzione di $\mathbf{B}$.

Abbiamo incontrato un effetto di questo genere nel problema 5.14 quando si è considerata l'ipotesi a); si provi a calcolare la densità lineare j_s e si verifichi che passando attraverso la superficie cilindrica di raggio R_1 c'è la discontinuità $\mu_0 j_s$

5.18. ***Una spira circolare di raggio* R = 10 cm *è percorsa da una corrente* i = 10 A. *Calcolare il campo magnetico prodotto dalla spira sul proprio asse e confrontare il risultato con quello ottenibile dal teorema di equivalenza di Ampère (5.13). Verificare inoltre che la circuitazione di* B *lungo l'asse vale* $\mu_0 i$ *e che è nullo, in tutti i punti dell'asse, il potenziale vettore.***

Nella figura la spira è mostrata in sezione; supponiamo che la corrente appaia antioraria se si guarda dall'asse x positivo. Consideriamo l'elemento $\mathbf{dl}$ di spira proprio nel punto in cui la corrente esce dal disegno; per la prima formula di Laplace



$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad ;$$

$\mathbf{dl}$ e $\mathbf{r}$ sono ortogonali tra loro e il campo infinitesimo nel punto P ha perciò direzione e verso come quelli indicati in figura e modulo $dB = \mu_0 i\,dl/4\pi r^2$. Al variare dell'elemento $\mathbf{dl}$ sulla spira i campi elementari si dispongono su una superficie conica di vertice P; essi sono tutti uguali tra loro in modulo. Il campo risultante è quindi diretto secondo l'asse x e concorde ad esso; il modulo è dato da

$$B = \oint dB\ \text{sen}\,\theta = \frac{\mu_0 i\,\text{sen}\,\theta}{4\pi r^2} \oint dl = \frac{1}{2}\,\mu_0 i\,\frac{R\,\text{sen}\,\theta}{r^2} \quad .$$

Poiché $r\,\text{sen}\,\theta = R$ e $x^2 + R^2 = r^2$ abbiamo le varie espressioni

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 i}{2}\,\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2R}\,\text{sen}^3\theta \quad . \qquad \text{(a)}$$

Il modulo di $\mathbf{B}$ è massimo per $x = 0$, cioè nel centro della spira, dove vale $\mu_0 i/2R$, decresce al crescere di x, simmetricamente rispetto al punto O, per

annullarsi all'infinito. Il verso è sempre lo stesso su tutto l'asse, come si prova ripetendo la costruzione della figura per un punto sull'asse x negativo. Se cambia il verso della corrente cambia il verso di **B**.

L'espressione numerica del modulo in funzione di x è

$$B = \frac{6.28 \cdot 10^{-8}}{(x^2 + 10^{-2})^{3/2}}\ \mathrm{T} \quad , \quad B_{max} = 6.28 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T} \quad .$$

Proviamo ora ad applicare alla spira il teorema di equivalenza di Ampère: equipariamo cioè la spira a un dipolo magnetico posto in O, di momento $\boldsymbol{\mu} = i\Sigma \mathbf{u}_x = i\pi R^2 \mathbf{u}_x$. I punti dell'asse sono in prima posizione principale di Gauss (problema 1.18) e in essi $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{x^3}\mathbf{u}_x = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{x^3}\mathbf{u}_x$, che coincide con l'espressione precedentemente trovata per $x \geq R$, dove vale l'approssimazione di dipolo.

La verifica di (5.2) lungo l'asse della spira equivale al calcolo dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B dx = \frac{\mu_0 i R^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2}{2}\left[\frac{x}{R^2(x^2+R^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \mu_0 i \quad .$$

Formalmente il cammino di integrazione viene chiuso lungo una circonferenza di raggio infinito, dove l'integrando è nullo.

Infine, tramite la (5.9), eseguiamo il calcolo del potenziale vettore sull'asse; l'integrazione è estesa alla spira, così che r è costante e

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}\oint d\mathbf{l} = 0 \quad ;$$

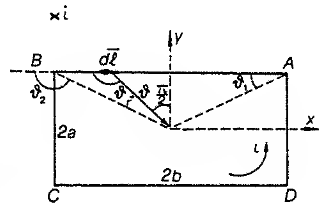
infatti l'integrale vettoriale di **dl** esteso a una linea chiusa è nullo. Il ragionamento non vale più per punti fuori dell'asse, in quanto r non è più costante.

5.19. ***Calcolare il valore del campo magnetico* B *nel centro di una spira rettangolare di lati* $2a = 2$ cm *e* $2b = 4$ cm*, percorsa da una corrente* $i = 0.5$A.**

Secondo la prima formula di Laplace il trattino **dl** indicato nella figura produce nel centro della spira il campo

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl\,\mathrm{sen}\theta}{r^2}\mathbf{u}_z \quad ,$$

parallelo e concorde all'asse z, diretto verso il lettore. Dalla figura risulta



$$r\,\mathrm{sen}\theta = a, \quad a\,\mathrm{tg}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = l \Rightarrow dl = \frac{a\,d\theta}{\mathrm{sen}^2\theta};$$

Effettuando queste sostituzioni e integrando si ha:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad B_{AB} = \frac{\mu_0 i}{-4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad .$$

Poiché $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2 = b/(a^2+b^2)^{1/2}$, otteniamo

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}} \quad .$$

È questa l'espressione generale del campo nel piano mediano di un segmento di lunghezza $2b$, percorso da corrente, calcolato in un punto distante a dal segmento stesso. Il lato CD produce in O un campo identico; per i lati BC e DA il procedimento è analogo, con il solo scambio di a con b. In definitiva

$$B = 2B_{AB} + 2B_{BC} = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}} + \frac{\mu_0 i}{\pi b}\frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{\pi a b}(a^2+b^2)^{1/2} = 2.24 \cdot 10^{-5}\mathrm{T} \quad .$$

5.20. ***Una spira circolare di raggio* $R = 10$ cm*, percorsa da una corrente* $i_1 = 50$A*, è disposta verticalmente. Una piccola spira quadrata, di lato* $d = 5$ mm*, percorsa da una corrente* $i_2 = 0.1$A*, concorde a* i_1*, è complanare e coassiale alla spira più grande. Se la spira piccola è libera di ruotare attorno ad un asse verticale passante per il suo centro, rispetto al quale presenta un momento d'inerzia* $I = 10^{-9}$ Kgm^2*, calcolare qual è il periodo delle piccole oscillazioni. Se invece la spira piccola, restando verticale, è disposta a* 90° *rispetto a quella grande e risente di un momento torcente di costante* $K = 6.10 \cdot 10^{-10}$ Nm/rad*, calcolare qual è la sua posizione di equilibrio.***

La spira maggiore produce nel suo centro il campo magnetico (problema 5.18)

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2R} = 3.14 \cdot 10^{-4}\mathrm{T} \quad .$$

Assumiamo che il valore calcolato dia il campo su tutta l'area della spira piccola. Questa è assimilabile a un dipolo di momento magnetico $\mu = i_2\Sigma = 2.5 \cdot 10^{-6}$ Am^2, parallelo e concorde a **B**. Pertanto, quando viene spostata dalla sua posizione di equilibrio, è sottoposta a un momento di richiamo $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ e obbedisce all'equazione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} \quad \Rightarrow \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu B\,\mathrm{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mu B}{I}\theta = 0 \quad ,$$

l'ultimo passaggio è valido per piccole oscillazioni. La soluzione è un moto armonico di pulsazione $\omega = (\mu B/I)^{1/2}$ e periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{I}{\mu B}\right)^{1/2} = 7.1\ \mathrm{s} \quad .$$

Nel secondo caso la spira piccola è inizialmente soggetta al momento $\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ di modulo μB in quanto $\boldsymbol{\mu}$ e **B** sono ortogonali. Per uno spostamento α da questa posizione, che muti l'angolo da $\pi/2$ a $\pi/2$–α, il momento diviene in

modulo $\mu B \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha) = \mu B \cos\alpha$. Questo, in equilibrio, deve essere eguale al momento torcente

$$\mu B \cos\alpha = K\alpha \quad \Rightarrow \quad 1.308 \cos\alpha = \alpha \quad .$$

Per risolvere questa equazione si può ricorrere a un metodo grafico, cercando l'intersezione delle due curve che rappresentano i membri dell'equazione, oppure procedere per tentativi. Il risultato è $\alpha = 0.856$ rad $= 49.08^0$.

5.21. *Due spire circolari eguali, di raggio* $R = 5$ cm, *hanno lo stesso asse e giacciono in piani paralleli, distanti* $2d = R$. *Esse sono percorse nello stesso verso da una corrente* $i = 100$A. *Calcolare il campo* **B** *sull'asse nel punto di mezzo O tra le due spire. Calcolare inoltre, mediante uno sviluppo in serie, il campo in un punto P distante x da O e trovare quale relazione deve sussistere tra d e R affinché tale campo sia costante fino al terz'ordine in x. Supponendo che la relazione trovata sia soddisfatta, calcolare entro quale intervallo, con centro in O, il campo è costante all'1%.*

Nel punto O le due spire producono lo stesso campo, concorde con l'asse x; per la relazione (a) del problema 5.18

$$B_0 = B_1 + B_2 = \mu_0 i \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad .$$

Se $x = d = R/2$

$$B_0 = \frac{8\mu_0 i}{5^{3/2} R} = 0.90 \cdot 10^{-6} \frac{i}{R} = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ T} \quad .$$

Consideriamo ora un punto sull'asse, per esempio con coordinata x positiva. Il campo è dato dalla somma dei campi delle due spire:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (d+x)^2]^{3/2}} \quad , \quad B_2 = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{[R^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \quad .$$

Sviluppiamo in serie in un intorno del punto O:

$$B_i = B_{i,0} + x\left(\frac{dB_i}{dx}\right)_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2 B_i}{dx^2}\right)_{x=0} + \ldots \qquad i = 1, 2 \quad .$$

Il calcolo esplicito delle derivate, per $x = 0$, porge:

$$\frac{dB_1}{dx} = -\frac{dB_2}{dx} \quad , \quad \frac{d^3 B_1}{dx^3} = -\frac{d^3 B_2}{dx^3} \quad ,$$

$$\frac{d^2 B_1}{dx^2} = \frac{d^2 B_2}{dx^2} = 3 B_{1,0} \frac{(4d^2 - R^2)}{(R^2 + d^2)^2} \quad ,$$

$$\frac{d^4 B_1}{dx^4} = \frac{d^4 B_2}{dx^4} = 45 B_{1,0} \frac{(8d^4 - 12 d^2 R^2 + R^4)}{(R^2 + d^2)^4} \quad .$$

Pertanto il campo magnetico totale vale

$$B = B_1 + B_2 = B_0 \left[1 + \frac{3}{2} x^2 \frac{4d^2 - R^2}{(R^2 + d^2)^2} + \frac{15}{8} x^4 \frac{8d^4 - 12 d^2 R^2 + R^4}{(R^2 + d^2)^4} + \ldots\right]$$

Se la distanza $2d$ tra le spire è eguale al raggio R di queste il termine in x^2 si annulla e l'espressione del campo si semplifica:

$$B = B_0 \left(1 - \frac{144}{125} \frac{x^4}{R^4}\right) = 0.90 \cdot 10^{-6} \frac{i}{R} \left(1 - 1.15 \frac{x^4}{R^4}\right) \quad .$$

Fino al terz'ordine in x il campo in un intorno di O si può considerare costante, con il valore B_0.

Vogliamo infine trovare il valore x_0 tale che

$$\frac{B_0 - B(x_0)}{B_0} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad 1.15 \frac{x_0^4}{R^4} = 0.01 \quad .$$

La soluzione è $x_0 = 0.305R$: ciò vuol dire che il campo è costante all'1% in un intervallo con centro in O lungo $2x_0 = 0.61R$; è questa una parte notevole della distanza $2d = R$ tra le spire.

Il dispositivo studiato è noto come *bobine di Helmholtz* ed è usato nella pratica per produrre campi magnetici uniformi in limitate regioni di spazio. Il valore del campo magnetico può essere aumentato di un fattore n, a parità di corrente, usando invece di due spire due bobine compatte ciascuna formata da n spire.

5.22. *Due bobine di Helmholtz, di raggio* $R = 20$ cm, *sono percorse dalla corrente* $i = 50$A. *Sull'asse delle bobine, nel punto di mezzo tra esse, si trova un ago magnetico di momento d'inerzia* $I = 25$ gcm^2 *e massa* $m = 10$ g. *Determinare il momento magnetico dell'ago, se il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio è* $T = 2$ s, *e il lavoro necessario per ruotare l'ago di 90° rispetto alla posizione di equilibrio. Se si interrompe la corrente in una delle due spire calcolare la forza che sollecita l'ago in quell'istante e la velocità dell'ago dopo aver percorso* 15 cm *dal momento dell'interruzione. Si supponga l'ago di dimensioni trascurabili e si trascuri ogni attrito.*

Il campo nel punto di mezzo tra le bobine è, per la relazione (a) del problema 5.21,

$$B = 0.9 \cdot 10^{-6} \frac{i}{R} = 2.25 \cdot 10^{-4} \text{ T} .$$

Abbiamo trovato più volte che il periodo delle piccole oscillazioni è

$$T = 2\pi \left(\frac{I}{\mu B}\right)^{1/2} \Rightarrow \mu = \frac{4\pi^2 I}{BT^2} = 0.11 \text{ Am}^2 .$$

L'energia dell'ago nella posizione di equilibrio è $W_1 = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B$, mentre a 90° è $W_2 = 0$. Il lavoro necessario per la rotazione risulta

$$L = W_2 - W_1 = \mu B = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ J} .$$

La forza con cui l'ago è attirato verso la bobina percorsa da corrente quando nell'altra si interrompe la corrente è data in modulo da

$$F = \frac{dW}{dx} = \mu \frac{dB}{dx} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{3\mu R^2 x}{(x^2 + R^2)^{5/2}} .$$

La forza è attrattiva: analogamente a quanto avviene per i dipoli elettrici, l'ago tende a portarsi dove il campo è più intenso. Per B si è usata l'espressione del campo sull'asse di una spira circolare (problema 5.18). Posto $x = d = 10$ cm la forza vale $F = 7.4 \cdot 10^{-5}$ N.

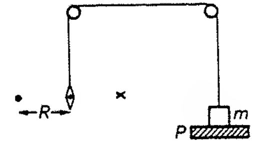
Infine, se l'ago inizia a muoversi quando è a 10 cm dal centro della spira e noi vogliamo la sua velocità 5 cm oltre il centro, cioè dopo i 15 cm richiesti dal problema, basta eguagliare l'energia cinetica acquistata alla variazione di energia magnetica. Poiché $B(5\text{cm}) = 1.43 \cdot 10^{-4}$ T, $B(10\text{cm}) = 1.12 \cdot 10^{-4}$ T e $\Delta T = -\Delta W$, si ha

$$\frac{1}{2} m v^2 = \mu B(5) - \mu B(10) = 3.41 \cdot 10^{-6} \text{ J} \Rightarrow v = 2.61 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Il moto dell'ago è accelerato finché esso non giunge nel centro della spira, dove la sua velocità è massima; poi l'ago subisce una decelerazione e si ferma 10 cm al di là del centro.

5.23. ***Un magnetino, di massa trascurabile e momento magnetico μ, è collegato mediante un filo inestensibile ad una massa $m = 10$ g. Inizialmente il magnetino si trova nel punto O, al centro di una bobina di $N = 100$ spire e di raggio $R = 50$ cm, che sta nel piano orizzontale passante per O. Nella bobina circola una corrente $i = 20$A e il momento magnetico del magnetino è parallelo e concorde a B. Determinare la forza F che agisce in O sul magnetino. Se togliamo la piattaforma P la massa m cade per effetto della gravità e trascina con sé il magnetino. Dopo un tratto $d = R$ la velocità di m risulta $v = 3$ m/s. Calcolare il valore del momento magnetico μ.***

La forza agente sul magnetino è $\mu dB/dx$; nel punto O il campo della spira è massimo per cui la sua derivata è nulla e nulla è anche la forza esercitata dalla spira sul magnetino.



Applichiamo al moto il principio di conservazione dell'energia:

$$mgx - \mu B(0) = \frac{1}{2} m v^2 - \mu B(x)$$

con $B = \frac{\mu_0 N i}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{1/2}}$ e $x = R$. Pertanto

$$mgR - \mu \frac{\mu_0 N i}{2} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - \mu \frac{\mu_0 N i}{2} \frac{1}{\sqrt{8} R} ,$$

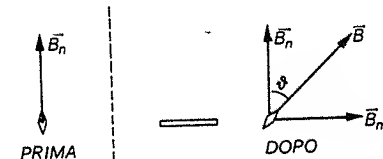
$$\mu \frac{\mu_0 N i}{2} \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right) = m \left(gR - \frac{v^2}{2}\right) ,$$

$$\mu = \frac{mR(2gR - v^2)}{\mu_0 N i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8}}\right)} = 2.46 \text{ Am}^2 .$$

5.24. ***Un magnete a sbarra, di momento d'inerzia $I = 3.17 \cdot 10^{-2}$ Kgm² rispetto ad un asse baricentrico verticale, può oscillare con periodo $T = 10$s nel campo magnetico terrestre. In un luogo non soggetto al campo del magnete si determinano, con un ago magnetico, direzione e verso della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Si avvicina quindi il magnete all'ago in modo che quest'ultimo sia in prima posizione principale di Gauss a distanza $R = 1$ m dal magnete e che la direzione della sbarra e la direzione originaria di equilibrio dell'ago siano a 90°. In seguito a ciò l'ago subisce una deviazione di 45°. Determinare il valore della componente orizzontale del campo magnetico terrestre.***

Il periodo di oscillazione del magnete è legato al momento magnetico del magnete stesso e alla componente orizzontale B_n del campo magnetico terrestre dalla relazione

$$T = 2\pi \left(\frac{I}{\mu B_n}\right)^{1/2} \Rightarrow \mu B_n = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = 1.25 \cdot 10^{-2} \text{ Am}^2 \text{ T} .$$



L'avvicinamento del magnete all'ago provoca la situazione mostrata in figura: i due campi si compongono dando luogo al campo risultante **B** secondo cui si dispone l'ago; B_n e B_m sono legati dalla relazione

$$B_n = \frac{B_m}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{r^3}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_n}{\mu} = \frac{\mu_0}{2\pi r^3}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = 2\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{A\,m^2}} ,$$

essendosi utilizzata per B_m l'espressione del campo generato da un dipolo magnetico di momento μ.

Mettendo insieme le relazioni trovate e eliminando μ

$$B_n^2 = \frac{2\pi\mu_0 I}{T^2 r^3 \operatorname{tg}\theta} \quad \Rightarrow \quad B_n = 0.5\cdot 10^{-4}\ \mathrm{T} = 0.5\ \text{gauss}.$$

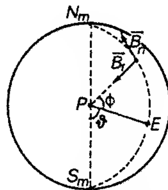
Quello descritto è un metodo classico di determinazione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre.

5.25 *In un punto della superficie terrestre nell'emisfero boreale si misurano le componenti verticale e orizzontale del campo magnetico terrestre. Si trova* $B_r = -0.225$ **gauss**, $B_n = 0.401$ **gauss**. *Considerando il campo terrestre come prodotto da un dipolo magnetico posto al centro della terra, diretto secondo l'asse Sud magnetico – Nord magnetico, e assumendo la terra sferica con raggio* $R = 6370$ **Km**, *si determinino l'angolo ϕ tra CP e CE (vedi figura) e il momento magnetico del dipolo in modulo e verso.*

Ricordando quanto visto per il campo di un dipolo elettrico (problema 1.18) siamo portati alla conclusione che il verso del dipolo è da N_m a S_m: siamo infatti nell'emisfero in cui il campo punta verso l'interno della superficie, che è l'emisfero posteriore. D'altra parte sappiamo che $B_n/B_r = 1/2\ \operatorname{tg}\theta$ essendo θ l'angolo tra il momento di dipolo e il raggio vettore $\mathbf{r} = \mathbf{CP}$. Essendo B_n e B_r di segno opposto $\operatorname{tg}\theta$ è minore di zero e θ è maggiore di 90°: si conferma che il verso deve essere da N_m a S_m. Numericamente

$$\operatorname{tg}\theta = -2\,\frac{B_n}{B_r} = -3.564 \quad \Rightarrow \quad \theta = 105.67^0 \quad \simeq \quad 105°\ 40'$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \theta - \frac{\pi}{2} = 15.67° \quad \simeq \quad 15°\ 40'$$



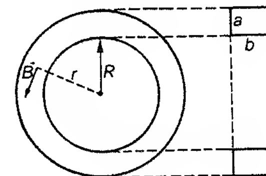
(E è un punto sull'equatore magnetico, appartenente al meridiano magnetico passante per P).

Per il calcolo del momento del dipolo equivalente possiamo servirci della relazione che dà la componente trasversa:

$$B_n = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu \operatorname{sen}\theta}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{4\pi R^3 B_n}{\mu_0 \operatorname{sen}\theta} = 1.08\cdot 10^{23}\ \mathrm{A\,m^2} .$$

5.26. *Un avvolgimento di* $N = 10^3$ *spire è disposto su una superficie torica a sezione rettangolare* ($a = 6$ cm, $b = 10$ cm), *di raggio interno* $R = 15$ cm *(vedi figura). Esso è percorso da una corrente* $i = 3$A. *Dare l'espressione del campo magnetico* **B** *all'interno della superficie e calcolare il flusso totale concatenato con l'avvolgimento. Calcolare inoltre il coefficiente di autoinduzione e l'energia magnetica contenuta entro la superficie.*

Fissiamo una circonferenza generica con centro sull'asse del toro e raggio r tale che $R < r < R + a$. Considerazioni di simmetria ci fanno prevedere che il campo magnetico ha in ogni punto della circonferenza lo stesso modulo ed è tangente alla circonferenza stessa, per cui l'applicazione del teorema di Ampère (5.2) dà



$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 N i \quad , \quad B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} .$$

Il campo non è costante entro la superficie torica: varia con la distanza dall'asse, decrescendo al crescere di essa. Solo se $a \ll R$ si può assumere che in pratica **B** sia uniforme.

Il flusso concatenato con l'avvolgimento è N volte quello concatenato con una spira:

$$\Phi = N\int B\,d\Sigma = \frac{\mu_0 N^2 i b}{2\pi}\int_R^{R+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 i b}{2\pi}\log\frac{R+a}{R} , \qquad \text{(a)}$$

nell'ipotesi che **B** sia costante sulla sezione a parità di r. Di qui e da (5.20)

$$L = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi}\log\frac{R+a}{R} . \qquad \text{(b)}$$

I valori numerici sono

$$\Phi = 2.02\cdot 10^{-2}\ \mathrm{Wb} \quad , \quad L = 0.67\cdot 10^{-2}\ \mathrm{H} .$$

L'energia magnetica compresa nel volume racchiuso dalla superficie torica si calcola a partire da (5.21) e (5.22). Nel volume infinitesimo $d\tau = 2\pi r b\,dr$ il campo ha il valore costante $B = \mu_0 N i/2\pi r$ e pertanto

$$W = \int \frac{B^2}{2\mu_0}\,d\tau = \frac{\mu_0 b N^2 i^2}{4\pi}\log\frac{R+a}{R} = \frac{1}{2}\,L i^2$$

e si verifica nel nostro caso particolare la (5.26). Alla stessa espressione dell'energia si arriva attraverso (5.23): le N spire sono percorse tutte dalla stessa corrente e interessate dallo stesso flusso Φ' per cui

$$W = \frac{1}{2}\sum_1^N i_k \Phi_k = \frac{1}{2}\ i N \Phi' .$$

Ma $N\Phi'$ dà il flusso totale (a) e si riottiene la (c). L'applicazione di (5.24) avrebbe portato a un risultato errato dovendosi considerare N circuiti e non uno solo. Numericamente $W = 3\cdot 10^{-2}$ J.

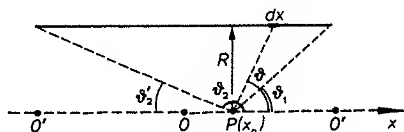
Notiamo che se i fili lungo a fossero esattamente radiali e quelli lungo b esattamente ortogonali al disegno, il campo **B** all'esterno dell'avvolgimento sarebbe rigorosamente nullo. In effetti le spire sono avvolte necessariamente lungo un'elica per cui la corrente è anche leggermente tangenziale; questo fatto porta all'esistenza di un campo, sia pur debole, all'esterno della superficie torica. Vedremo nel problema 5.31 come si possa trattare un caso analogo a quello ora descritto.

5.27. ***Un avvolgimento di $N = 5 \cdot 10^3$ spire è disposto sulla superficie di un cilindro retto, lungo $d = 50$ cm e di raggio $R = 5$ cm, costituendo quello che si chiama un solenoide rettilineo. Esso è percorso da una corrente $i = 2$A. Dare l'espressione del campo magnetico nei punti dell'asse del sistema ed estendere il risultato al caso in cui d tenda all'infinito, calcolando pure la differenza percentuale del modulo di B nel centro del solenoide tra i due diversi casi. Ricavare inoltre il coefficiente di autoinduzione e l'energia magnetica per unità di lunghezza sempre nel caso limite del solenoide indefinito.***

Diciamo $n = N/d$ il numero di spire per unità di lunghezza; se esse sono abbastanza fitte così da poterle pensare distribuite con continuità, sul tratto dx vi sono ndx spire. Il campo **B** nel punto $P(x_0)$ si calcola come il campo sull'asse di una spira percorsa dalla corrente $nidx$:

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n\,dx}{2r^3} \quad ;$$

esso è parallelo all'asse x e il verso dipende da quello della corrente. Si vede che



$$r\,\text{sen}\,\theta = R \quad , \quad x - x_0 = R\,\text{ctg}\,\theta \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{R}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta$$

e il campo totale nel punto P vale

$$B = -\frac{\mu_0 n i}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{\mu_0 n i}{2}\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = \frac{\mu_0 n i}{2}\,(\cos\theta_1 + \cos\theta_2');$$

θ_1 e θ_2' sono gli angoli sotto cui sono viste dal punto P le spire terminali del solenoide. In funzione della distanza x dal centro del solenoide si ha

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2}\left\{\frac{0.5\,d - x}{[(0.5\,d - x)^2 + R^2]^{1/2}} + \frac{0.5\,d + x}{[(0.5\,d + x)^2 + R^2]^{1/2}}\right\} \qquad \text{(a)}$$

Nel centro del solenoide $x = 0$ e pertanto

$$B = B_0 = \mu_0 n i\,\frac{d}{(d^2 + 4R^2)^{1/2}} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Questo è il valore massimo del campo: esso decresce con x, simmetricamente rispetto a O, conservando su tutto l'asse lo stesso verso. Nei centri O' delle facce estreme

$$B_{0'} = \frac{\mu_0 n i}{2}\,\frac{d}{(d^2 + R^2)^{1/2}} \quad . \qquad \text{(c)}$$

Quando d tende all'infinito il campo tende a diventare uniforme in tutto il solenoide assumendo il valore

$$B_\infty = \mu_0 n i \quad . \qquad \text{(d)}$$

Questa espressione nella pratica dà con buona approssimazione il campo nella zona centrale del solenoide finito con $d \gg R$; in tali condizioni inoltre $B_{0'} = B_\infty/2$.

Nel caso numerico proposto

$$B_\infty = 2.51 \cdot 10^{-2}\ \text{T} \quad , \quad B_0 = 0.98\,B_\infty = 2.46 \cdot 10^{-2}\ \text{T} \quad ,$$

$$\frac{B_\infty - B_0}{B_\infty} = 2 \cdot 10^{-2} \quad .$$

Calcoliamo il coefficiente di autoinduzione dal flusso concatenato; nell'unità di lunghezza ed essendo il campo uniforme abbiamo

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{n\Sigma B_\infty}{i} = \mu_0 n^2 \Sigma = 0.987\ \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad . \qquad \text{(e)}$$

L'energia magnetica per unità di lunghezza risulta allora

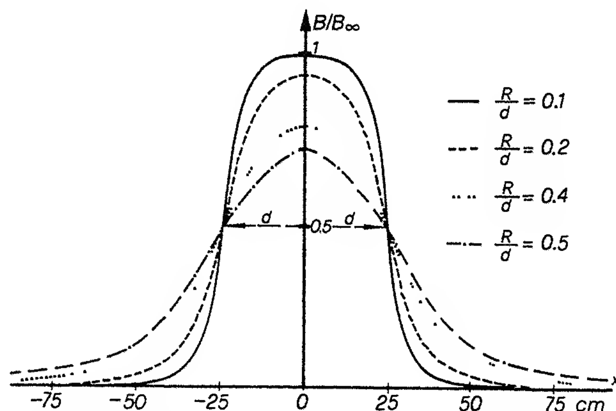
$$W = \frac{1}{2}\,L i^2 = 1.97\ \frac{\text{J}}{\text{m}} \quad .$$

5.28. ***Discutere, ricorrendo anche ad una rappresentazione grafica, come varia il campo magnetico nei punti dell'asse di un solenoide lungo $d = 50$ cm a seconda che il raggio assuma i valori $R = 5, 10, 15, 20, 25$ cm.***

Per ottenere risultati dipendenti solamente dalle caratteristiche geometriche del solenoide, consideriamo il rapporto tra il campo in un punto generico dell'asse distante x dal centro del solenoide e il campo del solenoide indefinito. Dalle (a) e (d) del problema 5.27 otteniamo

$$\frac{B(x)}{B_\infty}=\frac{1}{2}\left\{\frac{0.5\,d-x}{[(0.5\,d-x)^2+R^2]^{1/2}}+\frac{0.5\,d+x}{[(0.5\,d+x)^2+R^2]^{1/2}}\right\} .$$

Questo rapporto in funzione di x è mostrato nella figura per i vari valori di R/d.



Osserviamo innanzitutto che all'aumentare di R/d diminuisce la regione nell'intorno del centro in cui il campo può essere considerato uniforme e diminuisce anche il valore nel centro. dato dalla (b) del problema 5.27; precisamente

$$\frac{B_\infty-B_0}{B_\infty}=\frac{\Delta B}{B_\infty}=1-\frac{1}{[1+(2R/d)^2]^{1/2}} .$$

Sempre all'aumentare di R/d si estende la regione all'esterno del solenoide in cui c'è campo magnetico apprezzabile diverso da zero; come misura dell'effetto assumiamo il rapporto $B(x_R)/B_0$ con $x_R=0.5\ d+R$.

Infine il rapporto tra il campo magnetico $B_{0'}$ nel centro di una faccia del solenoide ($x=d/2$) e B_0, ricavato usando le (b) e (c) del problema 5.27, varia con la legge

$$\frac{B_{0'}}{B_0}=\frac{1}{2}\left[\frac{1+(2R/d)^2}{1+(R/d)^2}\right]^{1/2} .$$

I valori dei rapporti considerati sono riportati in tabella:

R/d	0	0.1	0.2	0.4	0.5
$\Delta B/B_\infty$	0	0.02	0.07	0.22	0.29
$B(x_R)/B_0$	—	0.147	0.150	0.163	0.171
$B_{0'}/B_0$	0.50	0.51	0.53	0.59	0.63

5.29. *Per alcune esperienze di fisica subnucleare eseguite con l'anello di accumulazione per elettroni e positroni Adone dei Laboratori nazionali di Frascati è stato costruito un magnete del tipo solenoide in aria. La lunghezza è* $d=2$ m, *il raggio è* $R=1$ m. *Esso è alimentato da un generatore di potenza* $P_0=1.5\cdot10^6$ W *con una corrente* $i=5\cdot10^3$ A. *Le spire sono di alluminio* ($\varrho=2.8\cdot10^{-8}$ Ωm) *e si suppone di poter tollerare in esse una densità di corrente* $j=8.5$ A/mm². *Nei cavi di collegamento del solenoide con l'alimentatore vengono dissipati* $P'=0.2\cdot10^6$ W. *Calcolare il campo nel centro del solenoide e la portata dell'acqua nel circuito di raffreddamento delle spire se questa non deve superare di più di 20°C la propria temperatura iniziale. Determinare inoltre la pressione magnetica nel solenoide nell'ipotesi che sia indefinito e il costo di esercizio orario se l'energia elettrica costa L lire al chilowattora.*

Il campo magnetico nel centro del solenoide vale, secondo la (b) del problema 5.27

$$B_0=\frac{\mu_0 n i d}{(d^2+4R^2)^{1/2}}=4.44n\cdot10^{-3}\ \mathrm{T} .$$

Determiniamo il numero delle spire in base ai dati sulla densità di corrente e sulla potenza disponibile. Abbiamo per la sezione del conduttore e la resistenza di una spira

$$\Sigma=\frac{i}{j}=5.88\cdot10^{-4}\mathrm{m}^2 \quad , \quad R_S=\varrho\frac{l}{\Sigma}=\varrho\frac{2\pi R}{\Sigma}=3\cdot10^{-4}\ \Omega .$$

La resistenza totale del solenoide si ricava dalla potenza disponibile:

$$R=\frac{P_0-P'}{i^2}=5.2\cdot10^{-2}\ \Omega \quad\Rightarrow\quad N=\frac{R}{R_S}=173 .$$

In conclusione il campo magnetico nel centro risulta

$$B_0=4.44\cdot10^{-3}\ \frac{N}{d}=0.384\ \mathrm{T} .$$

Rispetto al campo del solenoide indefinito $B_\infty=\mu_0 N i/d=0.543$ T c'è una riduzione del 29%, come torna con i risultati del problema 5.28 se $d=2R$.

Nel tempo t viene dissipata nella bobina del solenoide l'energia $Pt=(P_0-P')t$. Se il calore prodotto deve essere ceduto all'acqua del circuito di raffreddamento provocando un aumento di temperatura $\Delta T=20$°C, occorre che

$$mc\Delta T=Pt \quad\Rightarrow\quad \tau\delta c\Delta T=(P_0-P')t \quad\Rightarrow\quad \frac{\tau}{t}=\frac{P_0-P'}{\delta c\Delta T} ;$$

δ è la densità dell'acqua (10^3 Kg/m³), c il suo calore specifico ($4.18\cdot10^3$ J/Kg°C), τ/t è la portata (volume per unità di tempo). Numericamente

$$\frac{\tau}{t}=15.6\cdot10^{-3}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}=15.6\ \frac{\mathrm{litri}}{\mathrm{s}} .$$

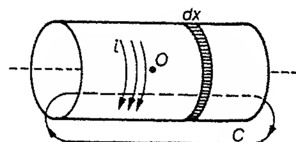
Per inciso, questo raffreddamento è essenziale per evitare la fusione dell'alluminio.

La pressione è eguale alla densità di energia (problema 5.14) per cui

$$p = \frac{1}{2\mu_0} B_\infty^2 = 1.17 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \simeq 1.16 \text{ atm.}$$

Infine, per il calcolo del costo orario, si consideri che la potenza totale erogata è $P_0 = 1.5 \cdot 10^6$ W $= 1.5 \cdot 10^3$ KW cui corrisponde in un'ora di funzionamento una dissipazione di energia di 1500 KWh e un costo di 1500 L lire.

5.30. ***Una guaina cilindrica conduttrice di spessore trascurabile, lunga $d = 50$ cm e di raggio $R = 10$ cm, è percorsa da una corrente $i = 50$A in senso circolare: le linee di corrente sono circonferenze di raggio R, normali all'asse della guaina. Calcolare il campo magnetico B nel punto centrale O della guaina e la circuitazione di esso lungo la linea C della figura. Ripetere il calcolo nel caso in cui le linee di corrente siano parallele all'asse della guaina.***



Possiamo suddividere la guaina in infinite fettucce circolari infinitesime, di raggio R e spessore dx, percorse dalla corrente

$$di = \frac{i}{d}\, dx = j_c dx \quad ,$$

j_c è una densità lineare di corrente: se si traccia sulla superficie cilindrica una linea parallela all'asse, di lunghezza unitaria, essa è attraversata dalla corrente j_c. Il problema diviene così identico a quello del solenoide rettilineo, per cui valgono le relazioni trovate nel problema 5.27, con la sostituzione di j_c al posto di ni, che è la densità lineare di corrente nel solenoide. Pertanto

$$B_0 = \frac{\mu_0 j_c d}{(d^2 + 4R^2)^{1/2}} = 1.17 \cdot 10^{-4} \text{ T} \quad .$$

Se la guaina fosse indefinita, il campo esterno sarebbe nullo mentre quello interno sarebbe uniforme con valore $B_\infty = \mu_0 j_c = 1.26 \cdot 10^{-4}$ T.

Per il calcolo della circuitazione si applica direttamente il teorema di Ampère:

$$\Gamma_C(\mathbf{B}) = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i = \mu_0 j_c d = 6.28 \cdot 10^{-5} \text{ Tm.}$$

Nel secondo caso dividiamo invece la corrente in tante strisce infinitesime, parallele all'asse, larghe dl, ciascuna equiparabile ad un filo rettilineo percorso dalla corrente $di = (i/2\pi R)\; dl = j_l dl$; j_l, densità lineare di corrente, è la corrente che attraversa un arco di lunghezza unitaria preso su una circonferenza di raggio R ortogonale all'asse. Senza fare alcun calcolo possiamo prevedere che il campo magnetico nel centro O è nullo: infatti, se prendiamo sulla guaina a due a due le strisce diametralmente opposte, queste producono ovunque sull'asse campi eguali ed opposti. Ciò non è più vero appena si esce dall'asse in quanto viene meno la simmetria.

Se il conduttore cilindrico è indefinito, ricadiamo nell'ipotesi a) del problema 5.14: il campo è nullo ovunque all'interno e all'esterno vale $B = \mu_0 i/2\pi r = \mu_0 j_l R/r$ nei punti distanti r dall'asse.

Il calcolo della circuitazione richiede alcune considerazioni supplementari. Nel primo caso è possibile generare una corrente come quella descritta senza che ci siano connessioni con un generatore (per esempio tramite il fenomeno dell'induzione elettromagnetica). Ciò non è possibile invece nel caso ora in esame: devono esserci almeno due conduttori che connettano la guaina a un generatore. A seconda che la linea C concateni o meno questi conduttori si avrà una circuitazione diversa da zero e pari a $\mu_0 i$ o nulla.

5.31. ***L'avvolgimento di un solenoide è necessariamente disposto secondo un'elica cilindrica; si supponga pertanto che, dato un solenoide indefinito, la progressione effettiva della corrente sia equiparabile al sovrapporsi di una corrente superficiale puramente circolare e di una corrente superficiale puramente longitudinale. In questa ipotesi calcolare il rapporto tra il modulo di B in un generico punto esterno e il modulo di B all'interno in funzione del passo dell'elica. Se in particolare il passo vale $h = 1$ mm e il raggio del solenoide è $R = 10$ cm, calcolare il valore del rapporto per punti esterni distanti $r = 10$, 20, 50 cm dall'asse.***

Applichiamo il principio di sovrapposizione sfruttando i risultati trovati nel problema 5.30 per la guaina indefinita. Il campo all'esterno del solenoide è dovuto solo alla corrente longitudinale mentre quello all'interno solo alla corrente circolare. Ne segue che il rapporto richiesto si scrive:

$$\frac{B_e}{B_i} = \mu_0 j_l \frac{R}{r} \frac{1}{\mu_0 j_c} = \frac{j_l}{j_c} \frac{R}{r} \tag{a}$$

Si tratta ora di mettere in relazione questa espressione con il passo h dell'elica. Ricordiamo dal problema 5.5 che la densità di corrente è proporzionale alla velocità delle cariche; nel nostro caso il moto delle cariche è composto da un moto circolare uniforme e da un moto rettilineo uniforme. Pertanto il rapporto delle densità di corrente, eguale al rapporto delle corrispondenti velocità, risulta pari, essendo i moti uniformi, al rapporto degli spazi percorsi nello stesso tempo:

$$\frac{j_l}{j_c} = \frac{v_l}{v_c} = \frac{h}{2\pi R} \quad .$$

Introducendo questo risultato nella (a) otteniamo l'espressione cercata:

$$\frac{B_e}{B_i} = \frac{h}{2\pi r} \qquad r > R \quad .$$

Il rapporto tra i moduli dipende esclusivamente da fattori geometrici. Deve essere ben chiaro che questo campo esterno non è dovuto al fatto che, essendo il solenoide finito, le linee di campo si chiudono su se stesse all'esterno del solenoide. Noi stiamo trattando il solenoide indefinito, le cui linee di campo interne sono rette parallele confinate entro il solenoide stesso. Il campo esterno è dovuto esclusivamente al fatto che la corrente avanza lungo il solenoide (le linee di $\mathbf{B}_e$ sono circonferenze ortogonali all'asse).

Nel caso numerico proposto $h = 10^{-3}$ m e abbiamo

r(cm)	10	20	50
B_e/B_i	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$0.79 \cdot 10^{-3}$	$0.32 \cdot 10^{-3}$

Possiamo dire che nella pratica l'effetto è trascurabile; se B_i è dell'ordine del tesla, B_e è dell'ordine di qualche gauss.

Anche il valore di B_i è alterato dal moto non solo circolare delle cariche (cioè B_i non è $\mu_0 ni$). Se j è la densità lineare di corrente, pari a ni, scriviamo la componente circolare come $j_c = j\cos\phi$ essendo

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{j_l}{j_c} = \frac{h}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2\phi)^{1/2}} = \frac{1}{[1+(h/2\pi R)^2]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad B_i = \mu_0 j_c = \frac{\mu_0 ni}{[1+(h/2\pi R)^2]^{1/2}} \quad .$$

Essendo in generale $h \leq R$ l'effetto è molto piccolo; con $h = 1$ mm e $R = 10$ cm il fattore correttivo è $(1-2) \cdot 10^{-6}$, con $h = 1$ cm è $(1 \div 2) \cdot 10^{-4}$.

5.32. ***Calcolare il potenziale vettore generato da un solenoide indefinito con n spire per unità di lunghezza, percorso dalla corrente i, sfruttando l'analogia formale tra la relazione che lega* A *e* B *e quella che lega* B *e* j *in un filo indefinito percorso da una corrente uniformemente distribuita sulla sezione del filo.***

La relazione (5.1) $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ porta, in un filo indefinito percorso da corrente, ad un campo di modulo

$$B = \frac{\mu_0 ir}{2\pi R^2} = \frac{1}{2}\,\mu_0 jr \quad r \leq R \quad , \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 jR^2}{2r} \quad r \geq R \quad ;$$

R è il raggio del filo (si veda il problema 5.14). Le linee di $\mathbf{j}$ sono rette parallele al filo, le linee di $\mathbf{B}$ sono circonferenze ortogonali al filo.

La relazione generale tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}$; inoltre, per un solenoide indefinito, $\mathbf{B}$ è uniforme sulla sezione e le sue linee sono rette parallele all'asse. Il caso matematico è pertanto identico: la sostituzione $B \to A$, $j \to B$ ci dà la soluzione, tenendo conto che la costante di proporzionalità è ora 1 ($\mu_0 \to 1$). Le linee del potenziale vettore sono circonferenze coassiali al solenoide e il suo modulo vale:

$$A = \frac{1}{2}\,Br = \mu_0 \frac{nir}{2} \quad r \leq R \quad , \quad A = \frac{BR^2}{2r} = \mu_0 \frac{niR^2}{2r} \quad r \geq R \quad ;$$

R indica ora il raggio del solenoide. Il potenziale vettore cresce linearmente all'interno del solenoide, è continuo per $r = R$ (a differenza del campo magnetico che presenta la discontinuità $\mu_0 ni$, vedi problema 5.14), poi decresce proporzionalmente a $1/r$.

5.33. ***Due solenoidi, di eguale lunghezza l = 40 cm e di raggio $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm, hanno ciascuno n = 10^3 spire per metro e sono percorsi nello stesso verso da due correnti eguali, pari a i = 2A, fornite da due generatori diversi. I solenoidi sono coassiali e il più piccolo può penetrare di un tratto x della sua lunghezza all'interno dell'altro. Trascurando gli effetti di bordo calcolare in funzione di x l'energia magnetica del sistema, la forza di attrazione tra i solenoidi, il lavoro delle forze del campo per risucchiare completamente il secondo solenoide, l'energia fornita dai generatori nello stesso processo. Si supponga che le correnti rimangano sempre costanti.***

L'energia magnetica (vedi paragrafo 5f.) è data da

$$W = \frac{1}{2}\,L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}\,L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \qquad \text{(a)}$$

con L_1 e L_2 induttanze dei due solenoidi e M coefficiente di mutua induzione. L_1 e L_2 sono dati dalla (c) del problema 5.27 e valgono

$$L_1 = \mu_0 n^2 \pi r_1^2 l = 2.53 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} \quad , \quad L_2 = \mu_0 n^2 \pi r_2^2 l = 0.63 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} \quad ;$$

essendo caratteristici dei singoli solenoidi essi non dipendono dalla coordinata x. Per il calcolo di $M(x)$ sia $\Phi_{1,2} = B_1 \pi r_2^2 = \mu_0 n_1 \pi r_2^2 i_1$ il flusso di $\mathbf{B}_1$ attraverso una spira del secondo solenoide (interna al primo). Il flusso totale di $\mathbf{B}_1$ è quello attraverso le $n_2 x$ spire del secondo solenoide che stanno dentro il primo:

$$\Phi_{1,2}^T = \mu_0 n_1 n_2 \pi r_2^2 x i_1 \quad ;$$

secondo la definizione (5.20) e ricordando nel calcolo che $n_1 = n_2 = n$,

$$M = \mu_0 n_1 n_2 \pi r_2^2 x = 1.58 \cdot 10^{-3} x\,\mathrm{H} \quad .$$

Pertanto la (a) con $i_1 = i_2 = 2\mathrm{A}$ dà:

$$W(x) = (5.06 + 1.26 + 6.32x) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J} \quad .$$

Il calcolo della forza si effettua applicando la (5.27):

$$F = \frac{dW}{dx} = i_1 i_2 \frac{dM}{dx} = \mu_0\, n_1 n_2 \pi r_2^2\, i_1 i_2 = 6.32 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N} \quad ,$$

indipendente da x. Il lavoro compiuto dalle forze del campo per risucchiare completamente il secondo solenoide a correnti costanti è dato da

$$L = Fl = \mu_0 n_1 n_2 \pi r_2^2 i_1 i_2 l = 2.52 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

e si verifica subito che il lavoro è eguale alla variazione di energia magnetica:

$$\Delta W = W_f - W_i = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M(l) i_1 i_2 - \frac{1}{2} L_1 i_1^2 - \frac{1}{2} L_2 i_2^2$$

$$= M(l) i_1 i_2 = \mu_0 n_1 n_2 \pi r_2^2 i_1 i_2 l = L \quad .$$

Il sistema evolve quindi verso lo stato in cui l'energia magnetica è massima: ciò è permesso dalla presenza dei generatori che provvedono a fornire il lavoro L per attirare il secondo solenoide e l'aumento di energia ΔW. Essendo $L = \Delta W$, complessivamente i generatori erogano

$$L_{gen} = L + \Delta W = 2\Delta W = 5.04 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J} \quad .$$

I risultati ottenuti chiariscono il significato del termine $M i_1 i_2$; sia la forza che la variazione di energia conseguente all'azione della forza sono direttamente legate ad esso, e più precisamente alle variazioni di M:

$$F = i_1 i_2 \frac{dM}{dx} \quad , \quad \Delta W = i_1 i_2 \Delta M \quad .$$

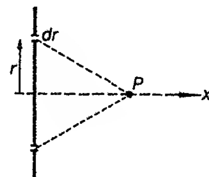
Quel termine descrive pertanto l'interazione mutua tra i due solenoidi ed è corretto chiamarlo energia mutua del sistema.

Una situazione simile si ritrova anche in elettrostatica, per esempio nella configurazione studiata nel problema 2.25.

5.34. ***Un disco circolare di raggio R = 15 cm possiede una carica elettrica uniformemente distribuita con densità σ = 10⁻⁵ C/m². Esso viene fatto ruotare attorno al proprio asse in modo da compiere 200 giri al secondo. Calcolare il campo magnetico sull'asse del disco a distanza x = 8 cm dal centro.***

La carica che si trova sulla corona circolare compresa tra i raggi r e $r + dr$ vale

$$dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma r dr$$



e, a causa della rotazione, è equivalente alla corrente che percorre una spira circolare di raggio r:

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\, dq = \omega\sigma r dr \quad ;$$

T e ω sono periodo e velocità angolare della rotazione del disco. Il sistema è così assimilabile a un insieme di spire complanari e coassiali; per la (a) del problema 5.18 ciascuna di queste produce nel punto P il campo magnetico

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2} \frac{r^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \omega\sigma}{2} \frac{r^3 dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad .$$

Il campo totale si ottiene integrando (ad esempio per parti) tra zero e R:

$$B = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left[\frac{2x^2 + r^2}{(x^2 + r^2)^{1/2}}\right]_0^R = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\left[\frac{2x^2 + R^2}{(x^2 + R^2)^{1/2}} - 2x\right] \quad .$$

Nel caso specifico proposto $B(x = 8\ \mathrm{cm}) = 3.8 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{T}$.

Il dispositivo studiato è una schematizzazione di un esperimento condotto da H. Rowland nel 1878, con il quale si mise in evidenza per la prima volta che gli effetti magnetici prodotti da un corpo carico in moto non differiscono da quelli delle correnti elettriche. L'esperimento è molto difficile vista la piccolezza dei campi in gioco.

5.35. ***Un cilindro cavo, di raggio R = 4 cm, carico con densità superficiale di carica uniforme σ = 10⁻⁶ C/m², ruota attorno al proprio asse con velocità angolare ω = 628 rad/s. Calcolare il campo magnetico sull'asse.***

Il sistema può essere assimilato a un solenoide con corrente perfettamente circolare (problema 5.30). La densità lineare di corrente j_c è data dal rapporto tra la carica superficiale per unità di lunghezza e il periodo di rotazione:

$$j_c = 2\pi R\sigma \frac{\omega}{2\pi} = \omega\sigma R \quad .$$

Stabilito questo, valgono tutte le relazioni viste nel problema 5.27, purché appunto si sostituisca $\omega\sigma R$ a ni. In particolare, se il cilindro è abbastanza lungo, si ha nel centro con buona approssimazione

$$B = \mu_0\omega\sigma R = 3.16 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{T} \quad .$$

Questo sarebbe il campo di un solenoide indefinito con $ni = 2.5 \cdot 10^{-5}$ A/m, cioè percorso da una corrente molto piccola. Viceversa è interessante notare che ad un solenoide di raggio $R = 4$ cm e fattore $ni = 10^3$, il che è di facile realizzazione, corrisponderebbe, volendo ottenere col cilindro rotante di raggio R un egual campo,

a) se $\omega = 628$ rad/s, una densità di carica $\sigma = 39.8\ \mathrm{C/m^2}$,
b) se $\sigma = 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$, una velocità angolare $\omega = 2.5 \cdot 10^{10}$ rad/s.

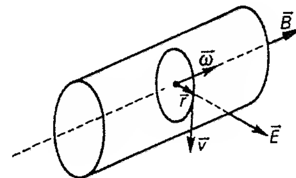
Tali valori di ω e σ sono chiaramente irrealizzabili; nel primo caso perché già con densità molto più piccole si avrebbero scariche nel dielettrico in cui si trova il cilindro, nel secondo addirittura perché i punti della superficie del cilindro avrebbero una velocità lineare superiore a quella della luce, in contrasto con la teoria della relatività. Ma anche valori intermedi, tali però da dare sempre $\omega\sigma R = 10^3$, portano visto il vincolo su σ a valori proibitivi per ω, su una base puramente meccanica. La ragione prima di questi fatti sta nell'enorme differenza, anche se solo quantitativa, tra l'entità della carica elettrostatica che può risiedere su un corpo, da mettere poi in movimento, e della carica che

può circolare nei conduttori: su una sfera di raggio 1 m portata a 10^6 V c'è una carica libera di circa 10^{-4} C, in un conduttore può essere messa in movimento una carica di 10^9 C/m^3, portata dagli elettroni di conduzione ($q = ne \approx 10^{28} \cdot 10^{-19}$).

5.36. ***Un cilindro di raggio $R = 10$ cm, costituito da materiale dielettrico omogeneo ($\varkappa = 5$), ruota attorno al proprio asse con velocità angolare $\omega = 10^3$ rad/s. Esso è immerso in un campo magnetico uniforme B, di modulo 0.5 T, parallelo e concorde a ω. Calcolare in modulo, direzione e verso la polarizzazione P all'interno e sulla superficie del cilindro e le densità delle cariche di polarizzazione.***

Le cariche che compongono il dielettrico, poste in rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, cioè con velocità lineare $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, sono sottoposte al campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} \quad ,$$



diretto secondo il raggio del cilindro e di modulo $E = \omega r B$; il verso, nel nostro caso, è quello indicato in figura. Pertanto

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varkappa - 1)\mathbf{E} = \varepsilon_0(\varkappa - 1)\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} \quad .$$

Da questa espressione deduciamo le densità di carica di polarizzazione (paragrafo 3a.). Sulla superficie del cilindro c'è la densità

$$\sigma = P(R) = \varepsilon_0(\varkappa - 1)\,\omega R B = 1.77 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \quad .$$

In corrispondenza all'unità di lunghezza compare così una carica superficiale

$$q_\sigma = 2\pi R \sigma = 2\pi\varepsilon_0(\varkappa - 1)\,\omega R^2 B = 1.11 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}} \quad .$$

All'interno del cilindro la densità di carica di polarizzazione è

$$\varrho = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\varepsilon_0(\varkappa - 1)\,\omega B \operatorname{div}\mathbf{r} = -2\varepsilon_0(\varkappa - 1)\,\omega B = -3.54 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\left(\text{infatti } \operatorname{div}\mathbf{r} = \operatorname{div}(x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2\right) \quad ;$$

essa è uniforme entro il cilindro; la carica volumetrica di polarizzazione per unità di lunghezza vale

$$q_\varrho = \varrho\pi R^2 = -2\pi\varepsilon_0(\varkappa - 1)\,\omega R^2 B = -q_\sigma \quad .$$

L'espressione numerica del modulo della polarizzazione in funzione di r è

$$P(r) = \varepsilon_0(\varkappa - 1)\,\omega B r = 1.77 \cdot 10^{-8} r\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \quad .$$

Notiamo che, a differenza di quanto avviene per la polarizzazione di origine elettrostatica, è possibile col meccanismo (non elettrostatico) della forza di Lorentz avere in un dielettrico omogeneo una densità volumetrica di carica di polarizzazione diversa da zero.

5.37. ***Un cilindro di materiale dielettrico è polarizzato in modo permanente, con una polarizzazione $\mathbf{P} = P_0\mathbf{r}$, dove r indica il vettore normale all'asse del cilindro il cui modulo dà la distanza dall'asse. Se R è il raggio del cilindro e se esso ruota con velocità angolare ω attorno al proprio asse, calcolare il campo magnetico all'interno del cilindro, assumendolo indefinito. Per il calcolo numerico si ponga $P_0 = 1.77 \cdot 10^{-8}$ C/m^3, $R = 10$ cm, $\omega = 10^3$ rad/s.***

Abbiamo visto nel problema 5.36 come è possibile creare un simile tipo di polarizzazione. Il fatto che esistono cariche all'interno e in superficie del cilindro distribuite uniformemente con le densità

$$\sigma = P(R) = P_0 R \quad , \quad \varrho = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -P_0 \operatorname{div}\mathbf{r} = -2P_0 \quad ,$$

e che queste cariche ruotino attorno all'asse del cilindro con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ comporta un effetto magnetico (che, se ci riferissimo di nuovo al problema 5.36, verrebbe a sovrapporsi al campo magnetico là considerato).

Il calcolo per la carica superficiale è immediato (problema 5.35): essa dà origine a un campo uniforme entro il cilindro, parallelo e concorde a $\boldsymbol{\omega}$, di modulo

$$B_\sigma = \mu_0 \omega \sigma R = \mu_0 \omega P_0 R^2 = 2.22 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{T} \quad .$$

Per le cariche di volume, isoliamo una corteccia cilindrica di lunghezza unitaria, compresa tra i raggi r e $r + dr$. Essa contiene la carica

$$dq = \varrho\, d\tau = -2P_0 \cdot 2\pi r\, dr$$

che, a causa della rotazione, equivale alla corrente per unità di lunghezza

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\, dq = -2\omega P_0 r\, dr \quad .$$

Ne deriva il campo

$$dB_\varrho = \mu_0 di = -2\mu_0\omega P_0 r\, dr$$

uniforme entro il cilindro di raggio r e nullo fuori. Il segno meno indica che il campo è antiparallelo a $\boldsymbol{\omega}$ (la carica di volume è negativa). In un punto generico distante $r < R$ dall'asse il campo risultante vale

$$B_\varrho(r) = \int_r^R dB_\varrho = -\mu_0 \omega P_0 (R^2 - r^2) \quad .$$

L'integrale va calcolato a partire da r perché la carica compresa entro il cilindro di raggio r non dà campo all'esterno. In totale quindi

$$B(r) = B_\sigma + B_\varrho(r) = \mu_0 \omega P_0 r^2 = 2.22 \cdot 10^{-11} r^2 \text{ T} \quad .$$

Il campo magnetico è concorde alla velocità angolare, il suo modulo cresce quadraticamente col raggio, da zero al valore $B_{max} = \mu_0 \omega P_0 R^2 = B_\sigma$; per $r > R$ il campo è nullo. Ritroviamo la discontinuità $\mu_0 j_s = \mu_0 \omega P_0 R^2$ nell'attraversare uno strato superficiale di corrente (vedi problema 5.17); in effetti la corrente superficiale ha densità $j_s = 2\pi R \sigma/(2\pi/\omega) = \omega \sigma R = \omega P_0 R^2$.

Il caso studiato è un'applicazione semplice del risultato generale secondo cui gli effetti magnetici di un dielettrico polarizzato in movimento sono calcolabili a partire dalla formula $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{P} \times \mathbf{v}$.

5.38. ***Un elettrone ruota attorno ad un protone descrivendo con velocità costante un'orbita circolare; il suo momento angolare è eguale a 1 (in unità $h/2\pi$). Calcolare il rapporto giromagnetico e il momento magnetico dovuto al moto orbitale. Calcolare inoltre la frequenza di precessione dell'orbita elettronica se il sistema è immerso in un campo magnetico B.***

Il momento angolare per l'orbita circolare è $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = mvr\mathbf{u}_n$ se $\mathbf{u}_n$ è il versore della normale al piano dell'orbita, orientato con la solita conversione destrogira rispetto al moto della particella. Il momento magnetico si calcola equiparando il moto della carica q a una corrente $i = q/T = \omega q/2\pi = vq/2\pi r$. Pertanto $\boldsymbol{\mu} = i\pi r^2 \mathbf{u}_n = vqr/2\mathbf{u}_n$ e il rapporto giromagnetico, definito da (5.16), vale

$$G = \frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m} \quad .$$

Esso non dipende da caratteristiche geometrico-cinematiche, come raggio dell'orbita o velocità, ma solo dalla particella considerata. Nel nostro caso, poiché la carica dell'elettrone è negativa ($q = -e$), $\boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{L}$ sono antiparalleli e il valore numerico del rapporto giromagnetico è

$$G = -\frac{e}{2m} = -\frac{1.60 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = -8.78 \cdot 10^{10} \frac{\text{C}}{\text{Kg}} \quad .$$

Il momento magnetico dell'orbita vale di conseguenza, in modulo,

$$\mu = GL = \frac{e}{2m} \frac{h}{2\pi} = \mu_B = 0.928 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2 \quad .$$

Vediamo da questo esempio una giustificazione della scelta del magnetone di Bohr come unità dei momenti magnetici elementari.

La frequenza di precessione si ricava da (5.18):

$$\nu = \frac{\omega_P}{2\pi} = \frac{GB}{2\pi} = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ B s}^{-1}$$

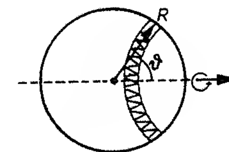
Essa è indipendente dall'angolo tra $\boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{B}$, purché diverso da zero.

5.39. ***Una sfera conduttrice di raggio R = 10 cm e massa m = 10 Kg, carica con $q = 10^{-6}$ C ruota con velocità angolare $\omega = 10^3$ rad/s attorno ad un suo diametro. Calcolare il valore del campo magnetico nel centro, il momento magnetico e il rapporto giromagnetico della sfera. Se questa viene immersa in un campo magnetico uniforme, di modulo B' = 3T, calcolare la velocità angolare di precessione.***

Isoliamo sulla sfera una calotta sferica infinitesima, di area $d\Sigma = 2\pi R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$ (vedi figura e nota in fondo al capitolo primo): su di essa si trova la carica $dq = \sigma d\Sigma$ che, a causa della rotazione, genera effetti magnetici simili a quelli prodotti da una spira di raggio $R\operatorname{sen}\theta$, percorsa da una corrente di intensità $di = dq/T = \omega\sigma R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$. Secondo la relazione (a) del problema 5.18, nel centro della sfera distante $r = R$ dai punti della spira, il campo magnetico vale

$$dB = \mu_0 di \frac{R^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2R^3} = \frac{1}{2} \mu_0 \omega \sigma R \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta \quad .$$

Il campo totale si ottiene integrando tra 0 e π; siccome $\int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = 4/3$ abbiamo



$$B = \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R = \frac{2\omega q}{3R} 10^{-7} = 6.67 \cdot 10^{-10} \text{ T} \quad .$$

Il momento magnetico si calcola in modo analogo: a ciascuna spira infinitesima, di area $\Sigma' = \pi R^2 \operatorname{sen}^2\theta$, percorsa dalla corrente $di = \omega\sigma R^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$, corrisponde un momento magnetico $d\mu = di\Sigma' = \omega\sigma\pi R^4 \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta$. L'integrazione è identica a quella di B:

$$\mu = \frac{4}{3} \omega\sigma\pi R^4 = \frac{1}{3} \omega R^2 q = 3.33 \cdot 10^{-6} \text{ Am}^2 \quad .$$

Vettorialmente $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli e concordi. Il momento angolare vale $\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$ con $I = 2/5\, mR^2$ e risulta un rapporto giromagnetico

$$G = \frac{\mu}{L} = \frac{5}{3} \frac{q}{2m} = 8.33 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{Kg}} \quad .$$

con un fattore $g = 5/3$ per tale configurazione geometrica.

Si dimostra che il valore di $\mathbf{B}$ è costante entro tutta la sfera e che all'esterno, per $r \geq R$, essa produce un campo magnetico eguale a quello di un

dipolo con momento magnetico **μ**. Si può cioè enunciare questa proprietà: una corrente distribuita su una superficie sferica di raggio R in modo che la sua variazione sia data dalla legge $di/d\theta = K \operatorname{sen}\theta$ produce all'interno un campo magnetico uniforme di modulo $B = 2\mu_0 K/3R$ e all'esterno un campo di dipolo ricavabile dal momento magnetico $\mu = 4\pi R^2 K/3$.

Il moto di precessione avviene con la velocità angolare (5.18)

$$\omega_p = GB' = 0.25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad .$$

Il valore estremamente piccolo di ω_p è dovuto al rapporto sfavorevole tra carica e massa che si realizza in un corpo macroscopico.

5.40. ***Ripetere il problema 5.39 con gli stessi dati numerici, ma supponendo che la carica q sia distribuita uniformemente in tutto il volume della sfera.***

Invece di un elemento di superficie consideriamo questa volta un elemento di volume $d\tau = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi dr$ in cui c'è la carica $dq = \varrho d\tau$. Per il moto di rotazione abbiamo una corrente equivalente su una spira di raggio $r \operatorname{sen}\theta$, distante r dal centro della sfera (r è variabile tra zero e R). pari a

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \varrho r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi dr \quad .$$

Essa produce nel centro della sfera il campo

$$dB = \mu_0 di \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2r^3} = \frac{\mu_0 \omega \varrho}{4\pi} r dr d\phi \operatorname{sen}^3\theta d\theta$$

che integrato su tutte le variabili porge

$$B = \frac{\mu_0 \omega \varrho}{4\pi} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta d\theta = \frac{1}{3} \mu_0 \omega \varrho R^2$$

$$= 10^{-7} \frac{\omega q}{R} = 10^{-9} \text{ T} \quad .$$

Analogamente, per il momento magnetico si considera sempre la spira infinitesima percorsa dalla corrente di, di area $\Sigma' = \pi r^2 \operatorname{sen}^2\theta$ e si scrive

$$d\mu = di \Sigma' = \frac{\omega\varrho}{2} r^4 dr d\phi \operatorname{sen}^3\theta d\theta$$

che integrata su tutte le variabili dà

$$\mu = \frac{4}{15} \pi\omega\varrho R^5 = \frac{1}{5} \omega R^2 q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Am}^2 \quad .$$

Il momento angolare vale $L = I\omega = (2/5) mR^2\omega$ e quindi il rapporto giromagnetico assume il valore

$$G = \frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m} = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{Kg}} \quad .$$

La diversa disposizione geometrica delle cariche porta a un diverso fattore g rispetto al problema 5.39; qui in particolare $g = 1$. Infine

$$\omega_p = GB' = 0.15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

* * *

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

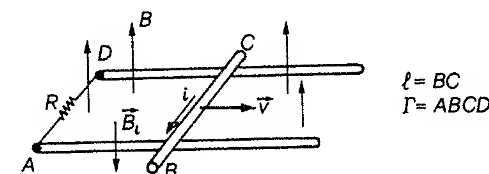
6a. Quando un conduttore si muove in un campo magnetico **B** gli elettroni liberi dentro di esso risentono di un campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, se $\mathbf{v}$ è la velocità del punto nel conduttore ove si calcola il campo (vedi paragrafo 5b.). La quantità

$$d\mathscr{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} \tag{6.1}$$

dà il lavoro compiuto sulla carica unitaria per lo spostamento **dl** lungo il conduttore. Per un conduttore di lunghezza finita l la (6.1.) dà

$$\mathscr{E} = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \int \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} \tag{6.2}$$

che prende il nome di *tensione* presente *ai capi del conduttore* (vedi paragrafo 4b.). Se, come esemplificato in figura dalla sbarretta BC, il conduttore lungo l



è l'unica parte mobile di un circuito chiuso Γ immerso in un campo magnetico, $\mathscr{E}$ è anche la circuitazione di $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ estesa a Γ:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} \quad , \tag{6.3}$$

quindi è la *forza elettromotrice* che si manifesta, ovvero, come si dice normalmente, che viene *indotta nel circuito*.

Si dimostra altresì che $\mathscr{E}$ è esprimibile tramite la variazione del flusso di **B** attraverso Γ causata dal moto; precisamente vale la *legge di Faraday*

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad . \tag{6.4}$$

Se il circuito è conduttore e ha una resistenza complessiva R in esso circola una corrente i data dalla legge di Ohm:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{1}{R}\,\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad . \tag{6.5}$$

Il verso della corrente, espresso dal segno messo nella (6.5), è tale che il flusso del campo magnetico $\mathbf{B}'$ da essa stessa generato si oppone alla variazione di flusso primaria (*legge di Lenz*).

È bene precisare che nel calcolo di $\Phi(\mathbf{B})$ bisogna tener conto anche del campo prodotto dalla corrente indotta. Ci si riferisce esplicitamente alla possibilità di trascurare gli effetti di tale campo quando si avverte, nei problemi, di non considerare l'autoinduzione del circuito.

6b. Fenomeni di induzione elettromagnetica si presentano anche con circuiti stazionari quando nel tempo varia invece il valore del campo magnetico $\mathbf{B}$, cioè quando è diversa da zero $\partial\mathbf{B}/\partial t$. In tal caso in ogni punto in cui $\partial\mathbf{B}/\partial t \neq 0$ compare un campo elettrico definito dall'*equazione di Maxwell*

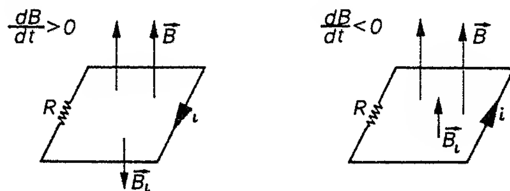
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad . \tag{6.6}$$

Se si confrontano (6.1) e (6.6) si nota una diversità fondamentale tra i meccanismi attraverso i quali viene indotto un campo elettrico: in uno è essenziale la considerazione dell'esistenza di un conduttore in moto, messa analiticamente in evidenza dalla dipendenza da $\mathbf{v}$, nell'altro non c'è nulla che dipenda dal particolare circuito o materiale considerato ($\mathbf{E}$ si manifesta anche nel vuoto).

Con riferimento alla figura, qualora si consideri un circuito chiuso Γ la f.em. indotta in esso si ricava da un'applicazione del teorema di Stokes:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_\Sigma \mathrm{rot}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n\,d\Sigma = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_n\,d\Sigma = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad ,$$

Σ essendo una generica superficie che ha la linea Γ come contorno. Se il circuito è conduttore vale ancora la (6.6), con il verso della corrente i e del campo magnetico $\mathbf{B}_i$ da essa prodotto indicati in figura, nei due casi di aumento o diminuzione del campo esterno $\mathbf{B}$.



L'unificazione formale realizzata dalla (6.4), che trova una completa spiegazione in una teoria relativistica dell'elettromagnetismo e che è assai utile nei problemi, non deve nascondere la differenza fisica tra due ordini di fenomeni diversi qui messa in evidenza.

Una relazione utile, derivata dalla (6.4), è la *legge di Felici*: quando in un circuito di resistenza R avviene una variazione di flusso $\Delta\Phi(\mathbf{B})$, viene messa in moto, e passa attraverso ogni sezione del circuito, una carica elettrica

$$q = -\frac{\Delta\Phi(\mathbf{B})}{R} \quad . \tag{6.7}$$

L'utilità della legge di Felici risiede nel fatto che q non dipende dal modo in cui avvengono le variazioni del flusso, ma solo dalla differenza tra i valori iniziale e finale di questo. In altre parole, mentre la (6.4) è applicabile quando sia noto il moto del conduttore oppure la legge con cui $\mathbf{B}$ varia nel tempo, la (6.7) è di applicazione più generale, in quanto si rinuncia all'informazione istantanea, la corrente, e si osserva una quantità integrale, la carica. Questa caratteristica è alla base delle numerose applicazioni pratiche della (6.7).

6c. Secondo quanto visto nel paragrafo 5e. è possibile scrivere il flusso del campo magnetico attraverso un circuito in funzione delle varie correnti che percorrono i circuiti che generano il campo. Detta i_k la corrente che circola nel circuito k-esimo, il flusso del campo magnetico prodotto da i_k attraverso il circuito i-esimo è esprimibile mediante la (5.19); una variazione nel tempo di $\Phi_{i,k}$ genera nell'i-esimo circuito una f.em. indotta che in base alla (6.4) è data da

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi_{i,k}}{dt} = -M_{i,k}\frac{di_k}{dt} - i_k\frac{dM_{i,k}}{dt} \quad : \tag{6.8}$$

la f.em. può essere indotta da variazioni di corrente nel circuito k-esimo e da variazioni di $M_{i,k}$, cioè deformazioni dei circuiti o variazione della loro distanza.

Oltre a ciò, una forza controelettromotrice sorge sempre in un circuito quando varia nel tempo il flusso (5.20) del campo magnetico prodotto dalla corrente i_k che lo percorre. Tale f.em. è data da

$$\mathscr{E}_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -L_k\frac{di_k}{dt} - i_k\frac{dL_k}{dt} \tag{6.9}$$

con chiaro significato dei due termini. In particolare se L_k è costante $\mathscr{E}_k$ contrasta la variazione di intensità.

Per questa ragione lo stabilirsi di una corrente in un circuito induttivo, cioè con $L \neq 0$, richiede da parte del generatore il lavoro

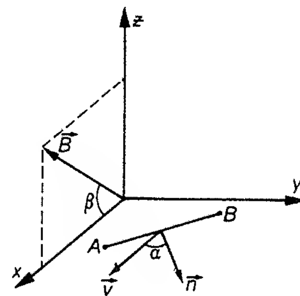
$$W = \frac{1}{2}Li^2 \quad ; \tag{6.10}$$

il generatore fornisce cioè questa autoenergia o energia intrinseca (vedi para-

grafo 5f.) che si ritrova integralmente sotto forma di energia magnetica del campo prodotto dalla corrente. Un meccanismo analogo è quello che produce l'energia mutua (5.25) tra due o più circuiti.

* * *

6.1. ***Una sottile sbarra rettilinea conduttrice, lunga $b = 10$ cm, si muove di moto traslatorio nel piano x,y con velocità parallela all'asse x, di modulo $v = 4$ m/s; la normale alla sbarra forma un angolo $\alpha = 30°$ con l'asse x. La sbarra è immersa in un campo magnetico uniforme e costante di modulo $B = 0.5$ T, che non ha componente lungo l'asse y e forma con l'asse x un angolo $\beta = 45°$. Calcolare la tensione che compare ai capi della sbarra in seguito al moto.***



In tutti i punti della sbarra in movimento agisce il campo elettrico uniforme $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, parallelo e discorde all'asse y:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB\,\text{sen}\,\beta\,\mathbf{u}_y \quad .$$

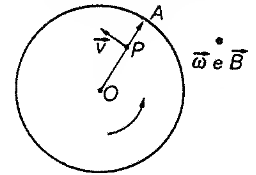
Esso forma l'angolo α col segmento AB che rappresenta la sbarra. A causa di questo campo gli elettroni di conduzione migrano verso l'estremo B che si carica negativamente, impedendo così un ulteriore accumulo di elettroni. Si stabilisce un equilibrio all'interno della sbarra nel senso che le cariche si ridistribuiscono in modo da creare un campo antagonista $\mathbf{E}'$ eguale ed opposto a $\mathbf{E}$. Il punto A risulta positivo rispetto a B e la tensione ai capi di AB è data da (6.2):

$$\mathscr{E} = \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^A \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = vBb\,\text{sen}\,\beta\cos\alpha = 0.12 \text{ V} \quad .$$

Nel caso particolare in cui **AB**, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ siano tutti ortogonali tra loro si ha

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{max} = vBb = 0.20 \text{ V} \quad .$$

6.2. ***Una sottile sbarra rettilinea conduttrice, lunga $R = 10$ cm, è incernierata ad un estremo attorno al quale ruota con velocità angolare costante $\omega = 100$ rad/s. Essa è immersa in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo $B = 1$T, parallelo e concorde a $\boldsymbol{\omega}$. Calcolare il valore e il segno della tensione che compare ai capi della sbarra.***



Sia $\mathbf{v}$ la velocità del generico punto P della sbarra, distante r da O. Il campo elettrico indotto in P vale $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}$: esso ha il modulo $E = \omega Br$ e direzione e verso di **OA**. Analogamente a quanto visto nel problema 6.1, ciò porta ad un accumulo di cariche negative in O e positive in A nonché al campo elettrico antagonista $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$. Questa volta però i campi non sono uniformi, non essendolo $\mathbf{v}$, bensì crescono in modulo lineamente con la distanza dal centro. La tensione tra A e O è positiva e vale, sempre secondo (6.2),

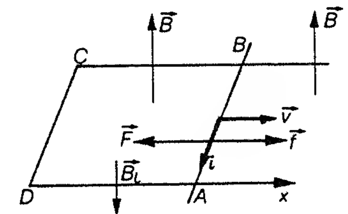
$$\mathscr{E} = \int_O^A \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \omega B \int_0^R r dr = \frac{1}{2}\,\omega BR^2 = 0.5 \text{ V} \quad .$$

Abbiamo trattato un caso simile, di origine meccanica e non magnetica, nel problema 1.24.

6.3. ***Un conduttore metallico di resistenza trascurabile è piegato a U, come mostrato in figura; i tratti paralleli distano $b = 5$ cm. Su di esso può spostarsi senza attrito un conduttore di resistenza $R = 5\ \Omega$ ortogonale ai tratti paralleli. Se tale conduttore viene mantenuto in moto secondo il verso positivo dell'asse x con velocità costante di modulo $v = 10$ m/s e se il dispositivo è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, ortogonale al circuito e diretto verso il lettore, di modulo $B = 0.2$ T, calcolare il valore della corrente indotta nel circuito e la potenza che occorre spendere per mantenere in movimento il conduttore mobile. Si trascuri l'autoinduzione del circuito.***

Abbiamo qui il caso di un conduttore in moto traslatorio uniforme con velocità, campo magnetico e conduttore ortogonali tra loro, cioè il caso studiato nel problema 6.1. Sappiamo così che l'estremo A è positivo rispetto all'estremo B e che ai capi del conduttore compare la tensione

$$\mathscr{E} = vBb = 0.1 \text{ V} \quad .$$



Siccome il conduttore AB è l'unico tratto mobile del circuito chiuso, in base a (6.3) $\mathscr{E}$ rappresenta la f.em. indotta nel circuito.

La corrente vale

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{vBb}{R} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ A} \quad .$$

Per il lettore il verso è orario, in accordo con la legge di Lenz: il flusso di **B** attraverso il circuito è uscente per cui quello prodotto dal campo **B**, della corrente indotta i deve essere entrante, come avviene per una corrente di verso orario. Essendo

$\mathscr{E}$ costante nel tempo in quanto il moto è uniforme e avendo trascurato ogni resistenza che non sia R e la forza controelettromotrice (6.9), anche la corrente è costante.

Per il calcolo della potenza bisogna innanzitutto conoscere la forza **F** che agisce sul conduttore mobile. Facciamo uso della (5.6): il conduttore lungo b, percorso dalla corrente i, sotto l'azione del campo **B** risente di una forza **F** parallela all'asse x e contraria alla velocità $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{BA} \times \mathbf{B} = \frac{vBb}{R}\ \mathbf{BA} \times \mathbf{B} = -\frac{B^2b^2}{R}\mathbf{v} \quad . \qquad \text{(a)}$$

La presenza del campo magnetico genera cioè una resistenza viscosa (proporzionale alla velocità) che prende comunemente il nome di *resistenza di attrito elettromagnetico*. Per mantenere il conduttore in moto con velocità costante $\mathbf{v}$ occorre applicare una forza **f** eguale e contraria a **F**, ovvero spendere la potenza meccanica

$$P_m = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{B^2b^2}{R}\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{B^2b^2v^2}{R} = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \quad . \qquad \text{(b)}$$

La potenza meccanica P_m fornita dall'esterno, che serve a mantenere la corrente nel circuito, è ritrovata integralmente sotto forma di potenza elettrica spesa per effetto Joule. Numericamente $P_m = P_e = 2 \cdot 10^{-3}$ W.

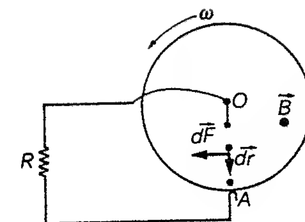
Va notato che le espressioni trovate per $\mathscr{E}$, i, F in funzione della velocità non dipendono dal tipo di moto: esse sono sempre vere, qualunque sia la legge con cui varia la velocità nel tempo.

Il sistema può essere considerato un generatore di forza elettromotrice. Se definiamo come rendimento il rapporto tra la potenza elettrica fornita e la potenza meccanica necessaria a produrla, nel nostro caso esso vale 1 (trascurando gli attriti).

6.4. ***Un sottile disco conduttore di raggio D = 10 cm ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω = 100 rad/s. Un estremo di un resistore (R = 5 Ω) è collegato al centro O del disco, l'altro alla periferia tramite un contatto strisciante A. Il disco è immerso in un campo magnetico ad esso ortogonale, diretto verso il lettore, di modulo B = 0.2 T. Calcolare il valore della corrente indotta nel circuito e la potenza che occorre spendere per mantenere in rotazione il disco. Si trascuri l'autoinduzione del circuito ed ogni resistenza ad eccezione di R.***

Si ripresenta il caso studiato nel problema 6.2: il tratto del disco che ad un certo istante coincide con OA funge da sbarra rotante. L'estremo A è positivo rispetto al centro O e ai capi di OA compare la tensione

$$\mathscr{E} = \frac{BD^2\omega}{2} = 0.1 \text{ V} \quad , \qquad \text{(a)}$$



che rappresenta la f.em. indotta nel circuito. La corrente indotta vale

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{BD^2\omega}{2R} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ A} \quad ;$$

il suo verso è quello che nel disco va da O ad A.

Sul tratto **dr** del raggio OA, distante r dal centro, agisce la forza (5.7)

$$\mathbf{dF} = i\mathbf{dr} \times \mathbf{B}$$

che si oppone alla rotazione. Il momento di questa forza rispetto a O è dato da

$$\mathbf{dM} = \mathbf{r} \times \mathbf{dF} = -\frac{B^2D^2}{2R}\ r\,dr\,\boldsymbol{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M} = \int_0^D \mathbf{dM} = -\frac{BD^4}{4R}\ \boldsymbol{\omega} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Troviamo di nuovo che la presenza del campo magnetico genera una resistenza di tipo viscoso (proporzionale a ω), la resistenza d'attrito elettromagnetico

Per mantenere in rotazione il disco con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ occorre applicare un momento **M′** eguale ed opposto a **M** ovvero spendere la potenza meccanica

$$P_m = \omega M' = \frac{B^2D^4\omega^2}{4R} = \frac{\mathscr{E}^2}{R} = P_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W} \quad . \qquad \text{(c)}$$

Anche questo sistema può essere considerato un generatore di forza elettromotrice. Il suo rendimento (vedi problema 6.3), se si trascurano gli attriti, è eguale a 1.

6.5. ***Nella stessa configurazione del problema 6.3 la sbarra AB viene messa in moto, con velocità parallela all'asse x, tramite l'applicazione in un tempo trascurabile di un impulso J = 0.15u$_x$ Ns. Dare l'equazione del moto della sbarra e la legge di variazione nel tempo della corrente indotta nel circuito. La massa della sbarra vale m = 15 g.***

La forza che agisce sulla sbarra durante il moto è data dalla relazione (a) del problema 6.3:

$$\mathbf{F} = -\frac{B^2b^2}{R}\ v\mathbf{u}_x \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{B^2b^2}{R}\ v$$

è l'equazione del moto lungo l'asse x; ponendo $dx/dt = v$ abbiamo

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2b^2}{mR}\, v \quad , \tag{a}$$

equazione del tipo $a = -Kv$, caratteristica del moto in presenza di attrito viscoso.

L'integrazione si esegue per separazione delle variabili:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{B^2b^2}{mR}\, dt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-B^2b^2t/mR} \tag{b}$$

con v_0 velocità iniziale al tempo $t = 0$, pari a J/m.

La legge di variazione temporale della corrente indotta risulta di conseguenza

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{vBb}{R} = \frac{v_0Bb}{R}\, e^{-B^2b^2t/mR} \quad .$$

La velocità e la corrente decrescono esponenzialmente nel tempo, con costante di tempo eguale a $\tau = mR/B^2b^2 = 750$s. Numericamente $v_0 = 10$ m/s e

$$v = 10\, e^{-t/750}\, \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad i = 0.02\, e^{-t/750}\ \text{A} \quad .$$

Se si calcola l'energia totale dissipata per effetto Joule si ottiene

$$W = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{v_0^2B^2b^2}{R}\int_0^\infty e^{-2B^2b^2t/mR} dt = \frac{1}{2}\, m v_0^2 \quad ,$$

eguale all'energia cinetica inizialmente impressa alla sbarra.

La conservazione dell'energia, che abbiamo appena verificato, può invece essere presa come punto di partenza per la risoluzione del problema. Essendo in gioco due sole forme di energia, quella cinetica e quella legata alla corrente che circola nel circuito, nel tempo dt la diminuzione della prima deve eguagliare l'aumento della seconda, deve così essere

$$m v dv + Ri^2 dt = 0 \quad .$$

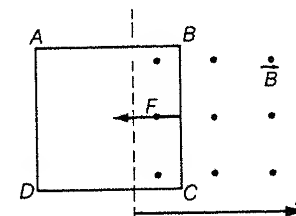
Ma $i = vBb/R$ e si ricava l'equazione $dv/dt = -B^2b^2v/mR$, cioè la (a).

6.6. ***Una spira conduttrice quadrata, di lato $a = 10$ cm, massa $m = 4$ g e resistenza $R = 0.64\ \Omega$, si muove con velocità costante $v_0 = 5$ m/s lungo l'asse x (vedi figura). Nel semipiano $x > 0$ esiste un campo magnetico B, uniforme e costante, ortogonale al disegno, di modulo $B = 0.8$ T, mentre nel semipiano $x < 0$ è $\mathbf{B} = 0$. Si calcoli la velocità v_0' della spira dopo che essa è entrata completamente nel semipiano $x > 0$ e il tempo t_0 che occorre perché ciò avvenga, a partire dall'istante $t = 0$ in cui la spira entra nel campo. Si trascuri l'autoinduzione della spira.***

In base ai risultati del problema 6.5 quando il lato BC entra nel campo

magnetico risente di una forza $\mathbf{F} = -\frac{B^2a^2}{R}\,\mathbf{v}$; i tratti dei lati AB e CD che si trovano nella regione $x > 0$ invece non danno contributo. L'equazione del moto della spira durante la penetrazione è perciò la (a) del problema 6.5 che scriviamo

$$dv = -\frac{B^2a^2}{mR}\, v dt = -\frac{B^2a^2}{mR}\, dx \quad . \tag{a}$$



Integrando il primo membro tra v_0 e v e il terzo tra zero e x abbiamo:

$$v = v_0 - \frac{B^2a^2}{mR}\, x \quad ; \tag{b}$$

La velocità diminuisce linearmente in funzione della penetrazione x. Quando $x = a$, cioè quando la spira è entrata completamente nel campo magnetico, il lato AD diviene sede degli stessi fenomeni visti per il lato BC e abbiamo un circuito con due tensioni che si bilanciano esattamente, di modo che è nulla la f.em indotta e quindi la corrente e infine anche la forza che agisce sulla spira. Questa prosegue con moto rettilineo uniforme alla velocità

$$v_0' = v_0 - \frac{B^2a^3}{mR} \tag{c}$$

L'assenza di azioni magnetiche sulla spira una volta che essa sia completamente entrata nel semipiano $x > 0$ può anche essere spiegata così: una volta dentro, il flusso di B attraverso la spira è costante, essendo B uniforme (e ciò è vero qualunque sia il moto della spira, purché traslatorio); perciò la (6.4) dà f.em. indotta nulla, la (6.5) corrente nulla e la (5.6) forza nulla.

Per rispondere alla seconda domanda occorre dare esplicitamente la legge del moto; essa è ricavabile dalla (a) e d'altra parte è la (b) del problema 6.5:

$$v = v_0\, e^{-B^2a^2t/mR} \quad . \tag{d}$$

Il tempo t_0 cercato si ottiene ponendo $v = v_0'$ e passando ai logaritmi:

$$t_0 = \frac{mR}{B^2a^2} \log \frac{v_0}{v_0'} \quad .$$

I risultati numerici sono:

$$v_0' = 4.75\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad t_0 = 20.5 \cdot 10^{-3}\ \text{s} \quad .$$

Se mettiamo insieme (b) e (d) ricaviamo $x(t)$:

$$x = \frac{mR}{B^2a^2}(v_0 - v) = \frac{mRv_0}{B^2a^2}\left(1 - e^{-B^2a^2t/mR}\right) \quad .$$

Notiamo che x ha un valore limite $x_0 = mRv_0/B^2a^2$: se a è minore di x_0 la spira riesce a entrare completamente nel campo, se invece a è maggiore di

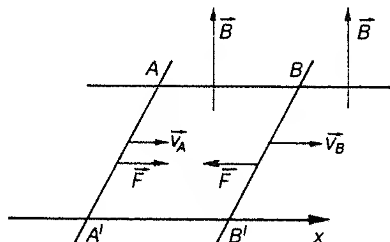
x_0 entra nel campo solo una parte. Ci si può accorgere di questo fatto già dalla (c) che presenta soluzioni solo se $v_0 > B^2a^3/mR$, cioè se a è minore di $mRv_0/B^2a^2 = x_0$. È evidente, nel caso $a > x_0$, che tutta l'energia cinetica posseduta dalla spira viene spesa per effetto Joule sulla resistenza prima che la penetrazione sia completa. Diversamente, possiamo dire che esiste una velocità limite $v_{0,L} = B^2a^3/mR$ al di sotto della quale la spira si arresta prima di entrare completamente nel campo.

6.7. ***Due rotaie parallele, poste in un piano orizzontale, distanti $l = 10$ cm, di resistenza elettrica trascurabile, sono immerse in un campo magnetico uniforme e costante, ortogonale al piano delle rotaie, di modulo $B = 0.5$ T. Due sbarrette conduttrici AA' e BB' eguali, di massa $m = 10$ g, resistenza $R = 0.1\ \Omega$, possono scorrere senza attrito sulle rotaie. Ad un certo istante, mediante un impulso, la sbarretta BB' viene messa in moto con velocità $v_0 = 10$ m/s nella direzione x. Calcolare la legge con cui variano la velocità v_A e v_B delle due sbarrette nel tempo e l'energia dissipata in totale per effetto Joule.***

Nel tratto BB' del circuito viene indotta la tensione

$$\mathscr{E}_B = \int_B^{B'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Blv_B$$

con l'estremo B' positivo rispetto all'estremo B. Pertanto, già al tempo $t = 0$ quando v_B vale v_0, circola corrente da B a B' e da A' a A così che sulla sbarretta AA' agisce una forza ed essa entra in movimento, nello stesso verso di BB'. Non appena si muove ai suoi capi compare la tensione indotta



$$\mathscr{E}_A = \int_A^{A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Blv_A$$

con A' positivo rispetto ad A. La f.em. indotta nel circuito è data da

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_B^{B'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{A'}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathscr{E}_B - \mathscr{E}_A = Bl(v_B - v_A) \qquad \text{(a)}$$

e la corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\mathscr{E}}{2R} = \frac{Bl}{2R}(v_B - v_A) \quad .$$

Le due sbarrette sono sottoposte alle forze

$$\mathbf{F}_B = i\mathbf{BB'} \times \mathbf{B} = -\frac{B^2l^2}{2R}(v_B - v_A)\,\mathbf{u}_x \quad ,$$

$$\mathbf{F}_A = i\mathbf{A'A} \times \mathbf{B} = \frac{B^2l^2}{2R}(v_B - v_A)\mathbf{u}_x \quad ;$$

la sbarretta AA' è accelerata, BB' è decelerata. La risultante delle forze è nulla per cui si conserva la quantità di moto totale del sistema:

$$mv_0 = mv_A + mv_B \quad \Rightarrow \quad v_B = v_0 - v_A \quad . \qquad \text{(b)}$$

L'equazione del moto per la sbarretta AA' è

$$m\frac{dv_A}{dt} = \frac{B^2l^2}{2R}(v_B - v_A) = \frac{B^2l^2}{2R}(v_0 - 2v_A)$$

$$\Rightarrow \frac{dv_A}{dt} = \frac{B^2l^2}{2mR}(v_0 - 2v_A) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_A}{v_0 - 2v_A} = \frac{B^2l^2}{2mR}\,dt \quad .$$

Per $t = 0$ $v_A = 0$ e in definitiva

$$v_A = \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-B^2l^2t/mR}\right) \quad , \quad v_B = \frac{v_0}{2}\left(1 + e^{-B^2l^2t/mR}\right) \quad ; \qquad \text{(c)}$$

v_B è stata ottenuta utilizzando la (b). Una sbarretta parte con $v_B = v_0$, l'altra con $v_A = 0$, a regime esse hanno la stessa velocità $v_A = v_B = v_0/2$. Da (a) e (c) abbiamo per la f.em. indotta:

$$\mathscr{E} = Blv_0e^{-B^2l^2t/mR} \quad .$$

Numericamente $\tau = mR/B^2l^2 = 0.4$ s e

$$v_A = 5(1 - e^{-2.5t})\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad v_B = 5(1 + e^{-2.5t})\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad \mathscr{E} = 0.5\ e^{-2.5t}\ \text{V} \quad .$$

L'energia dissipata per effetto Joule vale

$$W = \int_0^\infty \frac{\mathscr{E}^2}{2R}\,dt = \frac{B^2l^2v_0^2}{2R}\int_0^\infty e^{-2B^2l^2t/mR}dt = \frac{1}{4}mv_0^2 = -\Delta T = -0.25\ \text{J} \quad .$$

Infatti l'energia cinetica iniziale è $\frac{1}{2}mv_0^2$, quella finale è

$$2 \cdot \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$$

e la variazione è opposta a W.

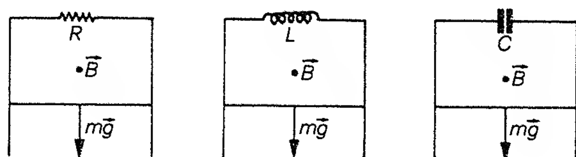
6.8. ***Due guide verticali parallele conduttrici, distanti $b = 20$ cm, possono essere chiuse ad un estremo da un resistore, un induttore o un condensatore. Lungo le guide può scivolare senza attrito, sotto l'azione del proprio peso,***

una sbarretta conduttrice di massa $m = 10$ g. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo $B = 1$ T, ortogonale al disegno. Studiare nei tre casi la legge con cui varia la velocità di caduta e quella con cui varia la corrente indotta. Si assuma $R = 4\ \Omega$, $L = 10^{-2}$ H, $C = 100\ \mu$F, si trascurino le resistenze dei conduttori, l'autoinduzione del circuito (ad eccezione di L), la resistenza dell'aria; si prenda come condizione iniziale $v = 0$ per $t = 0$.

L'equazione del moto della sbarretta è, per tutti e tre i casi,

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = mg - ibB \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{ibB}{m} \tag{a}$$

se x è un asse verticale, parallelo e concorde all'accelerazione di gravità g. La forza magnetica è dovuta al fatto che nel circuito si genera una corrente indotta in quanto c'è una parte mobile in campo magnetico. La differenza tra i vari casi risiede nell'espressione che lega la corrente i alla tensione $\mathscr{E} = Bbv$ che compare ai capi della sbarretta



Per il circuito resistivo

$$\mathscr{E} = Ri \quad\Rightarrow\quad Bbv = Ri \quad , \tag{b}$$

sostituiamo nella (a) e integriamo tenendo conto della condizione iniziale.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B^2b^2}{mR}\,v \quad\Rightarrow\quad v = \frac{mgR}{B^2b^2}\,(1 - e^{-B^2b^2t/mR}) \quad .$$

La velocità della sbarretta tende al valore limite $v_\infty = mgR/B^2b^2$, cioè il moto tende a diventare uniforme, esattamente come avviene nella caduta di un corpo in un mezzo viscoso. Dalla (b) si vede che analogo è il comportamento della corrente:

$$i = \frac{mg}{Bb}\,(1 - e^{-B^2b^2t/mR}) \quad .$$

Il valore asintotico i_∞ corrisponde all'equilibrio tra forza magnetica e forza peso.

Nel circuito induttivo compare anche la forza controelettromotrice (6.9) e siccome L è costante e R è nulla otteniamo

$$\mathscr{E} - L\,\frac{di}{dt} = 0 \quad\Rightarrow\quad Bbv = L\,\frac{di}{dt} \quad . \tag{c}$$

Derivando rispetto al tempo la (a) e utilizzando la (c) si ha

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{B^2b^2}{mL}\,v = 0 \quad\Rightarrow\quad v = v_0\cos(\omega t + \phi) \quad ,$$

essendo $\omega^2 = B^2b^2/mL$ e v_0 e ϕ costanti da determinarsi in base alle condizioni iniziali, $v = 0$ per $t = 0$ e $dv/dt = g$ per $t = 0$. Risulta

$$v = \frac{g}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t = g\,\frac{(mL)^{1/2}}{Bb}\,\mathrm{sen}\,\frac{Bb}{(mL)^{1/2}}\,t \quad .$$

La coordinata x della sbarretta si ottiene integrando la velocità, con $x = 0$ per $t = 0$:

$$x = \frac{g}{\omega^2}\,(1 - \cos\omega t) = \frac{gmL}{B^2b^2}\left[1 - \cos\frac{Bb}{(mL)^{1/2}}\,t\right] \quad .$$

Posto $x_0 = g/\omega^2$ possiamo dire che la sbarretta oscilla attorno alla posizione x_0 con ampiezza x_0, cioè il moto si svolge tra $x = 0$ e $x = 2x_0$. La corrente si ottiene integrando (c) ed è proporzionale allo spazio percorso (invece che alla velocità come nel circuito resistivo): essa varia nel tempo secondo la legge

$$i = i_0(1 - \cos\omega t) \quad \text{con} \quad i_0 = \frac{Bbg}{L\omega^2} = \frac{mg}{Bb} = i_\infty \quad ,$$

i_0 è il valore attorno al quale la corrente oscilla sinusoidalmente con ampiezza i_0.

Infine, nel circuito capacitivo,

$$\mathscr{E} = \frac{q}{C} \quad\Rightarrow\quad Bbv = \frac{q}{C} \quad\Rightarrow\quad Bb\,\frac{dv}{dt} = \frac{i}{C} \quad . \tag{d}$$

L'equazione (a) diviene

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + \dfrac{CB^2b^2}{m}} = a < g \quad ;$$

il moto è uniformemente accelerato:

$$v = at \quad , \quad x = \frac{1}{2}\,at^2 \quad .$$

L'intensità di corrente secondo (d) è proporzionale all'accelerazione e quindi costante:

$$i = CBb\,\frac{g}{1 + \dfrac{CB^2b^2}{m}} \quad .$$

I risultati numerici sono riassunti nella tabella:

	velocità (m/s)	corrente (A)
R	$9.8(1-e^{-t})$	$0.49(1-e^{-t})$
L	$0.49 \operatorname{sen} 20t$	$0.49(1-\cos 20t)$
C	$9.8t$	$0.2 \cdot 10^{-3}$

Come nel problema 6.5 possiamo utilizzare la conservazione dell'energia per arrivare ai risultati; nei tre casi si scrive

$$Ri^2 dt + mv\,dv = mg\,dx \quad , \quad Li\,di + mv\,dv = mg\,dx \quad , \quad CV\,dV + mv\,dv = mg\,dx$$

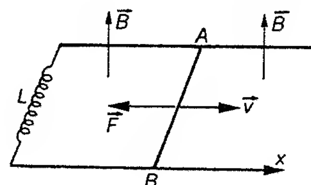
L'energia potenziale gravitazionale diminuisce mentre aumenta l'energia cinetica e viene speso lavoro, rispettivamente, sulla resistenza, per vincere la forza controelettromotrice e per caricare il condensatore. Utilizzando le relazioni (b), (c), (d) si arriva alle equazioni risolutive con facili passaggi che lasciamo come esercizio; nell'ultimo caso si usi direttamente l'espressione $Bbv = V$, con V d.d.p. ai capi del condensatore e ci si serva della (d) solo per il calcolo della corrente.

6.9. *Nel circuito in figura L rappresenta un induttore ideale, cioè con resistenza nulla; la sbarretta conduttrice AB, lunga* $l = 10$ cm *e di massa* $m = 16$ g, *può scorrere senza attrito sopra due rotaie metalliche. Tutte le resistenze sono trascurabili e così pure i coefficienti di autoinduzione all'infuori di L. Il sistema è posto in un piano orizzontale ed è immerso in un campo magnetico* **B** *ortogonale al piano. Al tempo* $t = 0$ *viene impresso alla sbarretta un impulso* $\mathbf{J} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathbf{u}_x$ Ns *e si osserva nel circuito una corrente variabile nel tempo secondo la legge* $i = i_0 \operatorname{sen} \omega t$ *con* $i_0 = 0.05$ A *e* $\omega = 0.625$ rad/s. *Calcolare il valore di L e di* **B**.

All'istante $t = 0$ la sbarretta si mette in moto con la velocità iniziale $v_0 = J/m = 0.25$ m/s; durante il moto essa è soggetta alla forza $\mathbf{F} = -iBl\mathbf{u}_x$ e l'equazione del moto risulta:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{iBl}{m} = -\frac{i_0 Bl}{m} \operatorname{sen} \omega t$$

$$\Rightarrow \quad v = v_0 \cos \omega t = \frac{i_0 Bl}{m\omega} \cos \omega t \quad .$$



Il modulo del campo magnetico vale quindi

$$B = \frac{m\omega v_0}{i_0 l} = 0.5 \text{ T} \quad .$$

Per il calcolo di L ricorriamo alla (c) del problema 6.8, che è valida anche adesso, e all'espressione data per la corrente:

$$\frac{di}{dt} = \frac{vBl}{L} = \frac{Blv_0}{L} \cos \omega t = \omega i_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{Blv_0}{i_0 \omega} = \frac{mv_0^2}{i_0^2} = 0.4 \text{ H} \quad .$$

Notiamo che velocità e corrente oscillano una proporzionalmente a $\cos \omega t$, l'altra a $\operatorname{sen} \omega t$: esse sono cioè sfasate di $\pi/2$ o, come si dice, in quadratura. Quando una è massima l'altra è nulla e viceversa. Nell'istante iniziale $v = v_0$ e $i = 0$: tutta l'energia del sistema è cinetica, $1/2\ mv_0^2$; nell'istante in cui $i = i_0$, $v = 0$ e tutta l'energia è magnetica, $1/2\ Li_0^2$. Per la conservazione dell'energia, valida in quanto non ci sono forze dissipative, $1/2\ mv_0^2 = 1/2\ Li_0^2$ e si ritrova la formula per L.

6.10. *Una spira conduttrice quadrata di lato* $l = 20$ cm, *massa* $m = 5$ g *e resistenza R, giace in un piano verticale x, z ed è immersa in un campo magnetico parallelo e concorde all'asse y, il cui modulo varia con z secondo la legge* $B = Kz$, *essendo* $K = 10$ T/m. *Al tempo* $t = 0$ *la spira viene lasciata cadere e si osserva che dopo un tempo* $t_1 = 0.125$ s *la sua accelerazione vale* $a = 0.135$ g, *essendo g l'accelerazione di gravità. Calcolare il valore della resistenza R e la velocità di regime* v_r *della sbarretta. Calcolare, a regime, l'energia dissipata nel circuito per ogni centimetro di percorso.*

Sul lato AB viene indotta la tensione

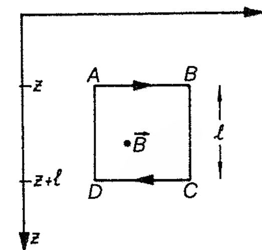
$$\mathscr{E}_z = \int_B^A \mathbf{v} \times \mathbf{B}(z)\, dx = vKzl \quad ,$$

con A positivo rispetto a B. Analogamente sul lato CD $\mathscr{E}_{z+l} = vK(z+l)l$ con D positivo rispetto a C. La f.em. indotta nel circuito vale

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\mathscr{E}_z + \mathscr{E}_{z+l} = Kl^2 v$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Kl^2 v}{R}$$

col verso indicato in figura. Le forze che agiscono sui lati CD e AB sono:



$$\mathbf{F}_{z+l} = i\mathbf{CD} \times \mathbf{B}(z+l) = -\frac{K^2 l^3}{R} v(z+l)\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{F}_z = i\mathbf{AB} \times \mathbf{B}(z) = \frac{K^2 l^3}{R} vz\,\mathbf{u}_z$$

da cui risulta una forza totale

$$\mathbf{F} = -\frac{K^2 l^4}{R} v \mathbf{u}_z$$

proporzionale alla velocità. L'equazione del moto lungo l'asse z è

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{K^2 l^4}{R} v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{K^2 l^4}{mR} v \quad ,$$

formalmente eguale a quella incontrata nel problema 6.8 per il circuito resistivo. La sua soluzione è

$$v = \frac{mRg}{K^2 l^4}\left(1 - e^{-K^2 l^4 t/mR}\right) \qquad \text{(a)}$$

e quindi la velocità di regime è $v_r = mRg/K^2 l^4$. Per calcolare la resistenza sfruttiamo il dato sull'accelerazione, derivando la (a):

$$a = \frac{dv}{dt} = g e^{-K^2 l^4 t/mR} \quad \Rightarrow \quad 0.135 = e^{-K^2 l^4 t_1/mR}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K^2 l^4 t_1}{mR} = 2 \quad \Rightarrow \quad R = 2\ \Omega \quad .$$

Si sostituisce e si trova $v_r = 0.61$ m/s; questo valore viene raggiunto quando la resistenza di attrito elettromagnetico eguaglia la forza peso.

La corrente che percorre il circuito a regime è $i_r = Kl^2 v_r/R$ e in un tempo Δt, pari a $\Delta z/v_r$, viene dissipata nel circuito l'energia

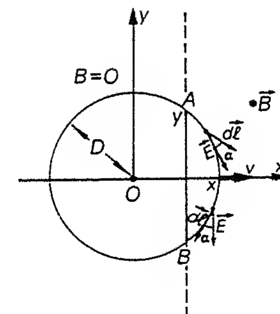
$$W = R i_r^2 \Delta t = R i_r^2 \frac{\Delta z}{v_r} = mg\Delta z \quad ,$$

pari alla diminuzione di energia potenziale. Con $\Delta z = 10^{-2}$ m risulta $W = 4.9 \cdot 10^{-4}$ J.

6.11 ***Una spira circolare di raggio $D = 30$ cm e resistenza $R = 0.5\ \Omega$ si muove di moto traslatorio uniforme con velocità $v = 0.8$ m/s nella direzione x ed entra in una regione in cui c'è un campo magnetico uniforme e costante, di modulo $B = 0.25$ T, ortogonale al piano della spira. Supponendo che la velocità della spira venga mantenuta costante calcolare, in funzione della coordinata x che specifica di quanto la spira è entrata nella regione dove c'è campo magnetico, la corrente $i(x)$ che circola nella spira, la forza $F(x)$ che bisogna applicarle e il lavoro necessario per introdurla completamente nel campo. Si trascuri l'autoinduzione della spira.***

Con riferimento alla figura, il settore circolare di altezza x e corda AB è immerso nel campo magnetico $\mathbf{B}$; su ogni tratto dl dell'arco AB viene indotto un campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ e quindi si manifesta una tensione

$d\mathscr{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl}$. Detto α l'angolo formato da $\mathbf{E}$ con $\mathbf{dl}$, $dl\cos\alpha = dy$, proiezione di $\mathbf{dl}$ sulla corda AB e quindi



$$d\mathscr{E} = E\,dl\cos\alpha = E\,dy = vB\,dy \quad .$$

Integrando su tutto l'arco AB

$$\mathscr{E} = \int_A^B vB\,dy = 2vBy$$

se $2y$ è la lunghezza della corda AB. Poiché nel resto del circuito $E = 0$ in quanto $B = 0$, $\mathscr{E}$ rappresenta la f.em. indotta nella spira. Ricordando che

$$\frac{2D - x}{y} = \frac{y}{x} \quad , \quad \text{ovvero } y = [(2D - x)x]^{1/2} \quad , \quad \text{otteniamo}$$

$$\mathscr{E}(x) = 2vB[(2D - x)x]^{1/2} \quad .$$

Da questa si ricava il valore della corrente indotta

$$i(x) = \frac{\mathscr{E}(x)}{R} = \frac{2vB}{R}[(2D - x)x]^{1/2} \quad ,$$

con verso sull'arco AB da A a B. La corrente, nulla per $x = 0$, cresce con x fino a raggiungere per $x = D$ il suo valore massimo $i_{max} = 2vBD/R$, poi diminuisce annullandosi quando la spira è completamente entrata nel campo.

Sul tratto $\mathbf{dl}$ di AB agisce la forza $\mathbf{dF} = i\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$ e su tutto l'arco

$$\mathbf{F} = i\int_A^B \mathbf{dl} \times \mathbf{B} = i\mathbf{AB} \times \mathbf{B} \quad ,$$

cioè indipendente dalla forma del tratto di filo AB, secondo i risultati del problema 5.5. Pertanto

$$\mathbf{F} = -\frac{4vB^2}{R}(2D - x)x\mathbf{u}_x \quad .$$

Per mantenere la spira in moto uniforme deve essere applicata una forza $\mathbf{f} = -\mathbf{F}$ e il lavoro per l'introduzione completa è

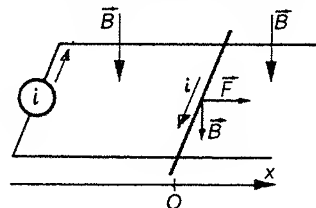
$$L = \int_0^{2D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{dx} = \frac{4vB^2}{R}\int_0^{2D}(2D - x)x\,dx = \frac{16}{3}\frac{vB^2 D^3}{R} = 1.44 \cdot 10^{-2}\ \text{J} \quad .$$

I risultati trovati per $\mathscr{E}$, i, $\mathbf{F}$ dipendono solo da x e non dalla particolare forma del circuito, per cui essi restano validi per circuiti di forma qualunque.

6.12. ***Una sbarretta conduttrice, di massa $m = 10$ g e resistenza $R = 10\ \Omega$, è posta sopra due guide metalliche parallele, distanti $b = 5$ cm, chiuse ad***

una estremità sui capi di un generatore di corrente costante $i = 0.1$ A. Il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme e costante (vedi figura) di modulo $B = 0.4$ T. Se ad un certo istante la sbarretta è lasciata libera di muoversi calcolare la potenza erogata dal generatore in funzione del tempo. Si trascurino l'autoinduzione del circuito, l'attrito sulle guide e le resistenze dei conduttori.

La sbarretta risente di una forza costante in quanto il generatore mantiene costante la corrente nel circuito (problema 5.3). Il modulo della forza è ibB, direzione e verso sono quelli dell'asse x. Il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $a = ibB/m$. Quando la sbarretta ha percorso la distanza x su di essa è stato compiuto il lavoro $L = ibBx$ che si ritrova sotto forma di energia cinetica. Lo stesso risultato può essere ottenuto partendo da (5.28): il lavoro per uno spostamento x è $L = i\Delta\Phi = i[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] = iBbx$.



Questo lavoro è positivo, fornito dal sistema; il circuito tende infatti ad assumere la configurazione in cui il flusso è massimo e per farlo, non potendo variare **B**, deve variare l'area, tramite spostamento della sbarretta. In definitiva, sulla sbarretta viene spesa la potenza

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = ibBv = ibBat = \frac{i^2 b^2 B^2}{m} t \quad .$$

La sorgente energetica è il generatore; a causa del movimento della sbarretta nel circuito compare la f.em. $\mathscr{E} = Bbv$ che si oppone al passaggio della corrente e contro di essa il generatore eroga la potenza $\mathscr{E}i = ibBv$. Resta poi da considerare la potenza Ri^2 spesa per effetto Joule. In totale

$$P_{gen} = i^2\left(R + \frac{b^2 B^2}{m} t\right) = 0.1 + 4 \cdot 10^{-4} t \text{ W} \quad .$$

6.13. ***Si consideri lo stesso dispositivo del problema 6.12, con un generatore di f.em. $V_0 = 1$ V e resistenza interna nulla al posto del generatore di corrente costante. Si studi il moto del conduttore mobile e l'energia totale spesa dal generatore.***

All'istante $t = 0$ la corrente nel circuito è $i_0 = V_0/R$, negli istanti successivi la situazione è modificata dall'apparire nel circuito della f.em. $\mathscr{E} = Bbv$ che si oppone alla corrente. Secondo la legge di Ohm

$$i = \frac{V_0 - Bbv}{R} \quad . \qquad \text{(a)}$$

L'equazione del moto è

$$m \frac{dv}{dt} = ibB$$

essendo la forza agente parallela e concorde all'asse x. Mettendo insieme le due relazioni

$$\frac{dv}{dt} = (V_0 - Bbv)\frac{Bb}{mR} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{V_0}{Bb}\left(1 - e^{-B^2b^2t/mR}\right) \quad .$$

La velocità tende al valore limite $v_\infty = V_0/Bb$; secondo la (a) per questo valore della velocità la corrente si annulla. Il raggiungimento di v_∞ rappresenta lo stabilizzarsi di una situazione di equilibrio in cui la f.em. indotta, che cresce proporzionalmente alla velocità, eguaglia la f.em. V_0 del generatore. In tal caso nel circuito non passa più corrente e si annulla la forza magnetica che agisce sulla sbarretta; di conseguenza questa si muove di moto uniforme. Teoricamente lo stabilirsi dell'equilibrio richiede un tempo infinito; in pratica dopo qualche costante di tempo $\tau = mR/B^2b^2$ la velocità assume il valore v_∞. L'annullarsi asintotico della corrente è evidente dall'espressione che si ricava da (a) sostituendovi v:

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-B^2b^2t/mR} \quad .$$

Numericamente $v_\infty = 50$ m/s, $\tau = 250$ s e

$$v = 50\left(1 - e^{-4 \cdot 10^{-3}t}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad i = 0.1\, e^{-4 \cdot 10^{-3}t} \text{ A} \quad .$$

L'energia totale fornita dal generatore è divisa in energia dissipata su R,

$$W_1 = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-B^2b^2t/mR} dt = \frac{1}{2} m \frac{V_0^2}{B^2b^2} = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

e in energia spesa contro la f.em. indotta, che va in energia cinetica della sbarretta W_2; pertanto $W_1 = W_2$ e l'energia totale fornita dal generatore è

$$W = m v_\infty^2 = 25 \text{ J} \quad .$$

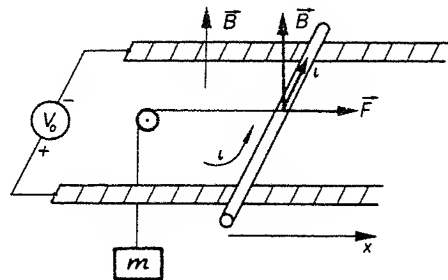
Che W_1 e W_2 fossero eguali era prevedibile a priori. Infatti dal punto di vista energetico questo problema è il simmetrico del problema 6.5. Là era presente inizialmente l'energia totale $1/2\, m v_0^2$ che durante il processo veniva dissipata sulla resistenza: il tramite era la corrente $i = (v_0 Bb/R)\, e^{-B^2b^2t/mR}$. Ora abbiamo trattato il problema inverso: abbiamo comunicato alla sbarretta l'energia cinetica $1/2\, m v_\infty^2$ e il tramite è stato ancora una corrente con la stessa espressione analitica della precedente. Ma a parità di circuito la stessa corrente deve produrre gli stessi effetti termici e perciò c'è da attendersi una dissipazione di energia per effetto Joule pari a $1/2\, m v_\infty^2$. Il processo è reso possibile dalla presenza del generatore. La sostituzione di v_∞ a v_0 è solamente

un fatto quantitativo (in generale $v_\infty \neq v_0$), ma non altera in alcun modo il ragionamento. A ben guardare un caso analogo si è già presentato nei problemi 4.22 e 4.26 relativi alla carica e alla scarica di un condensatore attraverso un resistore.

6.14. *Una sbarretta di lunghezza $b = 20$ cm è appoggiata su due rotaie conduttrici connesse ad un generatore ($V_0 = 6$ V). La resistenza della sbarretta è $R = 0.08\ \Omega$, tutte le altre resistenze sono trascurabili. La sbarretta è collegata attraverso una corda che scorre su una carrucola ad un corpo di massa $m = 1.2$ Kg. Tutto il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, normale al piano delle rotaie, di modulo $B = 1$ T. Calcolare la velocità di regime della sbarra e, in queste condizioni, la corrente i che percorre il circuito, la potenza erogata dal generatore e il rendimento meccanico (il sistema è in pratica un motore adatto a sollevare delle masse). Calcolare infine per quale valore della resistenza la sbarretta rimane ferma.*

La corrente nel circuito è data dalla (a) del problema 6.13:

$$i = \frac{V_0 - Bbv}{R} \quad . \qquad \text{(a)}$$



Sulla sbarretta agisce la forza

$$F = ibB - mg$$
$$= \frac{Bb}{R}(V_0 - Bbv) - mg \quad .$$

In condizioni di regime $F = 0$ per cui:

$$i_\infty = \frac{mg}{Bb} \quad , \quad v_\infty = \frac{1}{Bb}\left(V_0 - \frac{mgR}{Bb}\right) \quad . \qquad \text{(b)}$$

I valori numerici sono $i_\infty = 58.8$ A, $v_\infty = 6.5$ m/s.

La potenza erogata dal generatore è $V_0 i_\infty$: se ricaviamo V_0 dalla seconda delle (b) e lo moltiplichiamo per la prima otteniamo

$$P_{gen} = R i_\infty^2 + mg v_\infty = P_e + P_m = 277 + 76 = 353 \text{ W} \quad .$$

Il rendimento meccanico vale

$$\eta = \frac{P_m}{P_{gen}} = \frac{mg v_\infty}{V_0 i_\infty} = \frac{Bbv_\infty}{V_0} = \frac{\mathscr{E}_\infty}{V_0} = 0.215 \quad ;$$

esso è dato dal rapporto tra la f.em. indotta e la f.em. del generatore.

In base alla seconda delle (b) il valore R_0 della resistenza per cui $i_\infty = 0$ è:

$$R_0 = \frac{BbV_0}{mg} = 0.20\ \Omega \quad .$$

L'intervallo di valori ammessi per R è tra zero e R_0, cui corrisponde per la velocità di regime l'intervallo tra V_0/Bb e zero; la corrente di regime non dipende da R. Se R supera R_0 il sistema non raggiunge mai il regime.

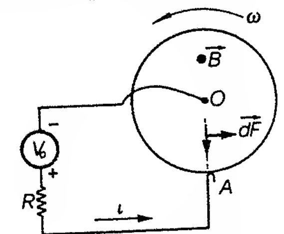
6.15. *Un sottile disco conduttore di raggio $D = 10$ cm e massa $m = 100$ g è collegato con due contatti striscianti, uno nel centro O, l'altro sul bordo A, ad un circuito costituito da un generatore ($V_0 = 5$ V) e da una resistenza ($R = 4\ \Omega$). Il disco è immerso in un campo magnetico ad esso ortogonale, uniforme e costante, di modulo $B = 1$ T. In seguito il passaggio della corrente il disco entra in rotazione. Calcolare come varia la velocità angolare ω nel tempo e darne la relazione col momento rispetto all'asse di rotazione delle forze agenti. Calcolare inoltre l'energia totale spesa dal generatore. Si trascurino l'attrito, l'autoinduzione del circuito e la resistenza del disco.*

La forza sulla corrente lungo il segmento OA che congiunge il centro con il contatto strisciante mette in rotazione il disco in senso antiorario, per cui possiamo in parte rifarci ai risultati del problema 6.4. L'elemento **dr** del tratto OA risente della forza di modulo $dF = iBdr$, ortogonale a **dr** nel piano del disco; rispetto all'asse il momento di questa forza vale, in modulo, $dM = iBrdr$. Integrando

$$M = \frac{iBD^2}{2} \quad . \qquad \text{(a)}$$

D'altra parte, la corrente non resta costante durante il fenomeno. In seguito alla rotazione del disco nel circuito appare la f.em. indotta $\mathscr{E} = BD^2\omega/2$ di verso opposto a V_0 per la legge di Lenz e la legge di Ohm per il circuito dà

$$V_0 - \frac{BD^2\omega}{2} = Ri \quad . \qquad \text{(b)}$$



La relazione cercata tra M e ω risulta dunque

$$M = \frac{BD^2}{2R}\left(V_0 - \frac{BD^2}{2}\omega\right) \quad . \qquad \text{(c)}$$

Il momento delle forze agenti è massimo per $\omega = 0$, cioè all'istante iniziale, poi decresce linearmente al crescere di ω per annullarsi quando

$$\omega = \omega_\infty = \frac{2V_0}{BD^2} \quad .$$

La (b) dice che per questo valore la f.em. indotta $\mathscr{E}$ eguaglia V_0 e perciò nel circuito non circola più corrente e il moto del disco diviene uniforme con velocità angolare di regime ω_∞. Incontriamo qui la stessa situazione di equilibrio vista nel problema 6.13.

Calcoliamo adesso l'espressione della velocità angolare in funzione del tempo. L'equazione del moto è

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = I \frac{d\omega}{dt} = M = \frac{BD^2}{2R}\left(V_0 - \frac{BD^2}{2}\omega\right) ,$$

con I momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione. Si integra per separazione delle variabili con la condizione iniziale $\omega = 0$ per $t = 0$:

$$\omega = \frac{2V_0}{BD^2}\left(1 - e^{-B^2D^4t/4IR}\right) . \qquad \text{(d)}$$

La costante di tempo, posto $I = 1/2\, mD^2$, vale $\tau = 2mR/B^2D^2$. Da (c) e (d) ricaviamo poi M in funzione del tempo e successivamente, da (a), la corrente:

$$M = \frac{BD^2V_0}{2R} e^{-B^2D^2t/2mR} \quad , \quad i = \frac{V_0}{R} e^{-B^2D^2t/mR} .$$

Le espressioni numeriche sono:

$$\omega_\infty = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad , \quad \tau = 80 \text{ s} \quad , \quad \omega = 10^3\left(1 - e^{-t/80}\right)\frac{\text{rad}}{\text{s}} ,$$

$$M = 6.25 \cdot 10^{-3}\, e^{-t/80} \text{ Nm} \quad , \quad i = 1.25\, e^{-t/80} \text{ A} .$$

L'energia totale erogata dal generatore è data da quella dissipata per effetto Joule più quella spesa contro la f.em. indotta, che va in energia cinetica di rotazione. Quest'ultima è $W_2 = 1/2\, I\omega_\infty^2$, la prima è

$$W_1 = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-B^2D^2t/mR} dt = \frac{mV_0^2}{B^2D^2} = \frac{1}{2} I \omega_\infty^2 .$$

Pertanto l'energia totale fornita dal generatore è

$$W = I\omega_\infty^2 = \frac{1}{2} mD^2\omega_\infty^2 = 500 \text{ J}$$

Valgono tutte le considerazioni fatte alla fine del problema 6.13; il caso simmetrico è trattato nel problema 6.16.

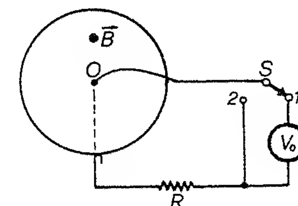
6.16. ***Un sottile disco conduttore di raggio $D = 20$ cm, momento d'inerzia $I = 2 \cdot 10^{-3}$ Kgm^2, è collegato ad un generatore (V_0) in un circuito di resistenza $R = 10\ \Omega$. Esso è immerso in un campo magnetico ortogonale, uniforme e costante, di modulo $B = 0.5$ T, e ruota con una velocità angolare di regime corrispondente a $\nu_0 = 79.6$ giri al secondo. Calcolare il valore di V_0. Al tempo $t = 0$ il generatore viene escluso dal circuito spostando l'interruttore S nella posizione 2. Calcolare come variano la velocità angolare in funzione del tempo e la frequenza in funzione del numero di giri fatti dal disco. Calcolare inoltre dopo quanti giri il disco si arresta, l'energia dissipata nel circuito e la carica totale che lo attraversa tra l'istante $t = 0$ e l'arresto.***

Come discusso nel problema 6.15, in condizioni di regime delle forze agenti e la corrente sono nulli per cui, dalla (b) o dalla (c),

$$V_0 = \frac{BD^2\omega_0}{2} = BD^2\pi\nu_0 = 5 \text{ V} .$$

Quando viene escluso il generatore, in base alla (c) del problema 6.15 o alla (b) del problema 6.4, sul disco agisce il momento

$$M = -\frac{B^2D^4}{4R}\omega$$



per cui l'equazione del moto è

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2D^4}{4RI}\omega \Rightarrow \omega = \omega_0\, e^{-B^2D^4t/4IR} . \qquad \text{(a)}$$

con la condizione iniziale che per $t = 0$ $\omega = \omega_0 = 2\pi\nu_0$.

Per passare alla dipendenza dell'angolo, riscriviamo la prima delle (a):

$$d\omega = -\frac{B^2D^4}{4RI}\omega dt = -\frac{B^2D^4}{4RI} d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0 - \frac{B^2D^4}{4RI}\theta \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \nu_0 - \frac{B^2D^4}{4RI} N$$

se N è il numero di giri contato a partire dall'istante $t = 0$

Numericamente

$$\omega = 500\, e^{-5\ 10^{-1}t}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad , \quad \nu = 79.6 - 5 \cdot 10^{-3} N \frac{\text{giri}}{\text{s}}$$

L'arresto corrisponde a $\nu = 0$ per cui $N = 15920$ giri.

La corrente nel circuito vale

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{BD^2\omega}{2R} = \frac{BD^2\omega_0}{2R} e^{-B^2D^4t/4IR}$$

e l'energia totale dissipata per effetto Joule è

$$W = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{B^2D^4\omega_0^2}{4R}\int_0^\infty e^{-B^2D^4t/2IR} dt = \frac{1}{2} I\omega_0^2 = 250 \text{ J} ,$$

coincidente con l'energia cinetica posseduta dal disco nell'istante in cui è stato escluso il generatore.

Infine la carica q che attraversa ogni sezione del circuito è data da

$$q = \int_0^\infty i\,dt = \frac{BD^2\omega_0}{2R}\int_0^\infty e^{-B^2D^4t/4IR}\,dt = \frac{2I\omega_0}{BD^2} = 100\ \mathrm{C} \quad .$$

6.17. ***Un disco metallico, spesso $a = 1$ mm, di raggio $D_2 = 20$ cm, può ruotare senza attrito attorno ad un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro, di raggio $D_1 = 5$ mm. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, parallelo all'asse, di modulo $B = 0.1$ T. All'istante $t = 0$, quando ha una velocità angolare $\omega_0 = 140$ rad/s, il disco viene cortocircuitato. Calcolare come varia la temperatura del disco nel tempo e la variazione totale di temperatura tra $t = 0$ e l'arresto. La resistività del metallo è $\varrho = 2 \cdot 10^{-7}$ Ωm, il calore specifico $c = 480.7$ J/Kg°C, la densità $\delta = 7.8 \cdot 10^3$ Kg/m³. Si trascurino le resistenze dei collegamenti e l'autoinduzione del circuito e si supponga il disco termicamente isolato.***

A causa della rotazione si induce nel circuito una f.em. $\mathscr{E} = B\omega/2\,(D_2^2 - D_1^2)$; con i nostri dati $D_2^2 \gg D_1^2$, per cui è lecito scrivere $\mathscr{E} = B\omega D_2^2/2$. Siamo nelle stesse condizioni del problema 6.16: la velocità angolare diminuisce nel tempo,

$$\omega = \omega_0 e^{-B^2D^2t/2mR}$$

essendo m la massa del disco e $I = 1/2\,mD_2^2$ il suo momento d'inerzia; inoltre possiamo scrivere $m = \delta\pi D_2^2 a = 0.98$ Kg.

Avendo supposto che i collegamenti abbiano resistenza trascurabile, R si identifica con la resistenza offerta dal disco al passaggio della corrente. Eseguiamo il calcolo col metodo visto nel problema 4.19 riferendoci alla capacità di un condensatore cilindrico (2.4), di lunghezza a e raggi D_1 e D_2:

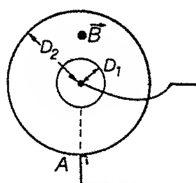
$$R = \frac{\varrho\varepsilon_0}{C} = \frac{\varrho}{2\pi a}\log\frac{D_2}{D_1} = 1.17 \cdot 10^{-4}\ \Omega.$$

L'energia dissipata nel circuito nel tempo dt serve unicamente a fare aumentare la temperatura del disco secondo l'equazione

$$\frac{\mathscr{E}^2}{R}dt = mc\,dT \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\mathscr{E}^2}{mcR} = \frac{B^2D_2^4\omega_0^2}{4mcR}\,e^{-B^2D_2^2t/mR} \ .$$

Integrando con la condizione iniziale $T = T_0$ per $t = 0$

$$T = T_0 + \frac{D_2^2\omega_0^2}{4c}\,(1 - e^{-B^2D_2^2t/mR}) \quad .$$



La variazione finale di temperatura è $T - T_0 = D_2^2\omega_0^2/4c$.

I valori numerici sono:

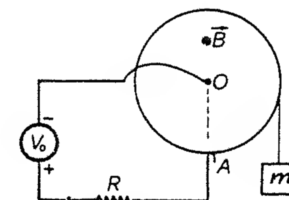
$$\Delta T = 0.4°\mathrm{C} \quad , \quad T = T_0 + 0.4\,(1 - e^{-3.49t}) \quad .$$

6.18. ***Nel dispositivo in figura un disco metallico di raggio $D = 20$ cm è collegato ad un generatore ($V_0 = 2$ V); la resistenza complessiva del circuito è $R = 0.024$ Ω. Il disco è immerso in un campo magnetico ortogonale, uniforme e costante, di modulo $B = 1$ T, diretto verso il lettore. Al disco è sospesa tramite una corda un corpo di massa $m = 0.5$ Kg. Calcolare la velocità angolare di regime del disco e, in queste condizioni, la corrente che percorre il circuito, la potenza erogata dal generatore e il rendimento meccanico del sistema, che può essere pensato come un motore adatto a sollevare masse. Calcolare infine per quale valore della resistenza totale del circuito il disco rimane fermo.***

Ci serviamo delle relazioni (b) e (c) del problema 6.15 e del fatto che in condizioni di regime il momento delle forze agenti è nullo.

$$i = \frac{1}{R}\left(V_0 - \frac{BD^2\omega}{2}\right) \quad ,$$

$$M = \frac{BD^2}{2R}\left(V_0 - \frac{BD^2}{2}\,\omega\right) - mgD \quad ,$$



$$\Rightarrow \quad \omega_\infty = \frac{2}{BD^2}\left(V_0 - \frac{2mgR}{BD}\right) \quad \Rightarrow \quad i_\infty = \frac{2mg}{BD} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Dalla prima delle (a) ricaviamo $V_0 = \dfrac{2mgR}{BD} + \dfrac{BD^2}{2}\,\omega_\infty$ e moltiplicando per la seconda delle (a) abbiamo la potenza erogata dal generatore:

$$V_0 i_\infty = R i_\infty^2 + mgD\,\omega_\infty \quad ;$$

una parte va spesa in effetto Joule, l'altra in potenza meccanica.

Passando ai numeri:

$$\omega_\infty = 41.2\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \quad , \quad i_\infty = 49\ \mathrm{A} \quad ,$$

$$P_{gen} = 98\ \mathrm{W} \quad , \quad P_e = 57.6\ \mathrm{W} \quad , \quad P_m = 40.4\ \mathrm{W} \quad .$$

Il rendimento meccanico vale

$$\eta = \frac{P_m}{P_{gen}} = \frac{mgD\omega_\infty}{V_0 \imath_\infty} = \frac{\mathscr{E}_\infty}{V_0} = 0.41 \quad ;$$

esso è esprimibile come rapporto tra la f.em. indotta e la f.em. del generatore (vedi problema 6.14).

Infine, in base alla prima delle (a), il valore R_0 della resistenza per cui $\omega_\infty = 0$ è

$$R_0 = \frac{BDV_0}{2mg} = 0.041\ \Omega.$$

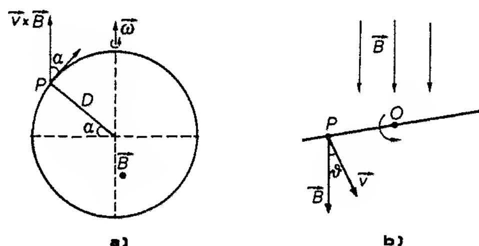
6.19. ***Una spira circolare, di raggio D = 15 cm e resistenza R = 3 Ω, ruota con velocità angolare ω = 100 rad/s attorno ad un suo diametro. Essa è immersa in un campo magnetico uniforme e costante, ortogonale all'asse di rotazione, di modulo B = 0.45 T. All'istante t = 0 la normale alla spira e B formano un angolo θ₀ = 30°; calcolare la f.em. indotta nella spira e la potenza necessaria per mantenerla in rotazione, trascurando gli effetti dell'autoinduzione.***

Il metodo di calcolo più semplice è quello basato sulla (6.4): il flusso di **B** attraverso la spira varia nel tempo in quanto, pur essendo **B** e l'area della spira costanti, cambia l'orientazione relativa. Tenuto conto della condizione iniziale

$$\Phi = B\pi D^2 \cos(\omega t + \theta_0) \Rightarrow \mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega B \pi D^2 \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \quad .$$

La f.em. indotta varia sinusoidalmente nel tempo, con periodo $T = 2\pi/\omega$ e valor massimo $\omega B\pi D^2$. È questo il principio che sta alla base dei generatori di forza elettromotrice alternata.

Allo stesso risultato si giunge applicando (6.2), ma il calcolo è più laborioso. La velocità dei vari punti della spira non è la stessa; riferendoci alla figura a, il punto P ha velocità diretta verso il lettore, di modulo $\omega D\cos\alpha$ in quanto dista $D\cos\alpha$ dall'asse di rotazione. Guardando il dispositivo dall'alto, come in figura b, vediamo che nell'istante generico t, la velocità del punto P forma con



il campo **B** l'angolo $\theta = \omega t$ (tralasciando per ora la fase iniziale). Il prodotto $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ è così, nel punto P, parallelo e concorde a $\boldsymbol{\omega}$, di modulo $vB\operatorname{sen}\omega t$ e forma l'angolo α con l'elemento di spira **dl**. Stabilite queste relazioni geometriche eseguiamo il calcolo della circuitazione:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \omega D\cos\alpha B \operatorname{sen}\omega t\, D d\alpha \cos\alpha = \omega B D^2 \operatorname{sen}\omega t \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha.$$

L'ultimo integrale vale π e perciò $\mathscr{E} = \omega B\pi D^2 \operatorname{sen}\omega t$; se teniamo conto della fase iniziale riotteniamo l'espressione precedente. Questa seconda via, un po' più complessa, segue fedelmente il processo fisico che dà origine alla f.em. indotta.

Per mantenere la spira in rotazione occorre spendere lavoro contro $\mathscr{E}$ che con i suoi effetti tende ad opporsi al moto (attrito elettromagnetico). La potenza necessaria a ciò è

$$P = \mathscr{E}\imath = \frac{\mathscr{E}^2}{R} = \frac{\omega^2 B^2 \pi^2 D^4 \operatorname{sen}^2(\omega t + \theta_0)}{R} \quad .$$

Possiamo verificare il risultato calcolando il momento delle forze agenti; esso vale in modulo

$$M = \mu B \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) = \imath\pi D^2 B \operatorname{sen}(\omega + \theta_0) = \frac{\mathscr{E}}{R}\pi D^2 B \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \quad .$$

Per vincere questo momento, che certamente si oppone al moto per la legge di Lenz, occorre la potenza

$$P = M\omega = \frac{\mathscr{E}}{R}\omega B\pi D^2 \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \quad .$$

Numericamente

$$\mathscr{E} = 3.18 \operatorname{sen}\left(100\, t + \frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{V} \quad , \quad P = 3.37 \operatorname{sen}^2\left(100\, t + \frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{W} \quad .$$

6.20. ***Un sottile anello di materiale superconduttore di raggio R = 5 cm, al di sotto della temperatura critica, si trova in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo B = 10⁻³ T, parallelo al piano dell'anello. Questo viene ruotato di 90° in modo che B risulti normale al suo piano e per fare ciò si spende il lavoro W = 9.82 · 10⁻⁵ J. Calcolare il valore della corrente che si stabilisce nell'anello e il coefficiente di autoinduzione di questo.***

Al di sotto della temperatura critica la resistenza di un conduttore è nulla; non essendoci dissipazione per effetto Joule, tutto il lavoro va in energia intrinseca della corrente:

$$W = \frac{1}{2} L\imath^2 \quad . \qquad \text{(a)}$$

Al variare della posizione dell'anello si generano in esso una f.em. indotta dalla variazione del flusso primario e una forza controelettromotrice dovuta alla variazione della corrente nell'anello stesso. Poiché la resistenza è nulla $\mathscr{E} - L\dfrac{di}{dt} = 0$ ovvero $-\dfrac{d\Phi}{dt} - L\dfrac{di}{dt} = 0$. Moltiplichiamo entrambi i termini per dt e integriamo:

$$-\int_0^{\Phi} d\Phi = -\Phi = \int_0^{i} L\,di = Li \quad .$$

La corrente indotta genera un autoflusso esattamente eguale ed opposto al flusso dovuto al campo esterno. In modulo abbiamo perciò l'altra relazione

$$\pi R^2 B = Li \qquad \text{(b)}$$

Si fa sistema tra (a) e (b) e si ottiene

$$i = \frac{2W}{\pi R^2 B} = 25 \text{ A} \quad , \quad L = \frac{(\pi R^2 B)^2}{2W} = 3.14 \cdot 10^{-7} \text{ H} \quad .$$

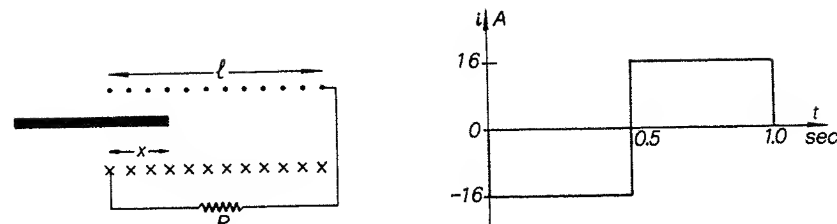
Alla relazione (b) si può arrivare anche così: la f.em. globale nel circuito deve essere nulla in quanto la resistenza è nulla. Per la (6.4) deve quindi essere costante nel tempo il flusso magnetico: essendo nullo all'inizio. deve essere sempre eguale a zero Alla rotazione pertanto $B\pi R^2 + Li = 0$ e, in modulo, si trova la (c).

A differenza dei casi finora trattati è questo un problema in cui gli effetti magnetici della corrente indotta sono essenziali per la risoluzione· il valore finale della corrente nell'anello superconduttore è determinato proprio da essi.

6.21. *Un magnete permanente cilindrico di sezione* $\Sigma = 1$ cm² *e lunghezza* $l = 50$ cm, *ha un campo magnetico interno* **B** *costante in ogni punto, mentre all'esterno il campo è praticamente nullo (approssimazione del magnete indefinito). All'istante* $t = 0$ *esso comincia a entrare con velocità* **v** *in una bobina costituita da un avvolgimento di* $N = 100$ *spire disposte su una superficie cilindrica di lunghezza* l *pari a quella del magnete. La bobina è chiusa su una resistenza* $R = 4 \cdot 10^{-3}$ Ω. *Mantenendo costante la velocità* v *del magnete fintanto che esso non esce completamente dalla bobina, si osserva che la corrente in questa ha l'andamento riportato in figura. Calcolare il valore del campo magnetico* **B** *del magnete, l'energia dissipata nel processo e la carica totale che ha attraversato ogni sezione della bobina. Si trascuri l'autoinduzione del circuito e ogni resistenza a eccezione di* R.

Detta x la quantità di cui è entrato il magnete, il flusso di **B** attraverso una spira è $\Phi_1 = B\Sigma$; le spire interessate sono quelle comprese nel tratto x, cioè Nx/l, per cui il flusso totale è

$$\Phi(x) = B\Sigma\frac{N}{l}x \quad \Rightarrow \quad -\frac{d\Phi}{dt} = -B\Sigma\frac{N}{l}v \; .$$



Il flusso aumenta linearmente con x ed è massimo quando il magnete è completamente entrato ($x = l$). Diminuisce poi con la legge

$$\Phi(y) = B\Sigma\frac{N}{l}(l - y) \quad \Rightarrow \quad -\frac{d\Phi}{dt} = B\Sigma\frac{N}{l}v$$

se y rappresenta di quanto è uscito l'estremo anteriore del magnete dalla bobina. Questi flussi variabili provocano la f.em. indotte sopra calcolate e quindi le correnti indotte, costanti nel tempo:

$$i = -\frac{B\Sigma N v}{Rl} \text{ (magnete entrante)} \quad , \quad i = \frac{B\Sigma N v}{Rl} \text{ (magnete uscente)}$$

Dal grafico si deduce che il magnete percorre la distanza $x = l$ in 0.5 s per cui $v = 1$ m/s; valendo inoltre la corrente 1.6 A segue che $B = 0.32$ T.

L'energia dissipata nel circuito è $W = Ri^2\Delta t$ con $\Delta t = 1$ s (vedi grafico), da cui $W = 1.02 \cdot 10^{-2}$ J.

La carica che attraversa il circuito nei primi 0.5 s si deduce dalla (6.7):

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = -\frac{B\Sigma N}{R} = -0.8 \text{ C} \quad ;$$

nella seconda fase cambia il segno e $q = 0.8$ C; la carica complessiva risulta nulla, come si poteva prevedere essendo il flusso nullo all'inizio a alla fine del processo.

6.22. *Un solenoide indefinito, di raggio* $R = 4$ cm *e con* $n = 10$ *spire per centimetro, è percorso da una corrente* $i = 30$ A. *All'istaute* $t = 0$ *la corrente comincia a decrescere linearmente nel tempo per annullarsi dopo* 5 s. *Calcolare il modulo del campo elettrico indotto dentro il solenoide e fuori e darne direzione e verso. Ricavare inoltre la relazione che lega* **E** *al potenziale vettore* **A**.

Il campo elettrico indotto è diverso da zero solo nei cinque secondi in cui la corrente, e di conseguenza il campo magnetico nel solenoide, variano. La variazione temporale è data da

$$i(t) = i_0(1 - \alpha t) = 30(1 - 0.2\,t) \text{ A} \quad ,$$
$$B(t) = \mu_0 n i(t) = B_0(1 - \alpha t) = 3.77 \cdot 10^{-2}(1 - 0.2\,t) \text{ T} \quad .$$

Consideriamo una circonferenza C con il centro sull'asse del solenoide, ortogonale ad esso, di raggio $r<R$. La (6.4) si scrive, prendendo come superficie Σ il cerchio C ed essendo $\mathbf{B}$ uniforme sulla sezione,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad .$$

Considerazioni di simmetria ci fanno prevedere che il campo elettrico indotto stia nel piano di C, ortogonale a $\mathbf{B}$; il suo modulo dipende solo da r e le sue linee di campo sono circonferenze come C con verso tale da apparire antiorario dalla punta di $\mathbf{B}$ se questo decresce nel tempo e orario se $\mathbf{B}$ cresce (si ricordi il segno meno) Il primo membro dell'eguaglianza si scrive allora $2\pi r E$ e perciò

$$E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = \frac{B_0 \alpha r}{2} \quad .$$

Per la nostra geometria o per una analoga, con $\mathbf{B}$ uniforme e variabile nel tempo, il secondo membro dà l'espressione generale del modulo del campo elettrico indotto, mentre il terzo si riferisce alla decrescita lineare. In questo caso particolare $\mathbf{E}$ è costante nel tempo, il suo modulo cresce da zero al valore massimo $E_{max} = B_0 \alpha R/2$, il verso delle linee di campo appare antiorario dalla punta di $\mathbf{B}$.

Quando r è maggiore di R si segue lo stesso procedimento, solo che ora $\Sigma = \pi R^2$ essendo $\mathbf{B}$ nullo per $r > R$, e quindi

$$E = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} = \frac{B_0 \alpha R^2}{2r} \quad .$$

Le caratteristiche vettoriali sono le stesse, il modulo decresce dal valore E_{max} a zero.

Numericamente

$$E(r<R) = 3.77 \cdot 10^{-3} r \ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \quad , \quad E(r>R) = \frac{6.03 \cdot 10^{-6}}{r}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \quad .$$

I valori sono modesti in quanto la variazione di $\mathbf{B}$ nel tempo è lenta.

Se riprendiamo i risultati del problema 5.32 vediamo come, sia dentro che fuori dal solenoide, il campo elettrico sia calcolabile dal potenziale vettore tramite la relazione

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad .$$

Si tratta in effetti di una relazione valida in generale, che si ricava dalle equazioni $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ e $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$.

Qualora una delle circonferenze C, con r qualunque, fosse materializzata da una spira di resistenza R_0, questa sarebbe sede durante il fenomeno transitorio della corrente indotta

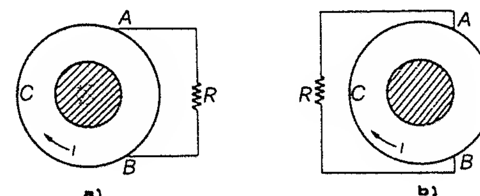
$$i = \frac{\mathscr{E}}{R_0} = \frac{1}{R_0}\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi r E}{R_0} \quad .$$

Nel caso specifico $i = B_0 \alpha \pi r^2/R_0$ se $r \leq R$, $i = B_0 \alpha \pi R^2/R_0$ se $r \geq R$, costanti durante la variazione (lineare) di flusso.

6.23. ***Una spira circolare è interessata, nella sua zona centrale, da un flusso di B variabile nel tempo secondo la legge $\Phi = \Phi_0\ (1 - At)$ con $\Phi_0 = 10^{-4}$ Wb e $A = 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$. Si assuma il flusso entrante nel disegno e si consideri B nullo al di fuori della zona tratteggiata. La spira ha una lunghezza l e la sua resistenza è $R_0 = 3\ \Omega$. Tra i punti A e B, posti agli estremi di un arco lungo $l/3$, può essere collegato, nei due modi indicati in figura, un conduttore di resistenza $R = 2\ \Omega$. Calcolare nei due casi la corrente nella spira.***

La variazione temporale del flusso attraverso la spira provoca una f.em indotta

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = A\,\Phi_0 = 0.1\ \mathrm{V} \quad ,$$



che fa circolare nella spira una corrente oraria in accordo con la legge di Lenz (un dispositivo per realizzare la situazione descritta potrebbe essere quello visto nel problema 6.22; la zona tratteggiata indicherebbe allora il solenoide) La f.em. indotta deriva dal campo elettrico indotto dalla variazione di $\mathbf{B}$. Questo campo non è conservativo; e infatti la sua circuitazione estesa alla spira vale proprio $\mathscr{E}$. Per la connessione (a) il cammino chiuso $ARBA$ non concatena però alcun flusso variabile e perciò la circuitazione di $\mathbf{E}$ lungo di esso è nulla: la stessa f.em. $\mathscr{E}/3$ che compare tra B e A lungo l'arco di lunghezza $l/3$ deve comparire tra B e A lungo R. I due rami possono così considerarsi in parallelo a tutti gli effetti e poi in serie col resto della spira. La resistenza totale è in tal caso

$$R_a = \frac{2}{3} R_0 + \frac{\frac{1}{3} R_0 R}{\frac{1}{3} R_0 + R} = \frac{9R + 2R_0}{9R + 3R_0} R_0 = 2.67\ \Omega \quad .$$

Non sarebbe lecito, sempre per la connessione della figura a, applicare lo stesso ragionamento al percorso chiuso $ARBCA$ in quanto questo concatena

del flusso variabile e l'integrale di linea esteso al tratto ARB del campo $\mathbf{E}$ non è eguale a quello esteso al tratto ACB: i due rami non possono essere considerati in parallelo.

Per la connessione (b), fatti gli opportuni cambiamenti geometrici, la via da seguire è la stessa: il tratto BRA è in parallelo con BCA e si ha la resistenza totale

$$R_b = \frac{1}{3} R_0 + \frac{\frac{2}{3} R_0 R}{\frac{2}{3} R_0 + R} = \frac{9R + 2R_0}{9R + 6R_0} R_0 = 2.0\ \Omega \quad .$$

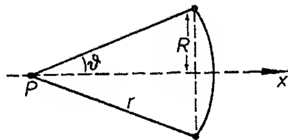
Nei due casi perciò la corrente nella spira vale

$$i_a = 3.7 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{A} \quad , \quad i_b = 5.0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{A} \quad .$$

Nel ramo esterno la corrente ha verso eguale a quello del ramo di spira con cui viene considerato in parallelo.

Mentre nei circuiti esaminati fino ad ora, una volta fissati i punti di connessione tra un resistore e una rete generica, questo veniva percorso dalla stessa corrente, qualunque fosse la sua effettiva posizione geometrica, adesso la natura non conservativa del campo elettrico che provoca il passaggio di corrente porta al risultato opposto, un po' sorprendente a prima vista. In effetti, si provi ad immaginare tracciate nel disegno le linee del campo elettrico indotto (circonferenze con verso orario) e ci si renderà conto che le f.em indotte nel caso (a) e nel caso (b) fanno passare corrente nel resistore R una volta da A a B e una volta da B a A.

6.24. ***Un dipolo magnetico di momento $\boldsymbol{\mu}$ si sposta con velocità $\mathbf{v}$ uniforme lungo l'asse (al quale $\boldsymbol{\mu}$ rimane parallelo e concorde) di una spira circolare di raggio R; inizialmente il dipolo è molto lontano dalla spira. Calcolare il flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con la spira in funzione dell'angolo θ sotto cui il contorno è visto dal dipolo durante il moto e la corrispondente f.em. indotta nella spira. Ammesso che il dipolo abbia un momento pari a un magnetone di Bohr e una velocità $v = 10^6$ m/s e che il raggio della spira sia $R = 1$ mm, dire se l'effetto prodotto sarebbe facilmente misurabile (ci si riferisca per questo al valor massimo della f.em.).***



Fissiamo la posizione occupata ad un certo istante t dal dipolo per eseguire il calcolo del flusso in quell'istante: la situazione è indicata in figura. Essendo il campo $\mathbf{B}$ del dipolo solenoidale, calcoliamo il flusso attraverso una superficie conveniente da un punto di vista analitico come, per esempio, la superficie Σ della calotta sferica con centro nel dipolo P, raggio r e apertura 2θ. Nei suoi punti il campo magnetico del dipolo ha le componenti

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu\cos\theta}{r^3} \quad , \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \operatorname{sen}\theta}{r^3} \quad ,$$

rispettivamente ortogonale e tangente alla superficie (vedi problema 1.18). Solo la prima dà contributo al flusso concatenato con la spira, che vale

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{B}) = \int_\Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu\cos\theta}{r^3}\, 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \mu_0 \frac{\mu}{r} \int_0^\theta \operatorname{sen}\theta\, d\operatorname{sen}\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{2r} \mu \operatorname{sen}^2\theta = \frac{\mu_0}{2R} \mu \operatorname{sen}^3\theta$$

essendo $r\operatorname{sen}\theta = R$. Il flusso cresce dal valore zero per $\theta = 0$ (dipolo nel punto $x = -\infty$) al valor massimo $\mu_0\mu/2R$ per $\theta = \pi/2$ (dipolo nel centro della spira) per poi decrescere simmetricamente fino ad annullarsi per $\theta = \pi$ (dipolo nel punto $x = +\infty$).

Per avere la variazione nel tempo del flusso che ci permette poi di calcolare la f.em. indotta occorre trovare $d\theta/dt$. Essendo $R = -x\operatorname{tg}\theta$, la velocità è $v = dx/dt = (R/\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta/dt$, ovvero

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R} \operatorname{sen}^2\theta \quad .$$

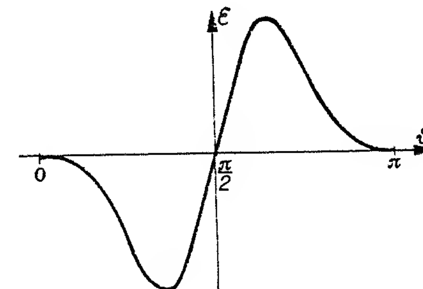
L'espressione della f.em. indotta in funzione di θ risulta pertanto

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{3\mu_0}{2R} \mu \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3\mu_0}{2R^2} \mu v \operatorname{sen}^4\theta\cos\theta \quad .$$

Studiamone l'andamento calcolando la derivata rispetto a θ.

$$\frac{d\mathscr{E}}{d\theta} = -\frac{3\mu_0}{2R^2} \mu v \operatorname{sen}^3\theta\, (5\cos^2\theta - 1) \quad .$$

Per $\theta = 0$ ($x = -\infty$) sono nulle sia $\mathscr{E}$ che $d\mathscr{E}/d\theta$; al crescere di θ, cioè all'avvicinarsi del dipolo alla spira, la derivata è negativa fino a che $\cos^2\theta$ resta superiore a $1/5$: in questo intervallo, da $\theta = 0°$ a $\theta \simeq 63.5°$, la f.em. decresce fino a raggiungere un minimo, appunto per $\theta \simeq 63.5°$. Dopo tale punto la derivata è positiva e la f.em. cresce fino a raggiungere un massimo per $\theta \simeq 116.5°$ (simmetrico dell'altro estremo rispetto alla spira). Infine oltre



questo valore la derivata è negativa e la f.em. decresce per annullarsi a $\theta = 180°$ $(x = +\infty)$. Alle posizioni angolari degli estremi di $\mathscr{E}$ corrispondono sull'asse x le posizioni $x = \pm R/2$. Il valore assoluto massimo di $\mathscr{E}$ risulta

$$\mathscr{E}_{max} = \frac{3\mu_0}{2R^2}\,\mu v\left(1-\frac{1}{5}\right)^4 \frac{1}{\sqrt{5}} = 3.45 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mu v}{R^2} = 3.2 \cdot 10^{-18}\ \text{V} \quad ,$$

ricordando che un magnetone di Bohr vale $9.28 \cdot 10^{-24}$ A m^2 (paragrafo 5 g.) Il valore trovato è estremamente basso e non è attualmente rivelabile, nemmeno con la strumentazione più raffinata, che arriva al massimo a qualche 10^{-9} V.

6.25. ***Un solenoide rettilineo è formato da $N_1 = 5000$ spire su una lunghezza $d = 50$ cm; la sezione è $\Sigma = 4$ cm^2. In corrispondenza alla parte centrale del solenoide, sulla stessa sezione, sono avvolte $N_2 = 100$ spire. Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti. Se nel primo solenoide la corrente passa da un valore $i = 12$ A a zero, un galvanometro balistico collegato al secondo segna il passaggio di una carica elettrica $q = 7.53 \cdot 10^{-4}$ C. Calcolare la resistenza del secondo circuito.***

Il campo magnetico del primo solenoide può essere scritto nella zona centrale $B = \mu_0 n i = \mu_0 N_1 i/d$ con buona approssimazione, vista la geometria del sistema. Questo campo genera attraverso le N_2 spire del secondo solenoide il flusso

$$\Phi_{1,2} = N_2 B \Sigma = \mu_0\,\frac{N_1 N_2 \Sigma}{d}\,i$$

per cui il coefficiente di mutua induzione (5.19) vale

$$M = \mu_0\,\frac{N_1 N_2 \Sigma}{d} = 5.03 \cdot 10^{-4}\ \text{H} \quad .$$

Durante il periodo in cui la corrente si riduce a zero il flusso concatenato col secondo solenoide varia dal valore $\Phi_{1,2} = Mi$ al valore zero; per la (6.7)

$$R = -\frac{\Delta\Phi}{q} = \frac{Mi}{q} = 8\ \Omega \quad .$$

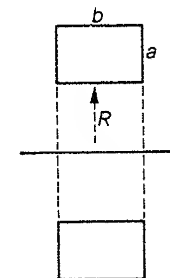
Nella pratica la legge di Felici è spesso usata in modo inverso: nota R e misurata q, dalla variazione di flusso è possibile risalire alla conoscenza di B.

6.26. ***Su un solenoide toroidale a sezione rettangolare ($a = 4$ cm, $b = 6$ cm) di raggio interno $R = 5$ cm sono avvolte $N = 500$ spire. Lungo l'asse di simmetria del solenoide è disposto un filo rettilineo percorso da una corrente variabile secondo la legge $i = i_0 \cos\omega t$ con $i_0 = 50$ A e $\omega = 2.5 \cdot 10^3$ rad/s.***

Calcolare il coefficiente di mutua induzione del sistema e la corrente indotta i' nel solenoide, ammesso che la resistenza dell'avvolgimento sia trascurabile. Se il filo viene piegato in modo da formare una spira circolare concatenata col solenoide calcolare il nuovo valore del coefficiente di mutua induzione.

Per i simboli usati nel testo riguardo al solenoide si veda la figura del problema 5.26; dal problema 5.8 prendiamo la relazione (a) allo scopo di eseguire il calcolo del coefficiente di mutua induzione tra filo e solenoide. Infatti per ciascuna spira la disposizione geometrica è identica a quella vista nel detto problema; adesso, essendoci N spire, i risultati vanno moltiplicati per N:

$$M = \frac{\mu_0 b N}{2\pi}\log\frac{R+a}{R} = 3.53 \cdot 10^{-6}\ \text{H} \quad .$$



Il flusso attraverso il solenoide, dovuto al campo prodotto dal filo, varia nel tempo secondo la legge

$$\Phi = Mi = Mi_0\cos\omega t = 1.77 \cdot 10^{-4}\cos\omega t \quad \text{Wb}$$

e la f.em. indotta nel solenoide vale

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega M i_0 \operatorname{sen}\omega t = 0.44 \operatorname{sen}\omega t \quad \text{V}$$

Essa è sfasata di $\pi/2$, ovvero è in quadratura, rispetto al flusso e quindi alla corrente che circola nel filo: è nulla quando il flusso è massimo o minimo, è massima o minima quando il flusso è nullo. Detta R_0 la resistenza del solenoide e i' la corrente in esso indotta, si dovrebbe scrivere $\mathscr{E} - L\,di'/dt = R_0 i'$; se però R_0 è trascurabile abbiamo che la corrente indotta obbedisce all'equazione

$$\frac{di'}{dt} = \frac{\mathscr{E}}{L} = \frac{\omega M i_0}{L}\operatorname{sen}\omega t \quad \Rightarrow \quad i' = -\frac{M i_0}{L}\cos\omega t = -\frac{M}{L}\,i \quad ;$$

essa varia proporzionalmente alla corrente nel filo, però con fase opposta (quando essa è minima l'altra è massima e viceversa). Dalla relazione (b) del problema 5.26 ricaviamo che M/L vale $1/N$ e pertanto

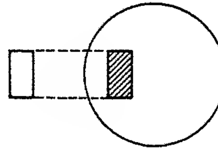
$$i' = -\frac{i_0}{N}\cos\omega t = -0.1\cos\omega t\ \text{A} \quad .$$

Notiamo esplicitamente che gli effetti di autoinduzione non sono trascurabili, anzi giocano un ruolo fondamentale, come è del resto quasi sempre vero in sistemi contenenti solenoidi anche se le resistenze non sono nulle.

Quando invece del filo rettilineo abbiamo una spira concatenata col solenoide conviene sfruttare la simmetria di M e calcolarlo dal flusso $\Phi_{2,1}$ prodotto dal solenoide e concatenato con la spira. Secondo la figura $\Phi_{2,1}$ coincide

col flusso attraverso una sola delle spire del solenoide, in quanto il campo esterno si può considerare nullo. Utilizzando la relazione (a) del problema 5.26 divisa per N abbiamo

$$M = \frac{\mu_0 N b}{2\pi} \log \frac{R+a}{R} \quad ,$$



risultato identico a quello del caso con il filo rettilineo. In effetti, sia quando c'è il filo indefinito che immaginiamo chiuso su se stesso lungo una semicirconferenza di raggio infinito, sia quando c'è la spira circolare finita, il flusso che il solenoide produce attraverso il circuito concatenato è lo stesso. Quando si afferma che M dipende dalla geometria del sistema ci si riferisce alla geometria relativa al flusso concatenato, cioè ai punti in cui **B** è diverso da zero, che è la sola importante.

6.27. ***Due solenoidi, di coefficienti di autoinduzione L_1 e L_2, sono connessi in serie tra loro. Il coefficiente di mutua induzione tra essi è M. Calcolare il coefficiente di autoinduzione equivalente che essi presentano se considerati come un unico sistema. In particolare studiare il caso di $L_1 = 0.5$ H, $L_2 = 0.8$ H, $M = 0.6$ H.***

Al passaggio di una corrente variabile attraverso il sistema si sviluppa ai capi di ciascun solenoide una f.em. indotta dovuta sia all'autoflusso che al flusso concatenato dall'altro solenoide, variabili entrambi con $\imath$. In totale la f.em. indotta vale

$$L_1 \frac{d\imath}{dt} \pm M \frac{d\imath}{dt} + L_2 \frac{d\imath}{dt} \pm M \frac{d\imath}{dt} = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{d\imath}{dt} \quad .$$

Il segno dipende dal verso dei flussi concatenati, ma è lo stesso per i due solenoidi. L'insieme si comporta come un unico induttore con coefficiente di autoinduzione

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M \quad .$$

Nel caso numerico proposto $L^+ = 2.5$ H, $L^- = 0.1$ H. Vediamo come a seconda del segno di M si possa accentuare o ridurre notevolmente l'autoinduzione.

Si dimostra che in generale tra i coefficienti L_1, L_2 e M sussiste la relazione $L_1 L_2 \geq M^2$ che usualmente viene scritta $|M| = K(L_1 L_2)^{1/2}$ con $0 \leq K \leq 1$; a K si dà il nome di coefficiente di accoppiamento. È facile verificare che è sempre $L_1 + L_2 \geq 2(L_1 L_2)^{1/2}$, l'eguaglianza valendo solo se $L_1 = L_2$. Perciò in tal caso sarebbe possibile annullare il comportamento induttivo se K valesse 1. Ciò è difficilmente realizzabile; nella pratica è sempre $K < 1$, $L_1 + L_2 > 2K(L_1 L_2)^{1/2}$ e non è possibile annullare L_{eq}.

6.28. ***Due spire, una con $L_1 = 0.1$ H, l'altra con $L_2 = 0.5$ H e $R_2 = 0.2\ \Omega$, sono poste una vicino all'altra. Nella prima spira circola una corrente $\imath_1 = 5$ A. Si osserva che quando $\imath_1$ viene interrotta nella seconda spira passa una carica $q = 10^{-3}$ C. Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra le due spire.***

Possiamo utilizzare la (6.7): la variazione complessiva di flusso nella seconda spira è dovuta alla variazione del flusso concatenato dalla prima, che passa da $M\imath_1$, a zero, e alla variazione dell'autoflusso, che però in totale è nulla ($\imath_2$ vale zero all'inizio e alla fine del processo). Quindi

$$q = \frac{M\imath_1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{R_2 q}{\imath_1} = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{H} \quad .$$

Si può anche ricorrere esplicitamente alla f.em. indotte: nella seconda spira abbiamo $\mathscr{E}_2 - L_2 \frac{d\imath_2}{dt} = R_2 \imath_2$ con $\mathscr{E}_2 = -M \frac{d\imath_1}{dt}$. Si moltiplica per dt e si integra:

$$-M \int_{\imath_1}^{0} d\imath_1 - L_2 \int_0^0 d\imath_2 = R_2 \int_0^\infty \imath_2 dt \quad \Rightarrow \quad M\imath_1 = qR_2 \quad ;$$

il secondo integrale è nullo perché $\imath_2$ è nulla all'inizio e alla fine

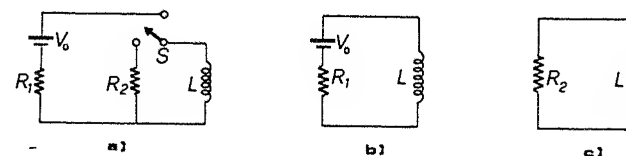
Il coefficiente di accoppiamento definito nel problema 6.27 vale

$$K = \frac{M}{(L_1 L_2)^{1/2}} = 1.79 \cdot 10^{-4} \quad ,$$

le due spire sono poco accoppiate.

6.29. ***Nel circuito in figura all'istante $t = 0$ l'interruttore S viene chiuso nella posizione A. Una volta raggiunta la condizione di regime esso viene spostato in un tempo trascurabile nella posizione B. Dare l'andamento nel tempo della corrente attraverso l'induttore se $V_0 = 100$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $L = 5$ H. Determinare inoltre nella prima connessione l'espressione dell'energia spesa dal generatore e verificare che, avvenuta la chiusura nella posizione B, nel resistore R_2 viene dissipata tutta l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore.***

Nelle due diverse connessioni il circuito può schematizzarsi come nelle figure b e c.



Nel primo caso, all'istante generico t in cui la corrente ha il valore i, la legge di Ohm si scrive

$$V_0 - L\frac{di}{dt} = R_1 i \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{V_0 - R_1 i} = \frac{dt}{L} \quad .$$

Si integra con la condizione iniziale $i = 0$ per $t = 0$ e si ottiene

$$i = \frac{V_0}{R_1}\left(1 - e^{-R_1 t/L}\right) \quad .$$

La corrente cresce da zero al valore asintotico $i_\infty = V_0/R_1$ con costante di tempo $\tau_1 = L/R_1$; il valore i_∞ corrisponde alla corrente che circolerebbe istantaneamente nel circuito se fosse $L = 0$. La presenza di un induttore impedisce una variazione istantanea di corrente; esso smorza lo stabilirsi del regime permanente, in teoria impedendone il raggiungimento se non in un tempo infinito, in pratica facendolo raggiungere dopo qualche costante di tempo (si riguardino sotto questo aspetto i risultati dei problemi 6.8 e 6.9).

L'espressione dell'energia spesa dal generatore si può ottenere dalla legge di Ohm moltiplicando per $i\,dt$ e integrando:

$$V_0 i\,dt = L i\,di + R_1 i^2 dt \quad \Rightarrow \quad W_{gen} = \frac{1}{2} L i_\infty^2 + W_R \quad :$$

una parte dell'energia erogata va in energia intrinseca della corrente, un'altra viene dissipata per effetto Joule sulla resistenza R_1.

Nel caso numerico proposto $\tau_1 = L/R_1 = 0.25$ s, $i_\infty = V_0/R_1 = 5$A, $i = 5(1 - e^{-4t})$ A. In pratica già dopo un secondo la corrente raggiunge il valore di regime.

Quando si chiude l'interruttore nella posizione B possiamo supporre che la corrente vada a zero istantaneamente nel circuito comprendente il generatore: ciò non è invece possibile nella maglia R_2L, a causa della presenza dell'induttore. L'equazione del circuito, non essendoci generatori, è ora

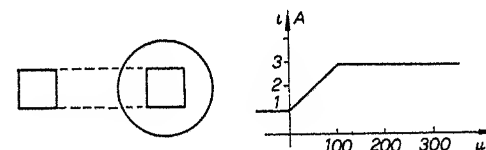
$$L\frac{di}{dt} + R_2 i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = i_\infty\, e^{-R_2 t/L} = 5\, e^{-6t} \quad \text{A} \quad ,$$

data la condizione iniziale $i = i_\infty$ per $t = 0$; la corrente decresce esponenzialmente con costante di tempo $\tau_2 = L/R_2 = 0.17$ s. L'energia dissipata su R_2 vale

$$W_R = \int_0^\infty R_2 i^2 dt = R_2 i_\infty^2 \int_0^\infty e^{-2R_2 t/L}\, dt = \frac{1}{2} L i_\infty^2 \quad ,$$

cioè proprio l'energia magnetica posseduta dall'induttore.

6.30. *Un solenoide toroidale a sezione quadrata di lato $a = 5$ cm, con raggio interno $r = 5$ cm, ha resistenza $R = 1.692\ \Omega$. Se lo si collega a un generatore di resistenza interna nulla si osserva che la corrente raggiunge il valore di regime con una costante di tempo $\tau = 368.7$ μs. Fatta questa misura si lascia il solenoide aperto e lo si concatena a una spira in cui passa una corrente variabile nel tempo secondo il grafico in figura. Calcolare il valore della tensione che si misura ai capi del solenoide.*



La tensione indotta è $\mathscr{E} = M\, di/dt$; dal grafico risulta $di/dt = \Delta i/\Delta t = 2 \cdot 10^4$ A/s. Resta da calcolare M che ricaviamo dal problema 6.26:

$$M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \log\frac{r+a}{r} = 6.93 \cdot 10^{-9}\, N \text{ H} \quad .$$

Il numero di spire del solenoide si ricava dal dato sulla costante di tempo: è $L = R\tau$ e anche, problema 5.26, $L = \dfrac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \log\dfrac{r+a}{r} = NM$.

Pertanto:

$$6.93 \cdot 10^{-9} N^2 = R\tau \quad \Rightarrow \quad N = 300 \text{ spire} \quad .$$

Segue $M = 2.08 \cdot 10^{-6}$ H e $\mathscr{E} = 4.16 \cdot 10^{-2}$ V; la tensione è costante in quanto la variazione di corrente nella spira è lineare nel tempo.

* * *

CAPITOLO 7

PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA

7a. I corpi materiali, posti in un campo magnetico, in generale si magnetizzano, acquistando un momento magnetico per unità di volume detto *magnetizzazione* **M**. La comparsa di tale momento macroscopico è attribuita all'instaurarsi di un sistema di *correnti atomiche*, chiamate anche *amperiane*, la cui densità all'interno del corpo è legata alla magnetizzazione dalla relazione

$$\mathbf{j}_a = \mathrm{rot}\,\mathbf{M} \quad . \tag{7.1}$$

Sulla superficie esterna del corpo magnetizzato risulta presente una corrente la cui densità lineare (vedi problema 5.17) è data da

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n \quad ; \tag{7.2}$$

$\mathbf{u}_n$ è il versore della normale alla superficie, orientata verso l'esterno. Le equazioni (7.1-7.2) equivalgono alle (3.1) viste nella teoria dei dielettrici. Se la magnetizzazione è uniforme, cioè se **M** è costante, il rotore di **M** è nullo e le correnti sono solo superficiali; altrimenti esse sono distribuite anche all'interno del corpo magnetizzato.

Il campo magnetico **B** in presenza di corpi magnetizzati deve pertanto essere calcolato a partire dalle *correnti di conduzione macroscopiche* che percorrono i conduttori e dalle *correnti amperiane microscopiche* situate entro i corpi stessi; la (5.1) va scritta in modo completo come

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_a) \quad . \tag{7.3}$$

Attraverso la (7.1) è possibile definire il vettore

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad , \tag{7.4}$$

per cui la (7.3) diviene

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}_c \quad . \tag{7.5}$$

In forma integrale le relazioni (7.3) e (7.5) si scrivono

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i_c + \mu_0 \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad , \tag{7.6}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_c \quad . \tag{7.7}$$

Resta invece invariata, anche in presenza di corpi magnetizzati, la proprietà fondamentale del campo magnetico **B** di essere ovunque solenoidale:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \quad , \quad \Phi_\Sigma(\mathbf{B}) = \oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = 0 \quad , \qquad (7.8)$$

rispettivamente in termini differenziali e integrali.

La prima delle (7.8) e la (7.5), insieme con la definizione (7.4) che riscriviamo come

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad , \qquad (7.9)$$

costituiscono le *equazioni di Maxwell valide per la magnetostatica* in presenza di circuiti percorsi da corrente e di corpi magnetizzati.

7b. Per arrivare alla soluzione delle equazioni della magnetostatica occorre un'ulteriore relazione, che possiamo chiamare *equazione di stato*, la quale colleghi **M** ad **H** o a **B**. Sotto questo aspetto le sostanze materiali possono dividersi in tre categorie.

1) *Sostanze diamagnetiche*

La magnetizzazione risulta proporzionale al campo **H** secondo un fattore costante, detto *suscettività magnetica* χ_m, *negativa* e in modulo assai inferiore all'unità (~ 10^{-5} per solidi e liquidi, ~ 10^{-8} per i gas):

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad ; \qquad (7.10)$$

questa relazione è valida in realtà per sostanze omogenee e isotrope.

2) *Sostanze paramagnetiche*

Vale ancora la (7.10); χ_m è però *positiva*, pur restando in modulo dello stesso ordine di grandezza visto per le sostanze diamagnetiche. Inoltre χ_m dipende dalla temperatura assoluta T secondo la *legge di Curie-Langevin*:

$$\chi_m \frac{T}{\varrho} = C \quad ; \qquad (7.11)$$

ϱ è la densità della sostanza, C è una costante, variabile da sostanza a sostanza, detta *costante di Curie*. Avvertiamo però che non tutte le sostanze paramagnetiche seguono la (7.11); per esempio il paramagnetismo di molti metalli è indipendente dalla temperatura.

3) *Sostanze ferromagnetiche*

Non è possibile dare per tali sostanze una relazione analitica del tipo (7.10), anzi in generale alcuna relazione analitica esplicita. Il legame tra **M** e **H** non è univoco, dipendendo essenzialmente dalla *storia del materiale*. Per ogni sostanza viene allora dato una diagramma sperimentale della funzione $M = M(H)$, o di $B = B(H)$ tramite (7.9), il cosiddetto *ciclo di isteresi*, che illustra graficamente la relazione cercata. Ad ogni modo si può scrivere formalmente per tutte le sostanze

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0 \varkappa_m \mathbf{H} \quad . \qquad (7.12)$$

A $\varkappa_m$ si dà il nome di *permeabilità magnetica relativa*; essa è costante, entro i limiti visti, per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche e in tal caso la (7.12) è di effettiva utilità. Invece, per i materiali ferromagnetici, $\varkappa_m$ è una funzione plurivoca, non esprimibile analiticamente, del campo **H** e la (7.12) non ha utilità pratica, se non in qualche caso particolare.

7c. Abbiamo visto che sulla superficie di separazione tra due dielettrici vi è un eccesso di carica di polarizzazione di un certo segno in corrispondenza alla discontinuità del vettore **P**, da cui risultano le discontinuità dei vettori **E** e **D** date dalle formule (3.8). Analogamente, sulla superficie di separazione tra due diversi mezzi magnetizzati non si ha in generale una compensazione con risultante nulla delle correnti amperiane superficiali, in quanto il vettore **M** non è continuo nel passaggio da un mezzo all'altro. Ricordiamo dal problema 5.17 che la presenza di uno strato superficiale di corrente comporta una discontinuità nella componente tangenziale di **B**. L'entità delle discontinuità di **B** e di **H** si ricava dalle equazioni di Maxwell e da (7.12) nell'ipotesi che non ci siano correnti superficiali di conduzione ($\mathbf{j}_c = 0$) e i risultati sono:

$$B_{1n} = B_{2n} \;,\; \varkappa_{m,2} B_{1t} = \varkappa_{m,1} B_2 \;.\; \varkappa_{m,1} H_{1n} = \varkappa_{m,2} H_{2n} \;,\; H_{1t} = H_{2t} \;. \qquad (7.13)$$

Notiamo qui che è la presenza di superficie di discontinuità (tra mezzi omogenei e isotropi) che crea modificazioni nel campo **H**; se lo spazio fosse vuoto o riempito completamente da un mezzo omogeneo e isotropo, **H** sarebbe eguale nei due casi. L'introduzione di un campione di materiale magnetico in un campo **H** crea perciò un'alterazione del campo stesso, se però il campione è piccolo si può assumere che il campo **H** resti invariato. Naturalmente ciò è vero con ottima approssimazione per campioni paramagnetici e diamagnetici, mentre per un campione ferromagnetico occorre che le dimensioni siano estremamente ridotte. È avendo in mente questa approssimazione che va interpretata nei testi dei problemi la frase «si può trascurare l'effetto magnetizzante»; in termini pratici ciò vuol dire che come campo **H** da usare nella determinazione di **M** basta prendere quello nel vuoto.

7d. Un metodo approssimato di risoluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di materiali ferromagnetici è quello del *circuito magnetico*. Si dà questo nome ad un insieme di uno o più materiali ferromagnetici, già magnetizzati o sui quali si trovi un avvolgimento percorso da corrente, costituenti un

circuito chiuso o con al più qualche piccola interruzione formata da mezzi non ferromagnetici. Si suppone inoltre che:

1) le linee di **B** siano tutte all'interno dei mezzi ferromagnetici (a parte naturalmente le piccole interruzioni di cui sopra), parallele tra loro e all'asse del circuito; si trascura così il flusso disperso e ci si limita ai casi in cui le dimensioni trasversali siano piccole rispetto a quelle longitudinali;
2) la permeabilità magnetica relativa χ_m sia costante in ciascuno dei vari mezzi.

L'espressione che permette il calcolo del flusso di **B**, ed eventualmente di **B** stesso, è la *legge di Hopkinson*

$$\Phi = \frac{Ni}{R} \quad ; \tag{7.14}$$

Φ è il flusso di **B** attraverso una generica sezione Σ del circuito magnetico, N il numero di spire dell'avvolgimento percorso dalla corrente i, R una grandezza caratteristica del particolare circuito, detta *riluttanza magnetica* e definita dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \mu_0 \int_{\Sigma} \frac{\varkappa_m d\Sigma}{l} \quad , \tag{7.15}$$

dove l è la lunghezza del circuito magnetico, a rigore diversa nei diversi punti della sezione. L'analogia formale con la legge di Ohm per un circuito chiuso ($\mathscr{E} \rightarrow Ni$, $i \rightarrow \Phi$, resistenza$\rightarrow$riluttanza) permette l'estensione della (7.14) a rami in serie o in parallelo.

7e. Il problema del calcolo dell'energia magnetica nel caso più generale, cioè in presenza di circuiti elettrici e di corpi magnetizzati, è complicato dall'esistenza del ferromagnetismo. Partendo da un'espressione del tipo (5.23) è possibile dimostrare (¹) che l'energia richiesta per unità di volume allo scopo di produrre una variazione **dB** del campo magnetico è

$$dw = \mathbf{H} \cdot \mathbf{dB}. \tag{7.16}$$

Per una variazione finita del campo magnetico dal valore zero ad un certo valore finale abbiamo, rispettivamente per la densità d'energia e per l'energia,

$$w = \int_0^B \mathbf{H} \cdot \mathbf{dB} \quad , \quad W = \int_0^B \int_{\tau} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{dB})\, d\tau \tag{7.17}$$

essendo τ il volume a cui è estesa l'integrazione.

Per i materiali diamagnetici e paramagnetici l'uso di (7.12) dà

$$w = \mu_0 \varkappa_m \frac{H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \varkappa_m} = \frac{HB}{2} \quad , \tag{7.18}$$

(¹) A Rostagni, Fisica Generale, UTET 1978, Vol II, pg 290

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\tau} \varkappa_m H^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\tau} \frac{B^2}{\varkappa_m} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} HB d\tau \quad . \tag{7.19}$$

In presenza di materiali ferromagnetici le integrazioni in **B** nelle formule (7.17) vanno eseguite graficamente. Inoltre per un processo ciclico l'esistenza del fenomeno dell'isteresi, cioè il non ripercorrere nel piano H, B o H, M la stessa curva a seconda che **H** cresca o diminuisca, comporta una perdita di energia che, per unità di volume del campione, è data proprio dall'area A del ciclo nel piano H, B:

$$w_{\tau} = \int_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{dB} = \mu_0 \int_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot (\mathbf{dH} + \mathbf{dM}) = \mu_0 \int_{\text{ciclo}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{dM} \quad . \tag{7.20}$$

Tale energia si ritrova sotto forma di calore: nel processo il campione si riscalda.

Per il calcolo di forze, momenti e lavori dall'energia magnetica valgono le considerazioni fatte nel paragrafo 5f; per esempio, un materiale magnetizzato libero di muoversi in un campo **B** si porta dove l'energia magnetica è massima.

7f. La maggior parte delle sostanze materiali non presenta momenti magnetici atomici o molecolari diversi da zero; ciò è dovuto all'esatta compensazione dei momenti magnetici orbitali e di quelli legati allo spin degli elettroni. In tali sostanze l'unico effetto magnetico è costituito dal diamagnetismo I problemi 7.26 e 7.27 sono dedicati a una schematizzazione dell'interpretazione microscopica del fenomeno.

Le sostanze nelle quali la suddetta compensazione non ha luogo presentano un *momento magnetico intrinseco* μ^*. In quelle paramagnetiche la teoria di Langevin prevede che la magnetizzazione sia data dall'espressione

$$M = M_s L(a) = n\mu^* L(a) \quad ; \tag{7.21}$$

M_s è detta magnetizzazione di saturazione, n è il numero di atomi o di molecole per unità di volume. $L(a)$, funzione di Langevin, verrà mostrata nella figura del problema 7.27; a noi basta sapere che per $a \ll 1$, $L(a) = a/3$ e che a è definita dalla relazione

$$a = \mu_0 \frac{\mu^* H_a}{KT} \quad , \tag{7.22}$$

dove $K = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K è la costante di Boltzmann, T è la temperatura assoluta e H_a è il valore del campo **H** effettivamente agente sul singolo atomo o molecola.

Non è invece possibile dare una spiegazione del ferromagnetismo basandosi su argomenti di fisica classica; e del resto, a rigore, occorrerebbe impiegare la meccanica quantistica anche per una trattazione coerente del diamagnetismo e del paramagnetismo.

7g. Le dimensioni delle nuove grandezze introdotte in questo capitolo sono:

magnetizzazione M	ampere/metro	A/m
campo H	ampere/metro	A/m
suscettività magnetica χ_m	adimensionale	
permeabilità magnetica relativa κ_m	adimensionale	
costante di Curie C	metro^3 Kelvin/Kg	m^{3}K/Kg
riluttanza magnetica R	henry^{-1}	H^{-1}

Come unità del campo **H** viene talvolta usato l'oersted; la relazione di conversione è

$$1 \text{ oersted} = \frac{10^3}{4\pi} \frac{\text{A}}{\text{m}} = 79.6 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad , \quad 1 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ oersted} \quad .$$

Si usa anche misurare la magnetizzazione in tesla: in tal caso si intende che il valore in A/m è stato moltiplicato per $4\pi \cdot 10^{-7}$, cioè per μ_0.

* * *

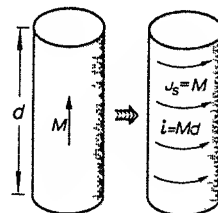
7.1. *Un cilindro di ferro, lungo* $d = 50$ cm *e di raggio* $R = 10$ cm, *è magnetizzato uniformemente, con magnetizzazione parallela all'asse e in modulo eguale a* $M = 5 \cdot 10^5$ A/m. *Determinare come varia il campo* **B** *generato da questo cilindro nei punti dell'asse e in particolare dare il valore numerico nel centro del cilindro. Calcolare la circuitazione di* **B**, **H** *e* **M** *lungo una linea chiusa* Γ_1 *che attraversa il cilindro in tutta la sua lunghezza e lungo un'altra linea chiusa* Γ_2 *che passa nel materiale solamente per metà della sua lunghezza.*

Essendo la magnetizzazione uniforme la densità di corrente amperiana è nulla entro il cilindro ($\text{rot}\,\mathbf{M} = 0$); la superficie laterale è invece sede di una corrente con densità lineare (7.2) $j_s = i/d = |\mathbf{M} \times \mathbf{u}_n| = M$. Di conseguenza il campo magnetico **B** generato da questo cilindro è eguale al campo generato da un nastro cilindrico di raggio R e altezza d percorso da una corrente di densità lineare $j_s = M$. Si possono allora usare i risultati dei problemi 5.27 e 5.30:
1) il campo in un punto P dell'asse vale

$$B = \mu_0 \frac{M}{2} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad ;$$

θ_1 e θ_2 sono gli angoli sotto cui dal punto P sono viste le estremità del cilindro;
2) il campo nel centro è

$$B_0 = \mu_0 M \frac{d}{(d^2 + 4R^2)^{1/2}} = 58.3 \cdot 10^{-2} \text{ T.}$$

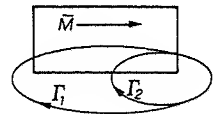


Il campo magnetico non è uniforme all'interno del cilindro; tende a divenire tale al tendere di d all'infinito, con valore limite $B_\infty = \mu_0 M = 62.8 \cdot 10^{-2}$ T.

Calcoliamo ora la circuitazione di **B** lungo le curve date, facendo ancora uso dei risultati del problema 5.30:

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i = \mu_0 M d = 31.4 \cdot 10^{-2} \text{ Tm} \quad ,$$

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \frac{Md}{2} = 15.7 \cdot 10^{-2} \text{ Tm} \quad .$$



Per **H** il risultato è immediato in quanto non ci sono correnti di conduzione:

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad .$$

Dalla definizione (7.4) o dalla (7.6) si ricava poi

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = Md = 2.50 \cdot 10^5 \text{ A} \quad , \quad \oint_{\Gamma_2} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Md}{2} = 1.25 \cdot 10^5 \text{ A} \quad .$$

7.2. *Il circuito magnetico in figura è costituito da due solenoidi con* $N_1 = 200$ *e* $N_2 = 1000$ *spire, percorsi dalle correnti* $i_1 = 100$ A *e* $i_2 = 50$ A, *e da due sbarre, di lunghezza* $h_3 = 50$ cm *e* $h_4 = 20$ cm, *uniformemente magnetizzate lungo il loro asse con magnetizzazione in modulo pari a* $M_3 = 6 \cdot 10^5$ A/m *e* $M_4 = 10^5$ A/m. *I versi dei campi magnetici entro i solenoidi e delle magnetizzazioni entro le sbarre sono mostrati nella figura. Calcolare la circuitazione di* **H** *e di* **B** *lungo la linea chiusa* Γ. *Si assuma che la presenza contemporanea dei quattro elementi non crei perturbazioni in alcuno di essi.*

Indichiamo con $\mathbf{B}_i$ e $\mathbf{H}_i$ i campi generati da ognuno dei singoli elementi. Per calcolare le circuitazioni facciamo uso del principio di sovrapposizione:

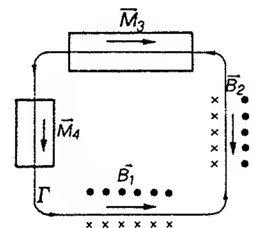
$$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_1^4{}_i \oint_\Gamma \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l} \quad ,$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum_1^4{}_i \oint_\Gamma \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} \quad .$$

L'applicazione del teorema di Ampère, nelle forme (5.2) e (7.7), dà:

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = N_1 i_1 \quad , \quad \oint_\Gamma \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = -N_2 i_2 \quad ,$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N_1 i_1 \quad , \quad \oint_\Gamma \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 N_2 i_2 \quad .$$



D'altra parte, per i risultati del problema 7.1,

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}_3 \cdot d\mathbf{l} = \oint_\Gamma \mathbf{H}_4 \cdot d\mathbf{l} = 0 \ , \ \oint_\Gamma \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 M_3 h_3 \ , \ \oint_\Gamma \mathbf{B}_4 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 M_4 h_4$$

In totale, sommando i vari risultati,

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_1 i_1 - N_2 i_2 = -3 \cdot 10^4 \text{ A} \ ,$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (N_1 i_1 - N_2 i_2 - M_3 h_3 + M_4 h_4) = -0.39 \text{ Tm} \ .$$

7.3. ***Ricavare i valori dei campi* H *e* B *all'interno di cavità eguali a quelle considerate nel problema* 3.21 *e praticate in un mezzo uniformemente magnetizzato.***

Notiamo che in assenza di cariche libere e correnti di conduzione le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica e per la magnetostatica sono identiche da un punto di vista matematico: precisamente, detti **U** e **V** due vettori ausiliari, esse si scrivono:

$$\text{div}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = 0 \qquad , \qquad \text{rot } \mathbf{U} = 0 \ .$$

In elettrostatica $\mathbf{U} = \mathbf{E}$, $\mathbf{V} = \mathbf{P}/\varepsilon_0$, in magnetostatica $\mathbf{U} = \mathbf{H}$, $\mathbf{V} = \mathbf{M}$. Nel problema 3.21 abbiamo visto le soluzioni per i casi considerati; adesso, con la semplice trasposizione $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$, $\mathbf{P}/\varepsilon_0 \to \mathbf{M}$, otteniamo la soluzione voluta. Quindi:

1) cavità parallela alle linee di **B** $\qquad \mathbf{H}_c = \mathbf{H} \qquad$ (a)

2) cavità ortogonale alle linee di **B** $\qquad \mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \mathbf{M} \qquad$ (b)

3) cavità sferica $\qquad \mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \dfrac{\mathbf{M}}{3} \qquad$ (c)

se con $\mathbf{H}_c$ indichiamo il campo nella cavità e con **H** il campo all'interno del mezzo. Se ora utilizziamo (7.9) e il fatto che nella cavità $\mathbf{M} = 0$, otteniamo per **B**:

1) $\mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}_c = \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}$ $\qquad$ (d)

2) $\mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}_c = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}$ $\qquad$ (e)

3) $\mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{H}_c = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \dfrac{\mathbf{M}}{3}\right) = \mathbf{B} - \dfrac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}$. $\qquad$ (f)

Dalla relazione (e) si vede come una misura di **B** nella cavità ortogonale dia il valore del campo magnetico entro il mezzo magnetizzato; invece una misura di **B** nella cavità parallela dà, secondo la (d), $\mu_0 \mathbf{H}$ e quindi serve a conoscere il valore del campo **H** entro il mezzo magnetizzato. Ricordiamo che gli strumenti di misura magnetici sono sensibili a **B** e non a **H**.

Procedendo in senso inverso a quello del problema 3.21 è semplice verificare applicando il principio di sovrapposizione che, dato un campo magnetico uniforme, entro una sbarra lunga e sottile parallela alle linee di **B** oppure entro un disco ortogonale a **B** oppure entro una sfera il campo **H** vale rispettivamente

$$\mathbf{H}_{in} = \mathbf{H}_{est} \quad , \quad \mathbf{H}_{in} = \mathbf{H}_{est} - \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{H}_{in} = \mathbf{H}_{est} - \frac{\mathbf{M}}{3} \ ,$$

mentre da queste e dalla (7.9) per il campo **B** si ha nei tre casi

$$\mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_{est} + \mu_0 \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_{est} \quad , \quad \mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_{est} + \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M} \ .$$

I risultati ottenuti possono essere formulati in modo generale, per cavità e per campioni di forma generica, scrivendo rispettivamente

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H} + \gamma \mathbf{M} \quad , \quad \mathbf{H}_{in} = \mathbf{H}_{est} - \lambda \mathbf{M} \ .$$

I due coefficienti, legati a caratteristiche geometriche, si chiamano *fattore di magnetizzazione* (γ) e *di smagnetizzazione* (λ) (¹). Procedendo analogamente per il campo **B** si definiscono due fattori Γ e Λ e si trova $\Gamma = 1 - \gamma$, $\Lambda = 1 - \lambda$. Per i materiali paramagnetici e ferromagnetici γ e λ sono positivi, invece per quelli diamagnetici sono negativi.

7.4. ***Una lastra indefinita, a facce piane e parallele, è posta ortogonalmente alle linee di un campo magnetico* B*, uniforme e costante, di modulo* $B = 1$ T. *Calcolare i valori dei campi B, H, M entro la lastra nei due casi in cui questa sia costituita da un materiale paramagnetico* ($\chi_m = 1.0 \cdot 10^{-4}$) *o diamagnetico* ($\chi_m = -0.7 \cdot 10^{-4}$) *e dare il fattore di smagnetizzazione* λ*, definito nel problema* 7.3.**

A causa della particolare geometria i campi **B**, **H**, **M** sono paralleli tra loro e ortogonali alle due superficie di discontinuità costituite dalle facce della lastra. All'esterno $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{B}_{est} = \mu_0 \mathbf{H}_{est}$ e quindi, in modulo, $H_{est} = B_{est}/\mu_0 = 795.77 \cdot 10^3$ A/m. Le relazioni di discontinuità (7.13) danno:

$$\mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_{est} \quad , \quad \mathbf{H}_{in} = \frac{1}{\varkappa_m} \mathbf{H}_{est}$$

(i campi sono esclusivamente normali). Per la magnetizzazione si ottiene da (7.10):

(¹) Si confronti col problema 3.18

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_{in} = (\varkappa_m - 1)\mathbf{H}_{in} = \mathbf{H}_{est} - \mathbf{H}_{in} \quad ,$$

mentre l'espressione del fattore di smagnetizzazione è

$$\lambda = \frac{\mathbf{H}_{est} - \mathbf{H}_{in}}{\mathbf{M}} \quad .$$

In conclusione, se la lastra è paramagnetica $\varkappa_m$ è maggiore di 1, $H_{in} < H_{est}$ e $\mathbf{M}$ è parallelo e concorde a $\mathbf{H}_{in}$; se invece la lastra è diamagnetica $\varkappa_m$ è minore di 1, $H_{in} > H_{est}$, e $\mathbf{M}$ è parallelo e discorde a $\mathbf{H}_{in}$. In entrambi i casi $\lambda > 0$. Numericamente l'effetto è esiguo:

a) $H_{in} = 795.69 \cdot 10^3 \dfrac{\text{A}}{\text{m}} \quad , \quad M = 79{,}6 \dfrac{\text{A}}{\text{m}} \quad , \quad \lambda = +1 \quad ;$

b) $H_{in} = 795.82 \cdot 10^3 \dfrac{\text{A}}{\text{m}} \quad , \quad M = 55{,}7 \dfrac{\text{A}}{\text{m}} \quad , \quad \lambda = +1 \quad .$

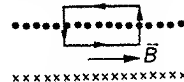
Notiamo, applicando per esempio (7.18), che l'energia magnetica diminuisce rispetto al vuoto se la lastra è paramagnetica in quanto $1/2\ BH_{in} < 1/2\ BH_{est}$; invece l'energia aumenta se la lastra è diamagnetica. Per quest'ultima allora la posizione ortogonale al campo magnetico esterno è di equilibrio mentre ciò non è vero per la lastra paramagnetica che tenderebbe piuttosto a disporsi parallela a $\mathbf{B}$.

La configurazione vista è ideale in quanto la lastra è indefinita. Con un disco di dimensioni finite le conclusioni restano qualitativamente corrette, però la magnetizzazione non sarebbe certamente uniforme; inoltre il campo $\mathbf{B}$ sarebbe alterato, se pure di poco.

7.5. ***Un solenoide molto lungo ha un avvolgimento con $n = 10$ spire/cm disposto su di un nucleo di ferro; il raggio del nucleo è $R = 2$ cm. Il solenoide è percorso da una corrente continua $i = 1$ A; in tali condizioni si assuma che la permeabilità relativa del ferro valga $\chi_m = 10^3$. Calcolare il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza del solenoide e la densità lineare della corrente amperiana superficiale nel nucleo di ferro.***

Consideriamo indefiniti ai fini del calcolo solenoide e nucleo; i vettori $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$ sono paralleli tra loro e all'asse del solenoide e diversi da zero solo all'interno di questo. Il campo $\mathbf{H}$ è dato in modulo da

$$H = ni = 10^3 \ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad , \qquad \text{(a)}$$



come si ricava applicando (7.7) ad un rettangolo contenuto in parte entro il solenoide (vedi figura). Il campo $\mathbf{B}$ vale in modulo

$$B = \mu_0 \varkappa_m H = 1.26 \ \text{T}$$

e nel volume corrispondente all'unità di lunghezza si trova immagazzinata l'energia magnetica (7.19)

$$W_l = \frac{1}{2} \ HB\pi R^2 = 0.79 \ \frac{\text{J}}{\text{m}} \quad .$$

Secondo (5.26) il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza risulta

$$L = \frac{2W_l}{i^2} = 1.58 \ \frac{\text{H}}{\text{m}} \quad .$$

Esprimendo H e B in funzione della corrente l'espressione di L diviene

$$L = \mu_0 \varkappa_m n^2 \Sigma \qquad \text{(b)}$$

con $\Sigma = \pi R^2$. Rispetto al valore in assenza del nucleo di ferro, dato dalla (e) del problema 5.27, c'è un aumento di un fattore $\varkappa_m$. Si vede così l'utilità dell'introduzione del ferro: a parità del valore di L che si vuole ottenere il volume occupato e il numero di spire possono essere notevolmente inferiori. Ad esempio, volendo conservare lo stesso raggio, per ottenere nel vuoto lo stesso valore di L dovrebbe essere $\mu_0 \varkappa_m^{1/2} n\, \Sigma = \mu_0 n'^2 \Sigma$ e la densità di spire necessaria risulterebbe $n' = \varkappa_m^{1/2} n \simeq 316$ spire/cm.

L'aumento del valore di L è dovuto fisicamente al fatto che il ferro, con l'orientazione concorde dei dipoli magnetici elementari, contribuisce alla creazione del campo magnetico (le correnti amperiane nel ferro sommano il loro effetto a quello delle correnti di conduzione). Ma un elevato valore di $\mathbf{B}$ vuol dire autoflusso elevato ovvero, in base alla (5.20), coefficiente L più grande, a parità di corrente di conduzione che percorre la bobina.

Valutiamo infine l'apporto delle correnti amperiane. Poiché siamo in presenza di magnetizzazione uniforme, queste sono esclusivamente superficiali; da (7.2) segue

$$j_s = M = \chi_m H = (\varkappa_m - 1)H = 999 \cdot 10^3 \ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad ,$$

rispetto alla densità lineare della corrente di conduzione

$$j_c = ni = 10^3 \ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

All'effetto globale la corrente di conduzione contribuisce con una parte su 10^3, mentre il resto è dato dal ferro; naturalmente non dimentichiamo che è j_c a indurre, per così dire, il processo magnetizzando il ferro.

7.6. ***Un filo rettilineo indefinito di raggio trascurabile è disposto sull'asse di una guaina cilindrica di ferro, pure indefinita, con raggio interno $R_1 = 1$ cm e raggio esterno $R_2 = 2$ cm; il filo è percorso da una corrente $i = 10$ A, la***

permeabilità relativa del ferro vale $\varkappa_m = 10^3$. Dare l'andamento in funzione di r, distanza dal filo, dei campi H, B, M e calcolare la distribuzione delle correnti amperiane nella guaina.

Il campo **H**, calcolato a partire dal teorema di Ampère (7.7) tenendo conto delle condizioni di simmetria del problema, vale in modulo in tutto lo spazio

$$H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{1.59}{r}\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

Le sue linee sono circonferenze ortogonali all'asse del sistema con verso legato a quello della corrente dalla solita convenzione della vite destrogira. Attraverso (7.12) si determina **B**: parallelo e concorde a **H** vale in modulo

$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi r} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{r}\ \text{T} \qquad 0 < r \leq R_1 \quad , \quad r \geq R_2 \quad ;$$

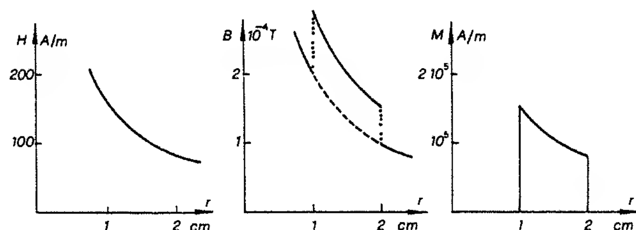
$$B = \mu_0 \varkappa_m \frac{i}{2\pi r} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{r}\ \text{T} \qquad R_1 \leq r \leq R_2 \quad .$$

Sulle superficie della guaina, per $r = R_1$ e $r = R_2$, il campo magnetico è discontinuo; si verifica subito l'accordo con (7.13) ricordando che qui **B** è esclusivamente tangenziale.

Infine il vettore **M** è diverso da zero solo entro la guaina, cioè per $R_1 < r < R_2$, dove ha direzione e verso eguali a quelli di **H** e **B** e vale in modulo

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = (\varkappa_m - 1)H = \frac{(\varkappa_m - 1)i}{2\pi r} = \frac{1.59 \cdot 10^3}{r}\frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

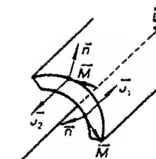
In figura è rappresentato l'andamento del modulo dei tre vettori in funzione di r; il tratto di curva di B tra 1 e 2 cm, cioè nel ferro, va immaginato 10^3 volte più alto rispetto alla linea tratteggiata.



Per quanto riguarda le correnti amperiane cominciano da quelle superficiali; in figura sono indicati i versi di $\mathbf{j}_1$ e $\mathbf{j}_2$, ricavati da (7.2); la direzione è quella dell'asse. In modulo

$$j_1 = M(R_1) = \frac{(\varkappa_m - 1)i}{2\pi R_1} = 1.59 \cdot 10^5\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad ,$$

$$j_2 = M(R_2) = \frac{(\varkappa_m - 1)i}{2\pi R_2} = 0.80 \cdot 10^5\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$



A queste densità diverse corrispondono però correnti eguali che scorrono parallelamente a i, i_1 concorde e i_2 discorde:

$$i_1 = j_1 2\pi R_1 = i_2 = j_2 2\pi R_2 = (\varkappa_m - 1)i = 9.99 \cdot 10^3\ \text{A} \quad .$$

Verifichiamo che tutto ciò è in accordo con quanto visto nella prima parte del problema. Le due correnti superficiali i_1 e i_2 corrispondono al secondo caso del problema 5.30: ciascuna di esse all'interno non genera alcun campo, mentre all'esterno dà il campo di un filo indefinito. Pertanto tra 0 e R_1 l'unico contributo è quello della corrente di conduzione; all'interno della guaina contribuiscono con lo stesso segno i e i_1 (quest'ultima assai di più, precisamente di un fattore $\varkappa_m - 1$ come visto nel problema 7.5); all'esterno del sistema gli effetti di i_1 e i_2 sono eguali ed opposti, per cui resta solo il contributo del filo.

È evidente da quanto detto che all'interno della guaina la densità della corrente amperiana deve essere nulla: basta considerare una guaina di spessore infinitesimo.

7.7. ***Un avvolgimento di $N = 500$ spire, percorse dalla corrente $i = 8$ A, è disposto su di una superficie toroidale circolare a sezione quadrata di area $\Sigma = 4$ cm² e lunghezza media $l = 132$ cm. Lo spazio interno a tale solenoide è completamente riempito dalla lega ferromagnetica isoperm con $\varkappa_m = 60$, costante per un largo intervallo di valore di H. Calcolare i valori dei campi B, H, M entro il solenoide nonché il flusso totale di B, il coefficiente L di autoinduzione, l'energia magnetica e il valore della corrente amperiana nel mezzo ferromagnetico.***

Le dimensioni trasversali del solenoide sono assai inferiori rispetto a quelle longitudinali, per cui assumiamo **B**, **H**, **M** costanti sulla sezione. Per le condizioni di simmetria le linee di questi campi, confinate entro il solenoide, sono circonferenze aventi come centro il centro del sistema. Da (7.7) è allora immediato che

$$H = \frac{Ni}{l} = 3.03 \cdot 10^3\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

Noto **H**, da (7.12) e (7.10) ricaviamo

$$B = \mu_0 \varkappa_m H = 22.8 \cdot 10^{-2}\ \text{T} \quad , \quad M = \chi_m H = (\varkappa_m - 1)H = 1.79 \cdot 10^5\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

Il flusso totale di **B** attraverso il solenoide, il coefficiente di autoinduzione e l'energia magnetica si scrivono

$$\Phi = NB\Sigma = 4.56 \cdot 10^{-2} \text{ Wb} \ , \ L = \frac{\Phi}{i} = 5.7 \cdot 10^{-3} \text{ H} \ , \ W = \frac{1}{2} Li^2 = 0.18 \text{ J}.$$

Una soluzione alternativa, nella forma più che nella sostanza, deriva dall'applicazione della legge di Hopkinson (7.14), cioè dal trattare il solenoide come un circuito magnetico. Da (7.15) si ha

$$\frac{1}{R} = \mu_0 \int_\Sigma \frac{\varkappa_m d\Sigma}{l} = \mu_0 \varkappa_m \frac{\Sigma}{l} \ , \qquad \text{(a)}$$

in quanto supponiamo l costante, vista la relativa piccolezza della sezione; perciò

$$R = 4.38 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Phi' = \frac{Ni}{R} = 9.13 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} \ .$$

Moltiplicando Φ' per N si ottiene il flusso Φ prima calcolato; dividendo invece Φ' per Σ si arriva a B e quindi successivamente a H e M. Sempre da (7.14) usando $\Phi = N\Phi' = Li$ e $W = 1/2\ Li^2$ si traggono le utili espressioni

$$L = \frac{N^2}{R} \ , \quad W = \frac{(Ni)^2}{2R} = \frac{R\Phi'}{2} = \frac{Ni\Phi'}{2} \ , \qquad \text{(b)}$$

che nel nostro caso danno naturalmente i valori trovati prima.

Una trattazione più rigorosa richiederebbe di tener conto delle variazioni di **B**, **H**, **M** sulla sezione e quindi di calcolare il flusso con una integrazione. Eseguiamo questo calcolo per avere un'idea dell'approssimazione adottata, con riferimento però al secondo metodo di soluzione. Analiticamente ciò vuol dire che occorre eseguire l'integrazione nella (a), cioè sommare gli infiniti contributi infinitesimi $\mu_0 \varkappa_m\ d\Sigma/l$; è come avere infiniti circuiti magnetici, ciascuno di raggio r, lunghezza $2\pi r$, sezione $d\Sigma = adr$, tutti in parallelo per cui l'inverso della riluttanza totale è la somma degli inversi delle singole riluttanze:

$$\frac{1}{R} = \mu_0 \varkappa_m \int_{R_1}^{R_2} \frac{a\,dr}{2\pi r} = \mu_0 \varkappa_m \frac{a}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1} \ . \qquad \text{(c)}$$

Con a indichiamo il lato della sezione, pari a 2 cm, mentre con R_1 e R_2 i raggi interno ed esterno; il raggio medio essendo $R_m = l/2\pi = 21$ cm, R_1 vale 20 cm e R_2 22 cm. Ne segue $R = 4.37 \cdot 10^7$ H^{-1}, praticamente coincidente con il valore medio prima calcolato. Di qui in poi si procede come visto per il calcolo di Φ', Φ, L, W. Quanto ad **H** e **B** i loro moduli sono

$$H = \frac{Ni}{2\pi r} \ , \quad B = \mu_0 \varkappa_m \frac{Ni}{2\pi r} \ , \quad R_1 \le r \le R_2 \ .$$

Vale la pena di notare come sia essenziale in (c) che $\varkappa_m$ sia costante. Infatti al variare di r variano **H** e **B**; se la relazione tra di essi non fosse lineare $\varkappa_m$ varierebbe anch'essa col raggio e occorrerebbe inserire nell'integrale anche la funzione $\varkappa_m(r)$, in generale non esprimibile analiticamente.

Per concludere calcoliamo il notevole contributo al valore di **B** dato dal mezzo ferromagnetico. Da

$$M = \chi_m H = \frac{(\varkappa_m - 1)B}{\mu_0 \varkappa_m}$$

si ricava per il valore della corrente amperiana superficiale

$$i_a = j_s l = Ml = \frac{\varkappa_m - 1}{\varkappa_m} \frac{Bl}{\mu_0} = \frac{Bl}{\mu_0} - \frac{Bl}{\mu_0 \varkappa_m} = N(i' - i)$$

dove $i' = Bl/N\mu_0$ è il valore della corrente che sarebbe necessaria nel vuoto per produrre lo stesso campo **B** che si ha invece con l'isoperm e con la corrente i. Numericamente $i' = 479$ A e $i_a = 23.6 \cdot 10^4$ A.

All'interno del mezzo non c'è corrente amperiana in quanto **M** è uniforme. La conclusione resta valida anche se si considera che **M** varia in modulo proporzionalmente a $1/r$: la ragione è la stessa vista alla fine del problema 7.6. Si verifichi che, anche con **M** variabile nel modo detto, e quindi con j_s variabile, la corrente amperiana totale ha sempre lo stesso valore i_a.

7.8. ***Ripetere il problema 7.7 nel caso in cui il mezzo ferromagnetico presenti un taglio (interferro) con le facce ortogonali alle linee di B, di lunghezza $h = 2$ cm. Si supponga trascurabile il flusso disperso e si considerino i campi uniformi sulla sezione.***

Trascurare il flusso disperso vuol dire supporre che il tubo di flusso di **B** coincidente col solenoide dove c'è l'isoperm conservi la stessa sezione anche nell'aria, ovvero che le linee di **B** continuino ad essere circonferenze concentriche; tutto ciò è ammissibile purché, come nel nostro caso, h sia molto minore di l. Fatta questa premessa, possiamo calcolare la riluttanza del circuito magnetico come somma di due parti relative al tratto nell'isoperm e al tratto di aria. Secondo la (a) del problema 7.7

$$R = \frac{l - h}{\mu_0 \varkappa_m \Sigma} + \frac{h}{\mu_0 \Sigma} = \frac{l - h + \varkappa_m h}{\mu_0 \varkappa_m \Sigma} = 8.29 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \ , \qquad \text{(a)}$$

da confrontare con il valore $4.38 \cdot 10^7$ H^{-1} per lo stesso circuito senza interferro. Il tratto in aria, in lunghezza circa 1.5% del totale, contribuisce per il 48% al valore della riluttanza; in effetti vediamo nella (a) che, agli effetti della riluttanza, è come se fosse $\varkappa_m$ volte più lungo. Con mezzi ferromagnetici comuni, a permeabilità relativa assai alta, la riluttanza del mezzo può divenire trascurabile rispetto a quella dell'interferro.

Essendo dunque aumentata la riluttanza, ma rimasto lo stesso il fattore Ni, deve essere diminuito il flusso di **B** e perciò **B** stesso. Se designamo con un asterisco i valori ottenuti nel caso senza interferro (problema 7.7) ora abbiamo:

$$\Phi' = \frac{R^*}{R}\ \Phi'^* = 4.82 \cdot 10^{-5}\ \text{Wb}\ ,\quad \Phi = N\Phi' = 2.41 \cdot 10^{-2}\ \text{Wb}\ ,$$

$$B = \frac{\Phi'}{\Sigma} = 12.1 \cdot 10^{-2}\ \text{T}\ .$$

Questo è il valore del campo magnetico sia nell'isoperm che nell'interferro in quanto **B** è continuo, nel nostro caso geometrico, passando da un mezzo all'altro. Ad una diminuzione di **B** corrisponde una diminuzione di **H** nell'isoperm:

$$H_{in} = \frac{B}{\mu_0 \varkappa_m} = \frac{R^*}{R}\ H^* = 1.60 \cdot 10^3\ \frac{\text{A}}{\text{m}}\ .$$

Nell'aria il valore di **H** è diverso in quanto esso è discontinuo nel passaggio tra i due mezzi; da (7.13) abbiamo

$$H_{est} = \varkappa_m H_{in} = \frac{B}{\mu_0} = 96.6 \cdot 10^3\ \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Anche le altre grandezze richieste subiscono una diminuzione di un fattore R^*/R:

$$M = 0.528\ M^* = 9.46 \cdot 10^4\ \frac{\text{A}}{\text{m}}\ ,\quad L = 0.528\ L^* = 3.01 \cdot 10^{-3}\ \text{H}\ ,$$

$$W = 0.528\ W^* = 9.5 \cdot 10^{-2}\ \text{J}\ ,\quad i_a = 0.528\ i_a^* = 12.5 \cdot 10^4\ \text{A}\ .$$

Secondo la (b) del problema 7.7, l'energia si ripartisce tra isoperm e aria proporzionalmente alle rispettive riluttanze.

Il calcolo di **B** e di **H** sulla base del teorema di Ampère è altrettanto semplice; le nostre condizioni di simmetria ci permettono di scrivere la (7.7) così:

$$H_{in}\ (l - h) + H_{est} h = Ni\ .$$

Ma $H_{est} = \dfrac{B}{\mu_0}$ e quindi, risolvendo rispetto a B ,

$$B = -\mu_0\ \frac{l-h}{h}\ H_{in} + \mu_0\ \frac{Ni}{h}\ . \qquad \text{(b)}$$

Oltre a questa relazione generale tra il campo magnetico **B** e il campo **H** all'interno del materiale occorre averne un'altra caratteristica del materiale, da considerare come equazione di stato; nel nostro caso tale ruolo è sostenuto dalla (7.12),

$$B = \mu_0 \varkappa_m H_{in}\ .$$

Ritroviamo una situazione del tutto analoga a quella esposta nel problema 4.17; la retta (b) corrisponde alla retta di carico e tutti i suoi punti rappresentano possibili stati del sistema; lo stato effettivamente assunto è dato dall'intersezione con la curva rappresentativa dell'equazione di stato. La soluzione cercata è

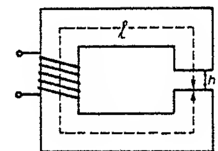
$$H_{in} = \frac{Ni}{l - h + \varkappa_m h}\ ,\quad B = \frac{\mu_0 \varkappa_m Ni}{l - h + \varkappa_m h}\ , \qquad \text{(c)}$$

in accordo con i risultati precedenti. La soluzione (c) è valida col medesimo valore di $\varkappa_m$ solo se l'equazione di stato è lineare; altrimenti bisognerebbe usare il valore $\varkappa_m$ appropriato alla particolare coppia di valori H, B che caratterizza il punto di funzionamento.

Riassumendo, a parità di corrente che circola nell'avvolgimento l'apertura di un interferro modifica il valore del campo magnetico facendolo diminuire. D'altra parte, anche se ciò può sembrare un inconveniente, sono queste le condizioni reali in cui si opera: nella pratica si vuole avere una regione di spazio accessibile ad esperimenti sede di un campo **B**. Il solenoide toroidale con interferro schematizza perciò correttamente gli elettromagneti di uso comune. C'è però la complicazione dovuta al fatto che in generale per questi scopi non vengono usati materiali, come l'isoperm, con ciclo di isteresi stretto e lineare, approssimabile nei conti con una retta. Vedremo in seguito il metodo di risoluzione appropriato.

7.9. ***Un elettromagnete ha una lunghezza magnetica media complessiva $l = 101$ cm in cui è compreso un interferro di spessore $h = 1$ cm. Esso è alimentato tramite $N = 20$ spire da un generatore di corrente continua. Il materiale usato nel circuito magnetico è acciaio al carbonio; le sue proprietà magnetiche sono riportate nella tabella accanto alla figura. Trascurando il flusso disperso determinare il valore della corrente che deve circolare nelle spire affinché si abbia nell'interferro un campo magnetico di modulo $B = 1$ T e quale sarebbe la corrente necessaria per generare lo stesso campo in assenza di interferro.***

H(A/m)	B(T)
389	0.050
796	0.165
1590	0.700
2040	1.000
3980	1.400
7960	1.580



Se deve essere $B = 1$ T, dalla tabella segue che il campo **H** entro il materiale ferromagnetico deve assumere il valore $H_{in} = 2040$ A/m. Inserendo questi valori nella relazione (b) del problema 7.8, che è di validità generale non essendo altro che il teorema di Ampère, ed esplicitando nella corrente si ottiene

$$i = \frac{Bh}{\mu_0 N} + \frac{(l-h) H_{in}}{N} = 500\ \text{A}\ .$$

Alternativamente si può dividere B per $\mu_0 H$ ottenendo il valore $\varkappa_m = 390$ della permeabilità relativa dell'acciaio al carbonio nelle condizioni di esercizio richieste e quindi usare la legge di Hopkinson (7 14) oppure la (c) del problema 7.8.

In assenza dell'interferro, cioè con tutta la lunghezza l occupata da acciaio al carbonio, se B deve rimanere lo stesso anche H_m deve conservare il suo valore e il teorema di Ampère (7.7) dà subito

$$i' = \frac{l}{N} H_m = 103 \text{ A} \quad .$$

Notiamo che ora, a differenza del problema 7.8, è dato il punto di funzionamento e perciò la soluzione è relativamente banale, pur non avendosi un'equazione di stato lineare.

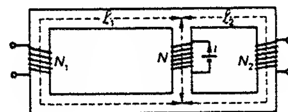
7.10. *Nel circuito magnetico indicato in figura si vuole che il flusso totale attraverso l'avvolgimento* N_1 *valga* $\Phi_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Wb, *mentre quello attraverso* N_2 *valga* $\Phi_2 = 3 \cdot 10^{-4}$ Wb; *inoltre il coefficiente di autoinduzione del sistema deve valere* $L = 10^{-3}$ H. *Calcolare i valori di N e della corrente i necessari allo scopo. I dati geometrici sono* $l = 194$ mm, $l_1 = 300$ mm, $l_2 = 200$ mm, $\Sigma = 1$ cm^2; $\varkappa_m$ *vale* 250 *mentre* $N_1 = N_2 = 50$.

I due rami di lunghezza l_1 e l_2 e riluttanza R_1 e R_2 sono in parallelo tra loro e connessi in serie alla sorgente caratterizzata dal valore Ni, posta sul ramo di lunghezza l e riluttanza R^*. La riluttanza totale è perciò

$$R = R^* + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\mu_0 \varkappa_m \Sigma}\left(l + \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}\right) = 10^7 \text{ H}^{-1} \quad . \tag{a}$$

Il flusso Φ' che attraversa ogni sezione dell'avvolgimento N è dato dalla somma dei flussi nei due rami in parallelo:

$$\Phi' = \Phi'_1 + \Phi'_2 = \frac{\Phi_1}{N_1} + \frac{\Phi_2}{N_2} = 10^{-5} \text{ Wb} \quad .$$



Applichiamo adesso la (7.14) ottenendo

$$Ni = R\Phi' = 100 \text{ A} \quad .$$

D'altra parte, secondo la (b) del problema 7.7

$$N = (LR)^{1/2} = 100 \quad \Rightarrow \quad i = 1 \text{ A} \quad .$$

Se vogliamo invece servirci del teorema di Ampère occorre prima qualche considerazione sull'andamento dei campi lungo il circuito magnetico, la cui sezione si suppone costante. Il campo **B** non può avere lo stesso modulo ovunque, proprio a causa del fatto che il suo flusso si conserva; i valori nei rami in parallelo devono essere minori di quello nel ramo sorgente. Se diciamo B, B_1, B_2 tali valori, che assumiamo uniformi lungo i rami interessati, possiamo scrivere $B = B_1 + B_2$ da cui segue, per la (7.12), $H = H_1 + H_2$. La (7.7), applicata ai circuiti chiusi $l + l_1$ e $l + l_2$, dà

$$Hl + H_1 l_1 = Ni \quad , \quad Hl + H_2 l_2 = Ni \quad .$$

Queste, usando appunto $H = H_1 + H_2$, sono due equazioni nelle incognite H_1 e H_2 le cui soluzioni sono:

$$H_1 = \frac{Ni l_2}{l(l_1 + l_2) + l_1 l_2} \quad , \quad H_2 = \frac{Ni l_1}{l(l_1 + l_2) + l_1 l_2} \tag{b}$$

Ma per H_1 e H_2 sussistono anche le relazioni

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \varkappa_m} = \frac{\Phi_1}{\mu_0 \varkappa_m N_1 \Sigma} \quad , \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \varkappa_m} = \frac{\Phi_2}{\mu_0 \varkappa_m N_2 \Sigma} \quad . \tag{c}$$

Sommando le due (b) ed eguagliando il risultato alla somma delle due (c) si ha

$$Ni = \frac{1}{\mu_0 \varkappa_m \Sigma}\left(l + \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}\right)\left(\frac{\Phi_1}{N_1} + \frac{\Phi_2}{N_2}\right)$$

che è l'espressione trovata in precedenza. A questa accostiamo la relazione per l'autoflusso $\Phi = Li$ che scriviamo

$$N\left(\frac{\Phi_1}{N_1} + \frac{\Phi_2}{N_2}\right) = Li$$

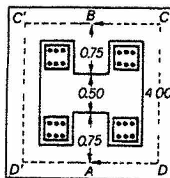
e in definitiva abbiamo due equazioni nelle incognite N e i.

Ricordiamo di nuovo che i due metodi non sono indipendenti: infatti la legge di Hopkinson è una diretta conseguenza del teorema di Ampère e della solenoidalità di **B**. Va scelto di caso in caso, praticamente, se è più conveniente un metodo o l'altro.

7.11. *La schematizzazione di un magnete ad H è mostrata in figura. Il circuito magnetico è del tipo visto nel problema* **7.10**, *però simmetrico e con interferro nel tratto centrale di modo che l'avvolgimento in cui circola la corrente i è diviso in due parti. Le dimensioni sono mostrate in figura, la sezione è* $\Sigma = 1$ m^2. *Si vuole disporre nell'interferro di un campo magnetico di modulo* $B = 1.5$ T; *dalla curva di magnetizzazione del materiale ferromagnetico usato si vede che per ottenere questo valore occorre un campo* $H = 857$ A/m. *Calcolare il valore di Ni necessario allo scopo e l'energia magnetica totale.*

Nelle condizioni di esercizio richieste

$$\varkappa_m = \frac{B}{\mu_0 H} = 1393 \quad .$$



La riluttanza del tratto AB vale

$$R_{AB} = \frac{1}{\mu_0 \varkappa_m \Sigma}\,(l - h + \varkappa_m h)$$

secondo la (a) del problema 7.8. La riluttanza totale si ottiene aggiungendo quella dei due tratti $BCDA$ e $BC'D'A$ in parallelo, calcolata come nel problema 7.10:

$$R = \frac{1}{\mu_0 \varkappa_m \Sigma}\left(l - h + \varkappa_m h + \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}\right) \quad .$$

Numericamente, se $l = 2$ m, $h = 0.5$ m, $l_1 = l_2 = 4$ m, $R = 4.0 \cdot 10^5$ H^{-1}. La parte in ferro ha una riluttanza che è $\sim 0.5\%$ di quella del tratto in aria: è cioè l'interferro che condiziona a tutti gli effetti la soluzione. Da (7.14) concludiamo

$$Ni = R\Phi = RB\Sigma = 6.0 \cdot 10^5 \text{ A} \quad .$$

Anche la risoluzione col teorema di Ampère è facilitata dalla simmetria del sistema. Usando gli stessi simboli del problema 7.10 possiamo scrivere per la circuitazione del campo **H** lungo uno dei cammini tratteggiati

$$H_{\text{aria}} h + H(l - h) + H_1 l_1 = Ni \quad .$$

Siccome $H_1 = H/2$ e $H_{\text{aria}} = B/\mu_0$ si ottiene

$$Ni = \frac{Bh}{\mu_0} + H\left(l - h + \frac{l_1}{2}\right) = 6.0 \cdot 10^5 \text{ A} \quad .$$

L'energia magnetica si ricava dalla (b) del problema 7.7:

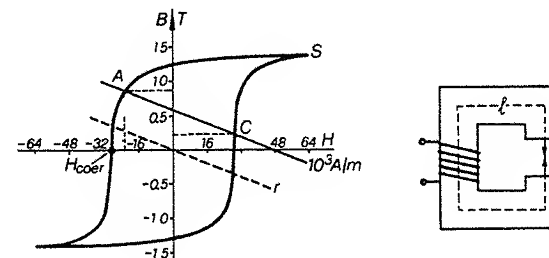
$$W = \frac{1}{2}\,\frac{(Ni)^2}{R} = 450.0 \cdot 10^3 \text{ J} \quad .$$

Nell'interferro di volume $\tau = \Sigma h$ è immagazzinata la parte (7.19)

$$W_a = \frac{1}{2}\,\frac{B^2}{\mu_0}\,\tau = 447.6 \cdot 10^3 \text{ J} \simeq 0.995\, W \quad .$$

Osserviamo che in questo problema, a differenza di quelli precedenti, l'entità dell'interferro è tale da non rendere più valida l'ipotesi che **B** sia uniforme nell'aria e che il tubo di flusso abbia sezione costante passando dal mezzo ferromagnetico all'aria. I risultati numerici devono perciò essere considerati come utili indicazioni degli ordini di grandezza.

7.12. *Il ciclo di isteresi della lega Alnico 5*[1] *è mostrato in figura insieme all'elettromagnete a C di cui esso costituisce il nucleo. La lunghezza media del circuito magnetico è* $l = 110$ **cm** *lo spessore dell'interferro è* $h = 10$ **cm**; *le spire dell'avvolgimento sono* $N = 80$. *Si supponga di portare la corrente da zero fino ad un valore assai alto per cui l'Alnico vada in saturazione e di ridurla poi fino al valore di regime* $i = 600$ **A**. *Calcolare il valore di* **B** *nell'interferro a regime, a seconda che il percorso venga eseguito facendo scorrere la corrente in un verso o nell'altro. Calcolare inoltre la corrente che corrisponde al punto S del ciclo di isteresi.*



Il problema non è, nella forma, diverso da 7.8 da cui prendiamo la (b):

$$B = -\mu_0\,\frac{l-h}{h}\,H + \mu_0\,\frac{Ni}{h} = -12.56 \cdot 10^{-6}\,(H - Ni) \text{ T} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Questa volta però non disponiamo di un'equazione di stato analitica $B = B(H)$, bensì abbiamo il ciclo di isteresi dell'Alnico. La soluzione va perciò ricercata per via grafica, dall'intersezione di (a) con il ciclo. È qui che entra in gioco la storia del materiale: infatti tutti i punti interni al ciclo possono essere stati del sistema a seconda del trattamento subito dal materiale. Solo se questo viene portato alternativamente alla saturazione positiva o negativa (per così dire) il punto rappresentativo dei possibili stati del sistema descrive la curva contorno; secondo il testo noi siamo appunto in questa situazione. Inserendo in (a) i valori dati per N e i si ha

$$B = -12.56 \cdot 10^{-6}\,H + 0.60 \text{ T} \quad .$$

Per tracciare questa retta calcoliamo le intercette che risultano $B = 0.60$ T e $H = 48 \cdot 10^3$ A/m; dall'intersezione col ciclo di isteresi si hanno le due soluzioni

$$B_A = 0.88 \text{ T} \quad , \quad H_A = -22.4 \cdot 10^3\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \quad ,$$

$$B_C = 0.23 \text{ T} \quad , \quad H_C = 29.4 \cdot 10^3\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

[1] In percentuale 51% ferro, 14% nichel, 24% cobalto, 8% alluminio, 3% rame.

La prima è stata raggiunta portando prima **H** ad un elevato valore positivo, la seconda viceversa. Il valore trovato per **B** è in ogni caso quello comune a tutto il circuito (Alnico e aria); invece la soluzione per **H** è quella valida all'interno del materiale. Nell'interferro $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ e pertanto

$$H_A^{est} = 7.01 \cdot 10^5 \, \frac{A}{m} \quad , \quad H_C^{est} = 1.83 \cdot 10^5 \, \frac{A}{m} \quad .$$

Vediamo un'importante differenza tra le due soluzioni. Nella prima (punto A) all'interno del materiale **B** e **H** sono discordi; si dice in tal caso che quest'ultimo ha azione smagnetizzante (se raggiungesse il valore $H_{coer} = -28 \cdot 10^3$ A/m del punto di intersezione ciclo – asse H, detto campo coercitivo, il campo magnetico sarebbe nullo). Nella seconda (punto C) si ha invece concordanza di verso; quest'ultima è poi sempre assicurata per definizione nell'interferro.

Al variare della corrente nell'avvolgimento la retta di carico (a) si sposta rimanendo parallela a se stessa in quanto il coefficiente angolare dipende esclusivamente dai parametri geometrici del circuito magnetico. Se invece, per esempio, lo spessore h dell'interferro diminuisce, la retta ruota aumentando in valore assoluto la propria pendenza; a parità in pratica di campo **H** poiché $h \ll l$, maggiore è il valore del campo magnetico raggiunto. Al limite per $h = 0$ la retta diviene parallela all'asse B con equazione $H = Ni/l$; il corrispondente valore di B, dato dall'ordinata del punto di intersezione tra retta e ciclo di isteresi, è il valore massimo ottenibile con quel valore di **H**. Questo caso non ha però interesse pratico in quanto lo scopo è di avere una regione di spazio accessibile sede di un campo magnetico [1].

Particolare interesse ha il caso $i = 0$: la retta (a) adesso passa per l'origine (retta r della figura). Pur in assenza di corrente nell'Alnico sussiste un campo magnetico: il materiale è diventato un *magnete permanente*. I valori di **H** e **B** hanno segno opposto, cioè *entro un magnete permanente le linee di* **B** *e di* **H** *hanno verso opposto, sempre*. Questa è una conseguenza di (7.7): essendo $i = 0$ la circuitazione di **H** deve essere nulla; siccome **B** conserva sempre il proprio verso e nell'interferro **H** e **B** sono concordi, entro il mezzo devono essere discordi. Da $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ segue inoltre che il campo **H** di un magnete permanente è conservativo. Se poi si riducesse a zero lo spessore dell'interferro andrebbe a zero il valore di **H**, come segue sempre da (7.7); pertanto in un magnete permanente può sussistere un campo **H** solo se ci sono superficie di discontinuità, cioè interferri. Con $\mathbf{H} = 0$, il campo magnetico è $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$ e il suo valore, dato dall'intersezione del ciclo di isteresi con l'asse B, è detto *campo magnetico residuo*.

Notiamo come l'Alnico sia particolarmente adatto alla costruzione di magneti permanenti a causa dell'elevato valore del campo coercitivo: $28 \cdot 10^3$ A/m contro, per esempio, 64 A/m nel ferro dolce. In termini grafici ciò si traduce in cicli stretti o cicli larghi: più largo è il ciclo, migliore è il magnete

(1) Il richiamo fatto più volte sull'utilità degli interferri è pertinente agli elettromagneti, i circuiti magnetici chiusi sono invece essenziali per altre applicazioni, ad esempio trasformatori o memorie magnetiche

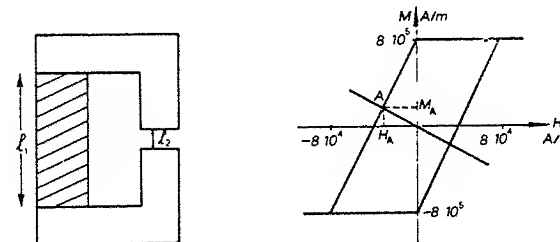
permanente. Infatti, a meno di non sottoporlo deliberatamente a un forte campo **H**, è difficile trovare casualmente un campo **H** tale da smagnetizzarlo.

Per quanto riguarda la seconda domanda basta porre nella (a) i valori $H = 64 \cdot 10^3$ A/m e $B = 1.4$ T, corrispondenti al punto S, e risolvere in Ni:

$$Ni = \frac{Bh}{\mu_0} + (l - h)H = 1.75 \cdot 10^5 \text{ A} \quad ,$$

da cui $i \simeq 2190$ A. Questo sarebbe il valore della corrente necessaria per portare il nucleo dell'elettromagnete in saturazione.

7.13. ***Il magnete della figura è costituito da una sbarra prismatica magnetizzata, di sezione $\Sigma_1 = 50$ cm² e altezza $l_1 = 40$ cm, e da due ancore di ferro dolce, di sezione $\Sigma_2 = 25$ cm², che delimitano un interferro di spessore $l_2 = 5$ cm. La sbarra è stata magnetizzata in modo permanente portando la corrente di un opportuno avvolgimento ad un valore assai elevato e poi riducendola a zero; il ciclo di isteresi è mostrato in figura. Calcolare il campo magnetico nell'interferro; si supponga assai elevata la permeabilità relativa del ferro dolce e si trascuri il flusso disperso.***



Dal testo capiamo che possiamo trascurare il contributo delle ancore di ferro dolce al valore totale della circuitazione di **H**: in esse il campo **H** ha un valore molto piccolo essendo assai elevata la permeabilità relativa. Detto H_1 il valore nella sbarra e H_2 quello nell'interferro la (7.7) si scrive

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0$$

Inoltre $H_2 = B_2/\mu_0$ e, per la costanza del flusso di **B**, $B_1 \Sigma_1 = B_2 \Sigma_1$: la variazione di sezione implica cioè un diverso valore di **B** nella sbarra e nell'interferro. In conclusione

$$H_1 l_1 + \frac{B_1 \Sigma_1}{\mu_0 \Sigma_2} \, l_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = -\mu_0 \, \frac{l_1 \Sigma_2}{l_2 \Sigma_1} \, H_1 \quad .$$

Il ciclo di isteresi è però dato come $M = M(H)$ per cui ricorriamo a (7 9):

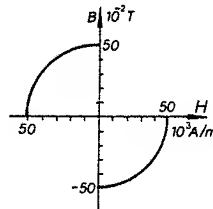
$$M = \frac{B_1}{\mu_0} - H_1 = -\left(1 + \frac{l_1 \Sigma_2}{l_2 \Sigma_1}\right) H_1 = -5 \, H_1 \, \frac{A}{m} \quad .$$

Dall'intersezione di questa resta con il ciclo di isteresi si arriva alla soluzione, data dal punto A o dal suo simmetrico rispetto all'origine. Numericamente

$$M_A = 1.6 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \quad , \quad H_A = -3.2 \cdot 10^4 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \quad ,$$

$$B_2 = B_1 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = \mu_0 (H_1 + M)_A \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = 0.32 \ \mathrm{T} \quad .$$

7.14. ***Un materiale ferromagnetico ha un campo magnetico residuo $B_r = \pm 0.5$ T mentre il campo coercitivo vale $H_c = \mp 50 \cdot 10^3$ A/m. I tratti del ciclo di isteresi che uniscono questi punti possono essere approssimati con archi di circonferenza, se H è espresso in unità 10^3 A/m e B in 10^{-2} T (vedi figura). Calcolare il campo magnetico di un magnete permanente fatto con questo materiale se la forma è quella di un anello toroidale di raggio medio $R = 2$ cm con interferro spesso $h = 5$ mm. Si trascuri il flusso disperso.***



Il teorema di Ampère si traduce nella solita relazione

$$B = -\mu_0 \frac{l-h}{h} H = -\beta H \quad . \qquad \text{(a)}$$

Non c'è bisogno di ricorrere alla soluzione grafica perché conosciamo la forma analitica del ciclo di isteresi, almeno nella parte che ci interessa:

$$H^2 + B^2 = \alpha^2 = 50^2 \quad . \qquad \text{(b)}$$

Il sistema delle due relazioni (a) e (b) ammette le soluzioni

$$H = \mp \frac{\alpha}{(1+\beta^2)^{1/2}} \quad , \quad B = \mp \frac{\alpha\beta}{(1+\beta^2)^{1/2}}$$

Nelle unità usuali l'espressione numerica di (a), con $l = 2\pi R$, è $B = -3.03 \cdot 10^{-5}\, H$. Se però misuriamo H in 10^3 A/m e B in 10^{-2} T, questa diventa $B = -3.03\, H$, ovvero $\beta = 3.03$, mentre $\alpha = 50$. I valori cercati per **H** e **B** sono quindi:

$$H = \mp 15.7 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \quad , \quad B = \pm 47.5 \cdot 10^{-2} \ \mathrm{T} \quad .$$

7.15. ***Un elettromagnete ($l = 30$ cm, $N = 400$) ha un interferro spesso $h = 3$ mm in cui è possibile far ruotare con velocità angolare $\omega = 100$ rad/s una bobinetta di $N' = 10$ spire, con sezione quadrata di area $\Sigma = 4$ mm^2; l'asse della bobina è ortogonale alle linee di B. Tale bobina è chiusa su un circuito esterno, di resistenza totale $R = 4\ \Omega$, in cui si trova uno strumento tarato in modo da dare il valore massimo I_{max} della corrente che l'attraversa. Agendo sul circuito di alimentazione dell'avvolgimento si fa aumentare progressivamente la corrente e si osserva che a partire dal valore $i^* = 39$ A, cui corrisponde nella bobina $I^*_{max} = 1.8 \cdot 10^{-3}$ A, il valore di I_{max} descrive una retta all'aumentare di i. Calcolare il valore della magnetizzazione di saturazione M_s del materiale ferromagnetico usato. Si trascurino il flusso disperso e l'autoinduzione e la resistenza della bobina.***

Il dispositivo con la bobina rotante serve per misurare il campo magnetico nell'interferro attraverso il fenomeno dell'induzione elettromagnetica. Il flusso di **B** attraverso la bobina varia nel tempo secondo la legge $\Phi = BN'\Sigma \cos \omega t$ per cui nel circuito di misura circola la corrente (6.5)

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\omega B N' \Sigma}{R} \operatorname{sen} \omega t = I_{max} \operatorname{sen} \omega t \quad .$$

Il valore del campo magnetico è dato quindi da

$$B = \frac{R I_{max}}{\omega N' \Sigma} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Sussiste poi sempre la relazione (b) del problema 7.8:

$$B = -\mu_0 \frac{l-h}{h} H + \mu_0 \frac{Ni}{h} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Nel nostro caso particolare siamo interessati a quella parte del ciclo di isteresi che dà la relazione tra **B** e **H** quando il materiale ha raggiunto la saturazione. Si è allora fuori dal ciclo propriamente detto e si descrive un tratto rettilineo la cui equazione è

$$B = \mu_0 (H + M_s) \quad , \qquad \text{(c)}$$

con M_s magnetizzazione di saturazione del materiale, costante. L'intersezione tra le rette (b) e (c) dà lo stato in cui si trova il sistema:

$$B = \mu_0 \left(\frac{Ni}{l} + \frac{l-h}{l} M_s \right) \quad , \quad H = \frac{Ni}{l} - \frac{h}{l} M_s \quad . \qquad \text{(d)}$$

Dalle misure eseguite sappiamo che cominciamo a trovarci nella zona della saturazione con $i^* = 39$ A nell'avvolgimento, ovvero $I^*_{max} = 1.8 \cdot 10^{-3}$ A nella bobina. Dalla (a) ricaviamo il corrispondente campo magnetico $B^* = 1.80$ T e dalle (d), noti i^* e B^*, prima la magnetizzazione di saturazione e poi il campo **H**:

$$M_s = \frac{1}{l-h} \left(\frac{lB^*}{\mu_0} - Ni^* \right) = 1.39 \cdot 10^6 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \quad , \quad H^* = 3.81 \cdot 10^4 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \quad .$$

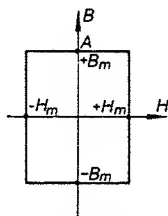
Nel piano H, B a partire dal punto H^*, B^* il punto rappresentativo dello stato del sistema descrive. al crescere di H e cioè di i, la retta (c)

$$B = \mu_0 H + 1.752 \quad \text{T} \quad ,$$

la cui pendenza è data dalla permeabilità assoluta del vuoto, avendo questa un valore assai piccolo si vede come l'aumento di **B** sia molto lento. Una volta raggiunta la saturazione $\Delta B = \mu_0 \Delta H \simeq 10^{-6}\ \Delta H$: a grandi ΔH corrispondono piccoli ΔB. Fisicamente, il mezzo ferromagnetico, essendo saturato, non può più aumentare il proprio contributo al valore del campo magnetico; ogni ulteriore crescita di **B** viene a dipendere da una corrispondente crescita della corrente di conduzione. Ciò pone un limite al massimo campo magnetico raggiungibile con un elettromagnete convenzionale: giunti alla saturazione un sostanziale aumento di **B** richiederebbe correnti, e quindi potenze, enormi Nel nostro caso la prima delle (d) dà $\Delta B = 1.68 \cdot 10^{-3}\ \Delta i$ e per raddoppiare il valore di B*, raggiunto con soli 39 A, occorrerebbe una corrente di 1110 A.

7.16. ***Il permalloy è un materiale ferromagnetico avente ciclo di isteresi con buona approssimazione rettangolare (vedi figura). Il valore di H_m è 160 A/m, quello di B_m è 0.1 T. Un anello toroidale di permalloy, magnetizzato fino alla saturazione con un opportuno campo H portato poi a zero, viene successivamente sottoposto ad un campo H il cui modulo varia secondo la legge $H = H_0 \operatorname{sen} \omega t$. Calcolare l'innalzamento di temperatura in un secondo dovuto all'isteresi di questo campione nell'ipotesi che H_0 valga 80 o 160 o 240 A/m e che la frequenza sia $\nu = 50$ Hz. Il calore specifico del permalloy è $c = 400$ J/Kg°C, la densità è $\varrho = 8 \cdot 10^3$ Kg/m³. Si supponga il sistema isolato termicamente.***

Supponiamo che il campione si trovi nello stato indicato dal punto A; in mancanza di altre informazioni potrebbe anche essere nel punto simmetrico di A rispetto all'origine, ma ciò non cambierebbe i risultati. Dal ciclo di isteresi è evidente che per smagnetizzare il campione e fargli percorrere il ciclo occorre un campo **H** il cui valore massimo sia superiore o al più eguale a H_m. Per $H_0 < H_m$ il punto rappresentativo dello stato magnetico del sistema percorre una parte del tratto orizzontale $B = B_m$ e non si ha dissipazione di energia in quanto **B** non varia. Perciò per $H_0 = 80$ A/m non si ha alcuna variazione di temperatura. Per $H_0 = 160$ A/m il campione percorre il ciclo di isteresi la cui area dà l'energia perduta per ciclo e per unità di volume del materiale, energia che si ritrova sotto forma di calore (vedi paragrafo 7e.) In un secondo il ciclo viene percorso ν volte e quindi



$$W = 4 H_m B_m \nu = 3.2 \cdot 10^3 \ \frac{\text{J}}{\text{m}^3\text{s}} \quad .$$

Il calore specifico per unità di volume del permalloy è $c\varrho$ e l'aumento di temperatura al secondo risulta

$$\Delta = \frac{W}{c\varrho} = 10^{-3} \text{ gradi/s} \quad .$$

Per valori di H_0 maggiore di H_m, com'è il caso $H_0 = 240$ A/m, non cambia nulla: oltre al ciclo di isteresi vengono percorsi tratti in cui i processi sono reversibili e non comportano dissipazione d'energia.

7.17. ***Lo spazio interno di un solenoide toroidale ($N = 2000$, $\Sigma = 20$ cm², $l = 1$ m) è riempito completamente da un materiale paramagnetico, il cloruro di gadolinio, di densità $\varrho = 2.4 \cdot 10^3$ Kg/m³ e costante di Curie $C = 3.34 \cdot 10^{-4}$ m³K/Kg. Agendo sul circuito di alimentazione del solenoide si fa aumentare lentamente la corrente dal valore zero al valore $i = 200$ A, mantenendo tutto il sistema alla stessa temperatura. A seconda che questa sia $T_1 = 3$ K o $T_2 = 300$ K calcolare quanto lavoro W_M si compie per magnetizzare il materiale e il valore della magnetizzazione del cloruro di gadolinio.***

Da (7.9) e (7.16) messe insieme deriva che l'aumento infinitesimo di energia magnetica legato ad un aumento di **B** si scrive, per unità di volume,

$$dw = HdB = \mu_0 HdH + \mu_0 HdM = dw_0 + dw_M$$

Il primo termine della somma ha la stessa struttura del termine energetico dello spazio vuoto e corrisponde ad un aumento di energia magnetica che non è legato alla presenza di un materiale; il secondo invece rappresenta il lavoro compiuto per aumentare la magnetizzazione.

Il lavoro totale di magnetizzazione, in base a (7.17), vale

$$W_M = \int_\tau \int_0^M \mu_0 HdMd\tau = \mu_0 \tau \int_0^M HdM \quad .$$

L'integrazione sulle coordinate risulta immediata per le condizioni di uniformità dei campi entro il solenoide. L'uso di (7.10-7.11) ci porta alla conclusione:

$$W_M = \mu_0 \tau \chi_m \frac{H^2}{2} = \mu_0 \tau \varrho \frac{CH^2}{2T} \quad .$$

Numericamente $\tau = \Sigma l = 2 \cdot 10^{-3}$ m³, $H = Ni/l = 4 \cdot 10^5$ A/m per cui

$$W_M = \frac{161.2}{T} \text{ J} \quad \Rightarrow \quad W_M(3) = 53.7 \text{ J} \ , \ W_M(300) = 53.7 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad .$$

L'energia necessaria alla creazione del campo **H** è invece la stessa alle due temperature e vale

$$W_0 = \mu_0 \tau \frac{H^2}{2} = 201 \text{ J} \quad .$$

A temperatura ambiente $W_0 \gg W_M$: l'effetto paramagnetico ordinario è assai debole; però, a bassissime temperature, quando l'orientamento dei dipoli elementari è molto meno disturbato dall'agitazione termica, i due termini W_0 e W_M divengono confrontabili

La magnetizzazione vale, nei due casi,

$$M(3) = \chi_m(3)H = 0.267\ H = 1.07 \cdot 10^5 \ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad ,$$

$$M(300) = \chi_m(300)H = 2.67 \cdot 10^{-3}\ H = 1.07 \cdot 10^3 \ \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

Mentre a temperatura ordinaria la permeabilità relativa $\varkappa_m = 1 + \chi_m$ è eguale all'unità entro alcune parti su mille, a 3 K essa vale 1.267. Ripetendo qui le considerazioni fatte nel problema 7.5, a 300 K il contributo a **B** del mezzo è molto piccolo, certamente trascurabile; invece a 3 K rispetto ad un contributo 1 della corrente di conduzione il cloruro di gadolinio dà un contributo 0.267, dello stesso ordine di grandezza. Siamo però lontani dai valori raggiunti con i materiali ferromagnetici.

7.18. ***Una spira circolare di raggio $R = 4$ cm è percorsa da una corrente $i = 500$ A. Sull'asse della spira, a distanza $x = R$ dal suo centro, si trova una particella paramagnetica sferica di raggio $r = 4$ mm. Si constata che per portare tale particella a distanza infinita occorre spendere un lavoro $L = 2.47 \cdot 10^{-9}$ J. Calcolare la suscettività magnetica della particella. Si supponga che i campi siano uniformi entro la sfera e si trascuri la perturbazione del campo magnetico che la particella crea nello spazio ad essa esterno nonché l'effetto smagnetizzante all'interno. Dare inoltre l'espressione della forza risentita dalla particella e discuterla.***

Calcoliamo innanzitutto l'espressione dell'energia della particella: se consideriamo i campi uniformi entro la sferetta, l'energia magnetica contenuta in essa è

$$W = \tau \frac{HB}{2} = \frac{1}{2} \tau\mu_0 \ (1 + \chi_m)H^2$$

essendosi usate le (7.18) e (7.12). Si tenga conto però che in assenza della particella nello spazio lasciato libero c'è pur sempre campo magnetico la cui energia si scrive

$$W_0 = \frac{\tau B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\tau\mu_0 H^2 \quad .$$

I valori di **H** nei due casi sarebbero a rigore diversi, ma se possiamo trascurare l'effetto smagnetizzante li assumiamo eguali. L'energia magnetica della particella risulta

$$W_M = W - W_0 = \frac{1}{2} \ \tau\mu_0\chi_m H^2 \quad , \qquad \text{(a)}$$

identica all'energia di magnetizzazione calcolata nel problema 7.17; e in effetti W_M serve a creare una magnetizzazione diversa da zero in una certa regione di spazio. Scrivendo $H = B/\mu_0$ e utilizzando la (a) del problema 5.18 abbiamo

$$W_M(x) = \mu_0 \chi_m \ \frac{\tau i^2 R^4}{8(x^2 + R^2)^3} \qquad \text{(b)}$$

con x distanza della particella dal centro della spira. Al diminuire di x W_M aumenta: ciò vuol dire che la particella tende a portarsi vicino alla spira. Per portarla all'infinito occorre quindi spendere il lavoro

$$L = W_M(x) - W_M(\infty) = W_M(x) \quad .$$

Dalla (b) ricaviamo ponendo $x = R$ e $\tau = \frac{4}{3}\ \pi r^3$,

$$\chi_m = \frac{8(x^2 + R^2)^3 W_M}{\mu_0 \tau i^2 R^4} = \frac{2^6 R^2 L}{\mu_0 \tau i^2} = 3.0 \cdot 10^{-3} \quad .$$

La forza che agisce sulla particella si ricava dalla (a) derivando rispetto a x:

$$F = \frac{\partial W_M}{\partial x} = \tau\mu_0\chi_m H \ \frac{\partial H}{\partial x} \quad .$$

Guardiamo la struttura di questa formula: $\chi_m H$ è la magnetizzazione, cioè il momento magnetico per unità di volume, così che $\tau\chi_m H$ rappresenta il momento magnetico μ della particella, vettorialmente parallelo e concorde all'asse x. Se portiamo μ_0 sotto il segno di derivata, $F = \mu\partial B/\partial x$; **B** è anch'esso parallelo e concorde all'asse x nei punti dell'asse per cui il suo modulo coincide con B_x e la derivata rispetto a x è anche il modulo del gradiente di B_x. In definita

$$F = \boldsymbol{\mu} \cdot \text{grad} B_x$$

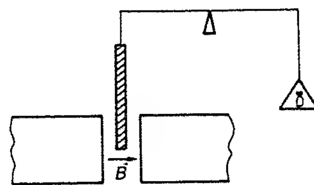
esattamente come visto nel problema 2.26 per la forza agente su un dipolo elettrico posto in un campo elettrico non uniforme. Si intende che la formula ha validità generale se al posto di F si sostituisce F_x.

7.19. ***In figura è schematizzato l'apparato di Gouy per la misura della suscettività magnetica. Una sbarretta di materiale paramagnetico, cilindrica con raggio $R = 2.5$ mm, è sospesa al braccio di una bilancia; l'estremo libero***

sta tra i poli di un elettromagnete che fornisce un campo magnetico uniforme orizzontale, l'altro estremo è fuori dell'influenza del campo. Se B assume il valore di 1 T la massa apparente della sbarretta aumenta di $m = 1.5$ g. Calcolare χ_m.

Vediamo innanzitutto perché la sbarretta è attirata dentro il campo. Per uno spostamento Δx verso il basso in una regione cilindrica di volume $\pi R^2 \Delta x = \Sigma \Delta x$ il vuoto viene sostituito da materiale paramagnetico. La variazione di energia magnetica, calcolata come nel problema 7.18, è

$$W_M = W - W_0 = \frac{1}{2}\ \tau \mu_0 \chi_m H^2 = \frac{1}{2}\ \Sigma \Delta x \mu_0 \chi_m H^2 \quad .$$



Poiché χ_m è positiva l'energia aumenta con la progressiva introduzione della sbarretta: ovvero questa è attirata dentro l'interferro, dovendo un sistema di questo tipo evolvere verso stati in cui l'energia magnetica è massima. Di qui l'apparente aumento di massa; per un materiale diamagnetico invece $\chi_m < 0$, la forza è repulsiva e la massa in apparenza diminuisce. Essendo H uniforme la forza è

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{1}{2}\ \Sigma \mu_0 \chi_m H^2 \quad ,$$

eguale in condizioni di equilibrio a mg per cui

$$\chi_m = \frac{2mg}{\Sigma \mu_0 H^2} = 2\mu_0 g\ \frac{m}{B^2 \Sigma} = 1.88 \cdot 10^{-3} \quad .$$

Il fatto che le forze del campo compiano un lavoro sulla sbarretta e che contemporaneamente l'energia magnetica aumenti deriva dalla circostanza che l'energia magnetica non è l'energia totale del sistema: nel bilancio energetico totale occorre considerare anche il lavoro speso dal generatore che mantiene costante la corrente nell'avvolgimento. L'introduzione di un corpo materiale in un interferro causa in generale una variazione dL del coefficiente di autoinduzione del circuito di alimentazione. Se la corrente rimane costante c'è una variazione di energia magnetica esprimibile come

$$dW_{mag} = d\left(\frac{1}{2}\ Li^2\right) = \frac{i^2}{2}\ dL \quad . \qquad \text{(a)}$$

D'altra parte una variazione dL induce nel circuito di alimentazione in base a (6.9) una f.em. indotta $\mathscr{E} = -i\ dL/dt$ contro cui, per mantenere costante la corrente, il generatore deve compiere il lavoro

$$dL_{gen} = -\mathscr{E} i dt = i^2 dL \quad . \qquad \text{(b)}$$

Le (a) e (b) permettono di stabilire che per un materiale paramagnetico e ferromagnetico l'introduzione corrisponde a dL positivo; nel processo il generatore fornisce una certa energia di cui metà va in aumento dell'energia magnetica e metà corrisponde al lavoro meccanico speso nell'avvicinamento del materiale. Invece l'estrazione comporta $dL < 0$ e il generatore assorbe energia, con le stesse modalità. Con un materiale diamagnetico succede esattamente l'opposto.

In ogni caso, da una parte $dL_{gen} = 2dW_{mag}$, dall'altra la variazione di energia totale si scrive $dW_{tot} = dW_{mag} - dL_{gen}$ dovendosi tener conto di quanto speso dal generatore. Mettendo insieme:

$$dW_{mag} = -dW_{tot} \quad .$$

La forza in una certa direzione, per esempio x, data da $F_x = -\partial W_{tot}/\partial x$ risulta così $F_x = \partial W_{mag}/\partial x$. Nel caso dell'interazione tra circuiti e corpi magnetizzati è dunque provata l'affermazione generale fatta nel paragrafo 5f. sulla possibilità dell'uso dell'energia magnetica al posto di quella totale per i calcoli di forze (e momenti e lavori). Capiamo inoltre perché i sistemi evolvano verso gli stati in cui l'energia magnetica è massima. Si confronti quanto ora visto con l'ultima parte del problema 2.10.

7.20. ***Entro un ristretto intervallo dell'asse di un solenoide rettilineo centrato su uno degli estremi O' il campo magnetico varia, con buona approssimazione, linearmente con la distanza x da O', secondo una legge del tipo $B_0 = \alpha x + \beta$; α è data da dB_0/dx ed è negativa, se i versi sono quelli indicati in figura (¹). Ponendo un campione di materiale magnetico in O' e sospendendolo opportunamente a un dinamometro, si nota che quando passa corrente nel solenoide oltre al peso agisce un'altra forza F, diretta secondo l'asse, proporzionale alla massa del campione, concorde o discorde al peso a seconda del tipo di campione. Per esempio, se $\alpha = -4.8$ T/m e $\beta = 0.5$ T, un campione di grafite risente una forza repulsiva pari a $8.6 \cdot 10^{-2}$ N/Kg mentre un campione di platino risente di una forza attrattiva pari a $-2.6 \cdot 10^{-2}$ N/Kg. Calcolare per le dette sostanze la suscettività magnetica specifica χ_m/ϱ.***

Il procedimento da seguire è simile a quello visto nel problema 7 18; da un punto di vista sperimentale il dispositivo attuale è certamente più adatto alla misura della suscettività. Assumiamo ancora che il campo H non venga modificato dalla presenza del campione e scriviamo l'energia di questo secondo la (a) del problema 7.18:



$$W_M = \frac{1}{2}\ \tau \mu_0 \chi_m H^2 = \frac{\tau}{2\mu_0}\ \chi_m B_0^2 \quad ,$$

in quanto $\mu_0 H = B_0$. La forza subita dal campione nella direzione dell'asse x, che è poi tutta la forza dipendendo B_0 e di

(¹) Si veda a conferma di ciò la figura del problema 5 28

conseguenza W_M solo da x nei punti dell'asse, si ricava al solito come

$$F = \frac{dW_M}{dx} = \frac{\tau}{\mu_0}\chi_m B_0 \frac{dB_0}{dx} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{F}{m} = \frac{\chi_m B_0}{\varrho\mu_0}\frac{dB_0}{dx} \quad ,$$

che è la forza per unità di massa. La suscettività specifica risulta quindi

$$\frac{\chi_m}{\varrho} = \mu_0 \frac{f}{B_0 \frac{dB_0}{dx}} = \mu_0 \frac{f}{\alpha\beta} \quad ,$$

visto che il secondo membro è calcolato nel punto O' $(x = 0)$. In definitiva

grafite $\varkappa_m/\varrho = -4.50 \cdot 10^{-8}$ m³/Kg , diamagnetico

platino $\varkappa_m/\varrho = 1.36 \cdot 10^{-8}$ m³/Kg , paramagnetico .

Moltiplicando per le rispettive densità si ottiene il valore di $\varkappa_m$.

7.21. ***Nel circuito del problema 7.7 ($Ni = 4 \cdot 10^3$ A, $l = 132$ cm, $\Sigma = 4$ cm², $\varkappa_m = 60$ costante) si supponga di sottrarre una parte del materiale ferromagnetico in modo da lasciare un interferro spesso $h = 2$ cm. Calcolare il lavoro necessario per l'asporto, il lavoro svolto dal generatore per mantenere costante la corrente, la forza con cui si attraggono le facce l'interferro.***

Quando il circuito magnetico è completo ($R_1 = 4.38 \cdot 10^7$ H^{-1}) in esso è immagazzinata l'energia

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{(Ni)^2}{R_1} = 0.182 \text{ J}$$

(si veda il problema 7.7); invece, con l'interferro ($R_2 = 8.29 \cdot 10^7$ H^{-1}) l'energia vale

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{(Ni)^2}{R_2} = 0.095 \text{ J}$$

(si veda il problema 7.8). Poiché l'energia magnetica diminuisce, per fare avvenire il processo occorre eseguire lavoro dall'esterno contro le forze del campo; in valore assoluto

$$L = W_1 - W_2 = 0.087 \text{ J} \quad .$$

Sappiamo dal problema 7.19 che il lavoro esterno compiuto sul sistema e la diminuzione di energia magnetica ricompaiono come energia assorbita dal generatore e che questa è pari al doppio di ΔW_{mag} per cui

$$L_{gen} = 2L = 0.174 \text{ J} \quad .$$

Il calcolo della forza con cui si attraggono le facce dell'interferro si imposta per via energetica. L'energia magnetica del sistema con interferro è $W = (Ni)^2/2R$ e, per una variazione dx della distanza tra le facce, essa varia di $dW = -[(Ni)^2/2R^2]\, dR$; pertanto la forza di attrazione è

$$F = \left(\frac{dW}{dx}\right)_{x=h} = -\frac{(Ni)^2}{2R^2}\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=h} \quad .$$

La riluttanza è data dalla (a) del problema 7.8; per eseguire la derivata noi immaginiamo di aumentare la distanza tra le facce di dx: segue che sia l che h aumentano di dx per cui la differenza tra lunghezza del circuito magnetico e spessore dell'interferro resta costante. In altre parole l'espressione da usare è

$$R(x) = \frac{l - h + \varkappa_m x}{\mu_0 \varkappa_m \Sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{dR}{dx} = \frac{1}{\mu_0 \Sigma} \quad .$$

Si noti che R aumenta e quindi W diminuisce con x; il sistema tende allora verso stati in cui x diminuisce, ovvero la forza è effettivamente attrattiva. Il suo modulo è

$$F = \frac{(Ni)^2}{2R^2}\frac{1}{\mu_0\Sigma} = \frac{\Sigma}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0\varkappa_m Ni}{l - h + \varkappa_m h}\right)^2 .$$

Dalla (c) del problema 7.8 vediamo che il termine tra parentesi è proprio il campo magnetico (nell'interferro e nel mezzo) e in conclusione

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma \quad . \qquad \text{(a)}$$

Alla stessa espressione si arriva scrivendo l'energia secondo (7.19):

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\varkappa_m}\Sigma(l - h) + \frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma x$$

e utilizzando per B l'espressione $\dfrac{\mu_0\varkappa_m Ni}{l - h + \varkappa_m x}$; si ottiene

$$W(x) = \frac{\Sigma}{2\mu_0\varkappa_m}\frac{(\mu_0\varkappa_m Ni)^2}{l - h + \varkappa_m x} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{dW}{dx} = -\frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma \quad .$$

Dalla (a) che, seppure dedotta in questo caso particolare, ha validità generale definiamo la pressione magnetica

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Alla (b) eravamo giunti anche nel problema 5.12; qui abbiamo ritrovato lo stesso risultato con una situazione fisica diversa. La pressione magnetica coincide con la densità di energia associata al campo magnetico, in completa analogia con quanto visto in elettrostatica (problemi 1.22 e 2.11) dove la pressione elettrostatica coincideva con la densità di energia associata al campo elettrico Del resto, che la densità di energia si identifichi con una pressione è un fatto

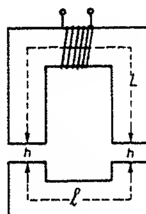
generale: ricordiamo ad esempio nella meccanica dei fluidi i concetti di pressione cinetica e pressione piezometrica, associati rispettivamente alla densità di energia cinetica e potenziale.

I risultati numerici sono

$$F = 2.32 \text{ N} \quad , \quad p = 5.80 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 5.72 \cdot 10^{-2} \text{ atm} \quad .$$

7.22. ***Il nucleo ferromagnetico di un elettromagnete ha sezione $\Sigma = 4\pi$ cm² e lunghezza media $L = 35$ cm. Il circuito magnetico può essere chiuso da un'ancora dello stesso materiale con eguale sezione Σ e lunghezza media $l = 15$ cm. Se lo spessore di ciascuno degli interferri è $h = 0.2$ cm e se il numero di spire dell'avvolgimento è $N = 400$, calcolare la minima corrente necessaria per attirare l'ancora annullando gli interferri nonché la forza che bisogna applicare all'ancora per aprire di nuovo il circuito magnetico (il sistema è disposto verticalmente). La densità del materiale è $\varrho = 7.8 \cdot 10^3$ Kg/m³; un tratto della curva di magnetizzazione è riportato nella tabella seguente.***

H(A/m)	B(T)
45	0.05
75	0.2
114	0.4
165	0.6
230	0.8
300	1.0
470	1.2
770	1.4
1400	1.6



Per mantenere l'ancora in equilibrio occorre che la forza magnetica attrattiva bilanci il peso dell'ancora stessa. La forza si ricava dalla (c) del problema 7.21,

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\Sigma = \frac{B^2\Sigma}{\mu_0}$$

e quindi il valore del campo magnetico è

$$B = \left(\frac{\mu_0 mg}{\Sigma}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mu_0 \Sigma l \varrho g}{\Sigma}\right)^{1/2} = (\mu_0 l \varrho g)^{1/2} = 0.12 \text{ T} \quad .$$

Per produrre questo campo occorre una corrente

$$i = \frac{1}{N}\left[\frac{h^* B}{\mu_0} + (l^* - h^*)H\right] \quad ,$$

come si deduce dalla (b) del problema 7.8, con $l^* = L + l + 2h$ e $h^* = 2h$. Il valore del campo **H** corrispondente a $B = 0.12$ T viene ricavato dalla curva di magnetizzazione con un'interpolazione lineare tra il punto ($H_1 = 45$, $B_1 = 0.05$) e il punto ($H_2 = 75$, $B_2 = 0.2$):

$$\frac{H_2 - H_1}{B_2 - B_1} = \frac{H - H_1}{B - B_1}$$

con $B = 0.12$ e H incognito; risulta $H = 59$ A/m e quindi

$$i = \frac{1}{N}\left[\frac{2hB}{\mu_0} + (L + l)H\right] = 1.03 \text{ A} \quad .$$

Per attirare l'ancora la corrente deve essere superiore a 1.03 A.

Una volta che il circuito magnetico si è chiuso il campo H vale

$$H = \frac{Ni}{L + l} = 824 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

Il campo magnetico corrispondente si ricava dalla curva di magnetizzazione con un'altra interpolazione tra ($H_1 = 770$, $B_1 = 1.4$) e ($H_2 = 1400$, $B_2 = 1.6$) e si trova $B = 1.42$ T. La forza magnetica attrattiva vale perciò

$$F = \frac{B^2\Sigma}{\mu_0} = 2016 \text{ N} \quad .$$

Il peso dell'ancora è $mg = \varrho \Sigma l g = 14.4$ N e in definitiva la forza minima da applicare deve essere di poco superiore a 2000 N: per esempio si potrebbe appendere una massa di circa 200 Kg per staccare l'ancora.

In linea di principio il sistema visto schematizza il funzionamento di un relé, costituito tipicamente da un elettromagnete che, se percorso da una corrente superiore a un certo minimo (corrente di eccitazione), attira un'ancora di ferro dolce a sua volta connessa con opportuni congegni meccanici (p.e. interruttori). Nella pratica si raggiungono sensibilità molto maggiori di quella del nostro caso, nel senso che bastano forze modeste per staccare l'ancora.

7.23. ***Un solenoide molto lungo, con sezione $\Sigma = 4$ cm² e $n = 20$ spire/cm, è alimentato da un generatore con f.em. V_0; la resistenza complessiva del circuito è $R = 3$ Ω. Parzialmente all'interno del solenoide si trova una sbarra di ferro dolce con la stessa sezione, di permeabilità magnetica relativa $\varkappa_m = 10^3$. Si supponga di far spostare la sbarra con velocità costante $v = 40$ cm/s verso l'interno o verso l'esterno del solenoide. Calcolare, nei due casi, quanto deve valere V_0 per mantenere nel circuito una corrente costante $i = 20$ A e quanto vale la forza che bisogna applicare dall'esterno alla sbarra. Discutere inoltre il bilancio energetico del sistema. Si usi l'approssimazione del solenoide indefinito.***

Consideriamo il sistema come due solenoidi; uno in aria e l'altro con nucleo di ferro; lo spostamento della sbarra causa una variazione del coefficiente di autoinduzione e quindi, per (6.9), una f.em. indotta il cui segno dipende dal verso del moto. Facendo uso della (b) del problema 7.5 scriviamo:

$$L = \mu_0 n^2 \Sigma x + \mu_0 n^2 \varkappa_m \Sigma (l - x)$$

se x è la parte del solenoide in aria e l è la lunghezza totale. La f.em. indotta vale $\mathscr{E} = -i\, dL/dt$; diciamo $dx/dt = v$ se la sbarra esce dal solenoide (primo caso) e $dx/dt = -v$ se invece la sbarra entra (secondo caso). Abbiamo

$$\mathscr{E}_1 = -i \mu_0 n^2 \Sigma v (1 - \varkappa_m) = i \mu_0 n^2 \Sigma v \chi_m \quad > 0 \quad ,$$

$$\mathscr{E}_2 = -i \mu_0 n^2 \Sigma v (-1 + \varkappa_m) = -i \mu_0 n^2 \Sigma v \chi_m \quad < 0 \quad ,$$

in accordo con la legge di Lenz. La legge di Ohm del circuito è $V_0 + \mathscr{E} = Ri$ e nei due casi si ottiene.

$$V_{0,1} = (R - \mu_0 n^2 \Sigma v \chi_m) i = 44 \text{ V} \quad ,$$

$$V_{0,2} = (R + \mu_0 n^2 \Sigma v \chi_m) i = 76 \text{ V} \quad .$$

La comparsa della f.em. indotta dallo spostamento della sbarra corrisponde a una variazione della resistenza apparente del circuito ovvero a un diverso valore della f.em. necessaria per mantenere costante il valore della corrente (diverso dal valore statico $Ri = 60$ V).

Calcoliamo la forza dall'energia magnetica espressa da (6.10):

$$dW_{\text{mag}} = \frac{i^2}{2}\, dL = -\frac{i_2}{2}\, \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m dx \quad ,$$

$$F = \frac{dW_{\text{mag}}}{dx} = -\frac{i^2}{2}\, \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m \quad .$$

Sulla sbarra agisce pertanto una forza costante che tende a risucchiarla verso l'interno comunicandole un moto uniformemente accelerato. Se si vuole che il moto della sbarra sia uniforme bisogna applicare dall'esterno la forza

$$F_{\text{est}} = -F = \frac{i^2}{2}\, \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m = 400 \text{ N} \quad .$$

Dipende poi dalle condizioni iniziali se il moto è verso l'interno o verso l'esterno del solenoide.

Il calcolo del bilancio energetico ricalca situazioni già viste. La potenza necessaria per far passare la corrente $i = 20$ A attraverso la resistenza $R = 3\ \Omega$ è $P_R = Ri^2 = 1200$ W. Quando la sbarra esce il generatore eroga una potenza $V_{0,1} i = 880$ W; l'energia magnetica diminuisce fornendo una potenza $-dW_{\text{mag}}/dt = (i^2/2)\, \mu_0 n^2 \Sigma \chi_m v$ che vale 160 W; i restanti 160 W vengono dal lavoro esterno compiuto sulla sbarra con una potenza $F_{\text{est}} v$. Quindi l'energia magnetica diminuisce, le forze del campo fanno un lavoro negativo (eguale alla diminuzione di energia) e il generatore, in corrispondenza può erogare meno energia. Quando invece la sbarra esce il generatore fornisce la potenza $V_{0,2} i = 1520$ W di cui 1200 W sono spesi sulla resistenza, 160 vanno in aumento dell'energia magnetica per unità di tempo e 160 in lavoro, sempre per unità di tempo, compiuto per fare uscire la sbarra (eguale all'aumento di energia magnetica).

7.24. ***Un elettrone (massa $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, carica $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C) si muove su di un'orbita circolare di raggio $r = 0.5 \cdot 10^{-8}$ cm con un momento angolare in modulo pari a $J = h/2\pi = 10.55 \cdot 10^{-35}$ Js. Ortogonalmente al piano dell'orbita viene generato un campo magnetico B uniforme, il cui modulo per $t = 0$ è nullo, per $0 < t < T$ cresce fino al valore $B = 0.5$ T, per $t \geq T$ resta costante. Il verso di B è uguale a quello di J. Calcolare quanto varia nel processo il momento magnetico orbitale dell'elettrone e dimostrare che il raggio dell'orbita resta costante.***

Nel problema 5.37 abbiamo calcolato l'espressione del momento magnetico legato ad un'orbita elettronica come quella descritta: precisamente

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m}\, \mathbf{J} \quad , \quad \mu = \frac{e}{2m}\, \frac{h}{2\pi} = \mu_B = 0.93 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$$

(si veda il paragrafo 5.g). Vettorialmente la situazione è mostrata in figura:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad , \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2}\, \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad ,$$

$$\mu = \frac{evr}{2}$$

(a)

Durante l'intervallo di tempo $0 < t < T$ il sistema è interessato da una variazione di campo magnetico e diviene perciò sede di un fenomeno di induzione elettromagnetica. Abbiamo già studiato un caso identico nel problema 6 22 dai cui risultati deduciamo che sull'elettrone agisce un campo elettrico, tangente all'orbita, di modulo $E = -(r/2)\, dB/dt$ e verso opposto alla velocità. Infatti, in tal caso, la forza eE agente sull'elettrone, che ha carica negativa, risulta parallela e concorde alla velocità provocandone un aumento; ciò è equivalente ad un aumento della corrente sull'orbita ovvero, siccome questa corrente per convenzione scorre in verso opposto al moto dell'elettrone, ad un aumento del flusso contrario a quello generato da **B**, proprio come vuole la legge di Lenz.

Per il calcolo quantitativo, proiettiamo sulla tangente la legge di Newton:

$$m\, \frac{dv}{dt} = eE = -e\, \frac{r}{2}\, \frac{dB}{dt} \Rightarrow dv = -\frac{er}{2m}\, dB \quad ;$$

la variazione totale della velocità, positiva visto il segno di e, risulta:

$$\Delta v = -\frac{er}{2m}\int_0^B dB = -\frac{er}{2m}\, B \quad .$$

Dalla (a) ricaviamo

$$\Delta \mu = \frac{er}{2}\,\Delta v = -\frac{e^2 r^2}{4m}\, B \quad . \qquad \text{(c)}$$

Questa relazione, valida anche vettorialmente, dice che un aumento di **B** provoca un aumento di **μ**: la variazione di momento magnetico, che possiamo chiamare momento magnetico indotto $\boldsymbol{\mu}_i$, è opposta a **B**; si verifica che si giunge alle stesse conclusioni anche con un campo **B** di verso opposto (¹).

In analogia a quanto fatto nei dielettrici (paragrafo 3c.) si può definire una *polarizzabilità magnetica* β tramite la relazione $\boldsymbol{\mu}_i = \beta\, \mathbf{B}/\mu_0$; le sue dimensioni sono i m^3. Per l'orbita elettronica circolare essa vale

$$\beta = -\mu_0\,\frac{e^2 r^2}{4m} \quad . \qquad \text{(d)}$$

Introduciamo ora i dati numerici in (c) e in (d):

$$\mu_i = \Delta\mu = -0.88 \cdot 10^{-29}\ \text{Am}^2 \quad , \quad \beta = \frac{\mu_0 \mu_i}{B} = -2.21 \cdot 10^{-35}\ \text{m}^3 \quad .$$

Rispetto al valore $0.93 \cdot 10^{-23}$ Am² del momento magnetico preesistente la variazione è dell'ordine di una parte su un milione, cioè estremamente piccola. Il corrispondente aumento di velocità dell'elettrone, ricavato da (b), è di 2.2 m/s su una velocità $v = J/mr = 2.3 \cdot 10^6$ m/s. La perturbazione persiste finché resta presente il campo **B**, varia proporzionalmente a questo e scompare con esso.

Dimostriamo ora che durante il processo il raggio dell'orbita rimane costante, come si è implicitamente ammesso nel calcolo precedente. In un istante generico la forza centripeta è mv^2/r; la variazione infinitesima dovuta al campo elettrico indotto, se il raggio è costante, vale $2mv dv/r$ e risulta pari a $-evdB$ in quanto $dv = -er dB/2$. L'aumento di forza centripeta necessario per rimanere sulla stessa orbita, pur con una diversa velocità, è dunque fornito dalla variazione della forza di Lorentz che agisce sull'elettrone (si verifichi che questa è diretta verso il centro dell'orbita). Si può così concludere che effettivamente il raggio resta costante. È da notare come nella dimostrazione si faccia uso solo di argomenti dinamici generali, senza riferirsi ad alcun tipo particolare di forza che tiene legato l'elettrone.

Questi fenomeni costituiscono la spiegazione schematica del diamagnetismo; si vede da una parte perché la suscettività sia negativa (la magnetizzazione è opposta a **B** in quanto risultante dei momenti magnetici atomici indotti, opposti a **B**) e dall'altra come l'effetto sia in generale trascurabile quantitativamente. Si capisce poi come il diamagnetismo sia un fenomeno del tutto generale; in quelle sostanze, e sono la maggior parte, nelle quali i momenti magnetici orbitali e quelli legati allo spin degli elettroni si compensano esattamente, il diamagnetismo è l'unico effetto magnetico; nei casi relativamente rari di sostanze con momento magnetico diverso da zero in assenza di campo esterno, esso è mascherato da altri fenomeni più vistosi.

(¹) Se **J** forma un angolo θ rispetto a **B** si dimostra che **J**, e quindi tutta l'orbita, precede intorno a **B** con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}_p = e\mathbf{B}/2m$ (precessione di Larmor) Il momento magnetico $\boldsymbol{\mu}_i$ associato a questo moto, tenuto conto di tutte le possibili inclinazioni dell'orbita rispetto a **B**, risulta $\boldsymbol{\mu}_i = -e^2 r^2 \mathbf{B}/6m$, poco diverso dalla (c) Si veda A Rostagni, Fisica Generale, UTET 1978, Vol II, cap V, § 16 e appendice K

7.25. ***L'argento possiede $n = 2.77 \cdot 10^{24}$ elettroni per cm³; tramite i risultati del problema 7.24 calcolarne la suscettività magnetica. Calcolare inoltre la forza che un grammo di argento subirebbe se posto nel dispositivo del problema 7.20; la densità dell'argento è $\varrho = 10.5 \cdot 10^3$ Kg/m³.***

Il calcolo da eseguire è puramente qualitativo; infatti non ci si può aspettare il valore misurato di χ_m da una formula che non contiene alcuna informazione sulla struttura dell'atomo di argento. Ad ogni modo, assumendo che tutte le orbite siano circolari, abbiano lo stesso raggio $r = 0.5 \cdot 10^{-8}$ cm e siano ortogonali al campo **B**, calcoliamo la magnetizzazione come somma di tutti i momenti magnetici orbitali indotti contenuti nell'unità di volume, utilizzando i simboli e le formule (c) e (d) del problema 7.24·

$$M = n\mu_i = n\beta\,\frac{B}{\mu_0} = -\frac{ne^2r^2}{4m}\, B$$

Resta da decidere che valore usare per **B**: infatti non siamo in presenza di una ipotetica orbita isolata, ma ci troviamo nell'interno di un materiale la cui presenza modifica il campo magnetico. Analogamente al procedimento seguito nella deduzione dell'equazione di Clausius-Mossotti (3.12), usiamo per **B** il valore nel centro di una cavità sferica praticata nel mezzo che, dal problema 7.3, sappiamo essere $B_m - 2/3\ \mu_0 M$; B_m, valore del campo nel mezzo, a sua volta è legato alla magnetizzazione dalla relazione $B_m = \mu_0(H_m + M)$. Riassumendo:

$$M = \frac{n\beta}{\mu_0}\left(B_m - \frac{2}{3}\,\mu_0 M\right) = n\beta\left(H_m + \frac{M}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\ M = \frac{n\beta}{1 - \dfrac{n\beta}{3}}\, H_m \ = \ \chi_m H_m \quad .$$

Numericamente e in modulo

$$n\beta = \mu_0\,\frac{ne^2r^2}{4m} = 6.2 \cdot 10^{-5} \quad .$$

Pertanto, con ottima approssimazione,

$$\chi_m = n\beta = -\mu_0\,\frac{ne^2r^2}{4m} = -6.2 \cdot 10^{-5} \quad .$$

Nelle tabelle si trova per l'argento $\chi_m = -2.6 \cdot 10^{-5}$; l'accordo, visto il modello semplicistico adottato, è quasi sorprendente. L'importanza del risultato risiede nel fatto che evidentemente le basi per la descrizione del diamagnetismo sono appropriate in quanto si riproducono qualitativamente gli effetti osservati e quantitativamente i corretti ordini di grandezza.

Per il calcolo della forza per unità di massa che un campione di argento risente nel dispositivo del problema 7.20, ricordiamo che $H_0 = 3.98 \cdot 10^5$ A/m e $dB/dx = 4.8$ T/m. La forza per unità di volume è pari a quella che agisce su un dipolo magnetico con momento magnetico pari alla magnetizzazione:

$$f = M\,\frac{dB}{dx} = \chi_m H_0\,\frac{dB}{dx} = 118\,\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \quad ,$$

essendosi usato il risultato del problema 7.18. Per unità di massa

$$f' = \frac{f}{\varrho} = 1.12 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{N}}{\text{Kg}}$$

e quindi la forza che agisce su un grammo è $F = 1\ 12 \cdot 10^{-5}$ N. In effetti, essendo $\chi_m = -2.6 \cdot 10^{-5}$, si troverebbe sperimentalmente $F = 0\ 47 \cdot 10^{-5}$ N.

7.26. ***Il sale paramagnetico cloruro di gadolinio*** $GdCl_3$ ***ha costante di Curie*** $C = 3.34 \cdot 10^{-4}$ **m³K/Kg** ***e densità*** $\varrho = 2.4 \cdot 10^3$ **Kg/m³*****; il numero di molecole per*** **m³** ***è*** **5.69 · 10²⁷*****. In base a questi dati calcolare il valore del momento magnetico intrinseco*** μ^* ***e la magnetizzazione di saturazione, nell'ipotesi che la variabile a data dalla (7.22) sia*** $\ll 1$.

Se $a \ll 1$ (si veda il paragrafo 7.f) la (7.21) diviene

$$M = n\mu^*\,\frac{a}{3} = \mu_0 n \mu^{*2}\,\frac{H_a}{3KT} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Come valore di H_a usiamo ancora l'espressione $H + M/3$ valida per il centro di una cavità sferica, dove H è il campo nel mezzo. Risolvendo in M:

$$M = \frac{\dfrac{\mu_0 n\mu^{*2}}{3KT}}{1 - \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\mu_0 n \mu^{*2}}{3KT}}\,H = \chi_m H \quad .$$

Poniamo $T_0 = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\mu_0 n \mu^{*2}}{3K}$, costante omogenea con la temperatura; ricaviamo allora per la suscettività magnetica l'espressione

$$\chi_m = \frac{3T_0}{T - T_0} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Vediamo di determinare l'ordine di grandezza di T_0: inserendo i valori dati otteniamo $T_0 = 5.76 \cdot 10^{43}\,\mu^{*2}$. Una stima di μ^* può essere $\mu_B = 0.93 \cdot 10^{-23}$

Am² e allora $T_0 \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ K; anche se fosse $\mu^* = 10\,\mu_B$ T_0 resterebbe inferiore al Kelvin. Assumiamo pertanto che T_0 sia trascurabile rispetto a T nella (b) e utilizziamo la (7.11).

$$\chi_m = \frac{3T_0}{T} = \frac{\mu_0 n \mu^{*2}}{3KT} = \frac{C\varrho}{T} \quad ,$$

$$\mu^* = \left(\frac{3KC\varrho}{\mu_0 n}\right)^{1/2} = 6.81 \cdot 10^{-23}\ \text{Am}^2 \simeq 7\,\mu_B \quad .$$

Vediamo a posteriori che la nostra approssimazione è giustificata ($T_0 \simeq 0.267$ K), almeno dal Kelvin in su; d'altra parte a temperatura così basse cadrebbe l'ipotesi di partenza $a \ll 1$.

La magnetizzazione di saturazione è

$$M_s = n\mu^* = 3.87 \cdot 10^5\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

Nel ferro il valore di M_s è $17.11 \cdot 10^5$ A/m, nel nichel $4.85 \cdot 10^5$ A/m, in un tipo di ferrite $3.58 \cdot 10^5$ A/m; l'ordine di grandezza è dunque lo stesso. Però, mentre nei materiali ferromagnetici è facile raggiungere la saturazione, nei paramagnetici ci si avvicina a questa in condizioni limite di campi elevati e temperature prossime allo zero assoluto. In effetti dalla (a) ricaviamo che il momento magnetico medio di una molecola indotto dalla presenza di un campo esterno è

$$\mu_i = \frac{M}{n} = \mu_0 \mu^{*2}\,\frac{H_a}{3KT} \quad .$$

In condizioni ordinarie ($H_a \sim 10^5$ A/m, T ~ 300 K) esso vale $\sim 5 \cdot 10^{-3}\,\mu_B$. Quindi l'effetto paramagnetico è piccolo: anche se ciascun dipolo magnetico elementare ha un momento paragonabile a μ_B l'agitazione termica scompagina fortemente l'ordinato allineamento dei momenti elementari con il campo applicato; solo nelle condizioni limite dette sopra si riesce a raggiungere un valore notevole per la magnetizzazione.

7.27. ***Calcolare il valore della magnetizzazione del campione di cloruro di gadolinio visto nel problema*** **7.26** ***se esso viene portato alla temperatura di*** **1 K** ***in un campo*** **H** ***di valore*** **10⁶ A/m.** ***Se poi la temperatura viene ulteriormente abbassata a*** **0.1 K** ***calcolare il valore del campo*** **H** ***sufficiente per ottenere la stessa magnetizzazione. Il grafico della funzione di Langevin è mostrato nella figura.***

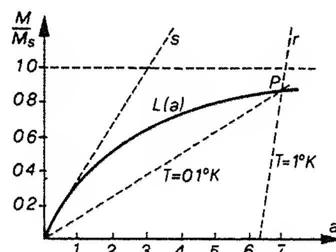
Con i dati proposti non possiamo ritenere a priori trascurabili rispetto all'unità i valori della variabile a, data dalla (7.22): infatti

$$a = \mu_0 \mu^*\,\frac{H_a}{KT} \approx 6.2 \quad . \qquad \text{(a)}$$

dove abbiamo usato per μ^* il valore trovato nel problema 7.26 e posto $T = 1$ K e $H_a \approx H$, con un'approssimazione per difetto in quanto il campo effettivamente agente sulle molecole dovrà scriversi in generale

$$H_a = H + \gamma M \quad , \qquad \text{(b)}$$

salvo porre $\gamma = 1/3$ per il caso specifico. Ci troviamo pertanto nella seguente situazione: abbiamo un'equazione di stato, la (7.21), mostrata in figura e tutti i punti della curva sono possibili stati del sistema. Notiamo per inciso che la curva mostra come la magnetizzazione tenda al valore M_s per grandi valori della variabile a, ovvero per campi elevati e basse temperature. Dobbiamo ora trovare un'altra relazione tra M/M_s e a. Allo scopo servono la (a) e la (b): sostituendo il valore di H_a dato dalla (b) nella (a) e dividendo tutto per M_s si trova



$$\frac{M}{M_s} = \frac{KT}{\gamma\mu_0\mu^* M_s}\, a - \frac{H}{\gamma M_s} \quad , \qquad \text{(c)}$$

che è una retta nel piano $(a, M/M_s)$. L'intersezione tra questa retta e la curva $M/M_s = L(a)$ della figura rappresenta lo stato del sistema, ovvero il valore della magnetizzazione del cloruro di gadolinio per i dati valori di **H** e di T.

Nel calcolo numerico usiamo $\gamma = 1/3$ e $M_s = 3.87 \cdot 10^5$ A/m, valore calcolato nel problema 7.26; lasciando in evidenza T e H

$$\frac{M}{M_s} = 1.25\,Ta - 7.75 \cdot 10^{-6}\, H \quad , \qquad \text{(d)}$$

da cui per $T = 1$ K e $H = 10^6$ A/m abbiamo la retta r della figura:

$$\frac{M}{M_s} = 1.25a - 7.75 \quad .$$

Il punto P di intersezione tra r e $L(a)$, trovato per via grafica, ha le coordinate

$$a(P) = 6.9 \quad , \quad \frac{M}{M_s}(P) = 0.87$$

e pertanto la magnetizzazione del cloruro di gadolinio vale

$$M = 0.87\; M_s = 3.37 \cdot 10^5 \;\frac{\text{A}}{\text{m}} \quad .$$

Se ora vogliamo trovare quanto deve valere il campo **H** per mantenere lo stesso rapporto $M/M_s = 0.87$ alla temperatura di 0.1 K, cominciamo con l'osservare innanzitutto che lo stato del sistema rappresentato dal punto P resta lo stesso; cambia invece la retta (c) che passa per P, sia come coefficiente angolare che come intercetta con l'asse M/M_s. Il valore numerico del campo **H** si

ricava dalla (d) con $M/M_s = 0.87$, $a = 6.9$ e $T = 0.1$ K; si trova $H = 0$.

Di questo risultato, abbastanza sorprendente, diamo prima una spiegazione analitica. Dal fatto che la curva $L(a)$ di Langevin per $a \ll 1$ è bene approssimata da una retta con coefficiente angolare $m = 1/3$, indicata dalla retta s della figura, viene spontaneo dividere le rette (c) in due classi, quelle con $m < 1/3$ e quelle con $m > 1/3$. Essendo

$$m = \frac{KT}{\gamma\mu_0\mu^* M_s}$$

vediamo che c'è una temperatura critica T_0 che separa le due classi di rette:

$$T_0 = \frac{\gamma\mu_0\mu^* M_s}{3K} = \frac{1}{3}\,\frac{\mu_0\mu^* M_s}{3K} \quad , \qquad \text{(e)}$$

la seconda eguaglianza valendo nel caso che sia $\gamma = 1/3$, come abbiamo finora ammesso. Nel cloruro di gadolinio $T_0 = 0.267$ K secondo quanto calcolato nel problema 7.26.

Le rette con $m > 1/3$, ovvero $T > T_0$, intersecano la curva $L(a)$ solamente in un punto. A parte il caso in cui T sia dell'ordine del Kelvin, caso visto in questo problema, esse hanno un coefficiente angolare $(= T/3T_0)$ elevato e, pur con i massimi valori possibili di **H**, sono confinate in una zona in cui l'intercetta con l'asse a è molto minore di 1. La risoluzione del sistema equivale allora alla risoluzione di un sistema di due rette ed è stata trattata nel problema 7.26 Fisicamente è il caso del paramagnetismo ordinario, con $M \ll M_s$.

Le rette con $m < 1/3$, ovvero $T < T_0$, possono invece incontrare la curva $L(a)$ in un punto se H è diverso da zero o anche in due punti (di cui uno è l'origine) se H è nullo; questo perché si considera che abbiano senza fisico solo valori positivi o nulli della variabile a (geometricamente l'intercetta delle rette (c) con l'asse a è sempre non negativa e quella con l'asse M/M_s è sempre non positiva). Pertanto al di sotto della temperatura critica T_0 l'interazione magnetica tra i momenti dei dipoli è tale da mantenerli bloccati quasi tutti in una stessa direzione anche se si annulla il campo **H** esterno (magnetizzazione spontanea, $H_a = \gamma M$).

È evidente che una teoria di questo tipo è assai attraente per tentare di spiegare il ferromagnetismo. Tra l'altro, estendendo le considerazioni ad a negativo, è possibile prevedere teoricamente il fenomeno dell'isteresi [1] C'è però una gravissima discrepanza con l'esperienza. Se prendiamo ad esempio il nichel, per il quale $\mu^* = \mu_B = 0.93 \cdot 10^{-23}$ Am², $M_s = 4.85 \cdot 10^5$ A/m, la temperatura critica che dovrebbe corrispondere esattamente alla temperatura di Curie $T_C = 631$ K, risulta dalla (e) $T_0 = 0\,137\;\gamma$. Per ottenere 631 K occorrebbe $\gamma = 4606$ e non $\gamma = 1/3$ o ad ogni modo minore di 1 come ci si aspetterebbe. Quindi la teoria di Langevin, che fu applicata da Weiss al ferromagnetismo, riesce a descrivere le caratteristiche qualitative, come ciclo di isteresi e magnetizzazione spontanea, ma non può spiegare come mai il campo molecolare $H_a = H + \gamma M$ possa essere tanto elevato; nessuna forza di origine magnetica

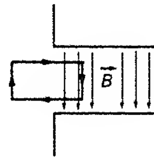
(¹) A Rostagni, Fisica Generale, UTET 1978, Vol II, cap V, § 21

può produrre un tale γ. In effetti, come fu spiegato da Heisenberg, è una interazione non magnetica, di natura quantistica e che non ha corrispondenza nella fisica classica, ad orientare concordemente gli spin degli elettroni e quindi i loro momenti magnetici.

* * *

NOTE

A. Anche per il campo magnetico si deve ripetere un avvertimento analogo a quello fatto nella nota alla fine del capitolo 2. La situazione ideale, che per esempio si assume valida nell'interferro di un elettromagnete, e cioè linee di campo parallele tra loro, modulo del campo costante all'interno e nullo all'esterno, non è realizzabile in base al teorema di Ampère. Infatti la circuitazione di **B** lungo una linea come il rettangolo della figura è nulla in quanto non c'è corrente concatenata; di conseguenza deve esserci un campo disperso che annulli la parte di circuitazione dovuta al campo interno. Solo nella zona centrale ci sarà un campo abbastanza uniforme; andando verso i bordi le linee di campo si incurvano sempre di più, uscendo alla fine dall'interferro.



Nonostante ciò il caso ideale è utile per un calcolo di prima approssimazione, che chiarisca la situazione fisica e dia almeno gli ordini di grandezza.

B. In elettrostatica l'introduzione del vettore $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ permette una semplificazione formale delle equazioni di Maxwell, che da $\text{rot}\mathbf{E} = 0$, $\text{div}\mathbf{E} = \varrho_{tot}/\varepsilon_0$ diventano $\text{rot}\mathbf{E} = 0$, $\text{div}\mathbf{D} = \varrho_{lib}$. La comparsa della carica libera al posto di quella totale, che comprende anche la carica di polarizzazione, facilita però solo apparentemente il problema. Sono pochi i casi in cui la conoscenza soltanto della carica libera basta per ricavare **D**; in generale anche **D** dipende da tutte le cariche presenti ($\text{rot}\mathbf{E} = 0$ implica $\text{rot}\mathbf{D} = \text{rot}\mathbf{P}$). La relativa inutilità di **D** è poi confermata dal fatto pratico di poter agire, più che sulle cariche, sui potenziali dei conduttori; perciò è su **E** che si ha controllo. D'altra parte gli strumenti di misura sono sensibili proprio a **E** e non a **D**.

Nella magnetostatica accanto a **B** viene introdotto il vettore $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ e le equazioni di Maxwell si scrivono $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_c$, $\text{div}\mathbf{B} = 0$ invece che $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$, $\text{div}\mathbf{B} = 0$ Però, anche in questo caso, la comparsa della sola corrente di conduzione al posto della corrente totale, comprendente anche le correnti amperiane, non vuole dire che **H** non dipende dalla corrente totale: $\text{div}\mathbf{B} = 0$ implica $\text{div}\mathbf{H} = -\text{div}\mathbf{M}$. Inoltre gli strumenti di misura sono sensibili a **B** che può così essere determinato sperimentalmente anche senza conoscere la distribuzione delle correnti amperiane. C'è un fatto pratico tuttavia che dà ad **H** quel carattere di utilità che **D** non ha: sono proprio le correnti di conduzione quelle su cui si può esercitare un controllo diretto e che si possono sempre conoscere in qualunque stadio di un processo. Perciò avere a disposizione un vettore che, pur se non sempre misurabile direttamente, ha il rotore che dipende esclusivamente da $\mathbf{j}_c$ è un fatto di non trascurabile utilità.

* * *

CAPITOLO 8

OSCILLAZIONI ELETTRICHE

8a. In un circuito chiuso costituito da un condensatore, un induttore e un resistore in serie tra loro la condizione che la tensione ai capi del condensatore sia eguale alla somma di quelle ai capi dell'induttore e del resistore si traduce nell'equazione

$$\frac{q}{C} = L\,\frac{dI}{dt} + RI \quad ; \tag{8.1}$$

usiamo per la corrente la lettera maiuscola in quanto dovremo più avanti introdurre l'unità immaginaria. Derivando rispetto al tempo, con $I = -dq/dt$, si ottiene

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0 \quad . \tag{8.2}$$

L'integrale generale di questa equazione è la funzione

$$I(t) = A\,e^{\alpha t} + B\,e^{\beta t} \tag{8.3}$$

con A e B costanti da determinare in base alle condizioni iniziali e

$$\alpha = -\delta + (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad , \quad \beta = -\delta - (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad , \tag{8.4}$$

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{coefficiente di smorzamento} \quad , \tag{8.5}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{(LC)^{1/2}} \quad \text{pulsazione propria} \quad . \tag{8.6}$$

A seconda della relazione intercorrente tra δ e ω_0 la (8.3) presenta caratteristiche differenti. Si vede da (8.4) che i casi sono tre:

1) *regime esponenziale smorzato*, $\delta^2 > \omega_0^2$
α e β sono due numeri reali negativi; la corrente ha un andamento la cui caratteristica predominante è una decrescita esponenziale (vedi problema 8.3);
2) *regime di smorzamento critico*, $\delta^2 = \omega_0^2$
la (8.3) assume la forma $Ae^{-\delta t}(1 + Bt)$; vedremo le proprietà di questo caso nel problema 8.2;

3) *regime oscillatorio smorzato*, $\delta^2 < \omega_0^2$
α e β sono due numeri complessi coniugati e la corrente ha un andamento sinusoidale con ampiezza che decresce esponenzialmente (problema 8.1).

In tutte e tre le situazioni, passato un tempo che è determinato dalle costanti del circuito, la corrente si annulla; si parla di regime transitorio del circuito.

8b. Gli argomenti riassunti nel paragrafo precedente ricalcano il caso visto in meccanica dell'oscillatore armonico smorzato, dove lo smorzamento è dato dall'attrito viscoso del mezzo e la pulsazione propria dipende dalla massa e dalla costante elastica della forza di richiamo. Molto più importante nella pratica è l'oscillatore armonico forzato da una sollecitazione esterna sinusoidale. Per il circuito RLC in serie ciò equivale ad aggiungere nella (8.1) un termine $V(t) = V_0 \cos \omega t$ che rappresenta la f.em. fornita da un generatore. La (8.2) diventa

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = -\frac{\omega V_0}{L} \operatorname{sen} \omega t \qquad (8.7)$$

che ammette la soluzione

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) \quad , \qquad (8.8)$$

la pulsazione è la stessa che ha la f.em. esterna e le costanti valgono

$$I_0^2 = \frac{\omega^2 V^2}{L^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \quad , \qquad (8.9)$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\delta\omega} \quad . \qquad (8.10)$$

Sia l'ampiezza che la fase della risposta del sistema alla sollecitazione esterna sono funzioni della pulsazione di quest'ultima.

Il regime rappresentato da (8.8) si chiama regime permanente del circuito; esso rimane l'unico regime solo dopo che si è esaurito il regime transitorio. Infatti l'integrale generale della (8.7) è la somma di (8.3) e di (8.8).

8c. Il regime permanente (8.8) si dice spesso alternato, dizione a rigore impropria anche se comunemente accettata. Infatti per grandezza alternata si intende una grandezza periodica con valor medio nullo su un periodo; grandezze proporzionali a un seno o a un coseno ne sono evidentemente casi particolari.

Caratteristica essenziale della corrente che in regime alternato percorre un elemento di circuito R, L o C è di essere individuata da due numeri: il modulo, che ne fissa il valore massimo, e la fase, che ne dà la relazione temporale rispetto alla tensione ai capi dell'elemento. Non sussiste più la linearità, tipica della legge di Ohm, nella relazione tra tensione e corrente, cioè queste due grandezze non sono proporzionali l'una all'altra e vengono meno tutte le regole risolutive viste nei circuiti in regime continuo.

Un metodo usato per la risoluzione dei circuiti in regime alternato è quello cosiddetto vettoriale, o della costruzione di Fresnel; è identico al metodo utilizzato per sommare due moti armonici semplici sullo stesso asse con eguali pulsazioni.

Un metodo alternativo, che adottiamo in questo capitolo, è quello detto simbolico in cui le grandezze alternate vengono rappresentate tramite numeri complessi. Una funzione reale del tipo $x = x_0 \cos(\omega t + \phi)$ viene rappresentata dalla funzione complessa $x = x_0 e^{i(\omega t + \phi)}$; secondo la formula di Eulero $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ la parte reale della funzione complessa coincide con la funzione reale di partenza. Si adotta perciò la seguente convenzione: alle grandezze alternate si sostituiscono le corrispondenti grandezze complesse e si opera su di queste, salvo alla fine prendere la parte reale del risultato. Il grande vantaggio del metodo simbolico consiste nel fatto di ripristinare, come vedremo, una relazione lineare tra tensione e corrente (complesse) in un elemento di circuito. Pertanto si possono scrivere le equazioni in regime alternato esattamente nella maniera vista per i circuiti in regime continuo; a grandezze reali sono sostituite grandezze complesse, ma non per questo cambia l'algoritmo, di modo che, in particolare, sono applicabili nella stessa forma i principi di Kirchhoff, ovvero i metodi delle maglie e dei nodi.

8d. Per esemplificare quanto detto e ricavare alcune formule utilissime calcoliamo la tensione $V = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ ai capi di elementi R, L, C se questi sono percorsi dalla corrente $I = I_0 \cos \omega t$; ϕ è l'angolo di sfasamento introdotto dall'elemento.

1) *Resistore.*

È il caso più facile: tensione e corrente sono proporzionali secondo la legge di Ohm $V = RI$; il coefficiente è reale e non c'è sfasamento.

2) *Induttore.*

$$V = L\frac{dI}{dt} = -\omega L I_0 \operatorname{sen} \omega t = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$

La tensione all'istante t non è proporzionale alla corrente in quell'istante, bensì al valore assunto dopo un quarto di periodo; si usa dire che la tensione è in anticipo sulla corrente di $\pi/2$. È $V_0 = \omega L I_0$; il rapporto $X_L = V_0/I_0 = \omega L$ si chiama reattanza dell'induttore; essa aumenta con la pulsazione.

Nella notazione complessa $I = I_0 e^{i\omega t}$ e segue

$$V = L\frac{dI}{dt} = i\omega L I_0 e^{i\omega t} = i\omega L I \qquad (8.11)$$

I valori complessi della tensione e della corrente sono proporzionali tra loro attraverso il coefficiente complesso

$$Z = \frac{V}{I} = i\omega L = \omega L e^{i\pi/2} = Z_0 e^{i\pi/2} \tag{8.12}$$

detto impedenza (complessa) dell'induttore; il suo modulo è $Z_0 = X_L = \omega L$ e la sua fase è $\phi = \pi/2$. Pertanto

$$V = ZI = \omega L e^{i\pi/2}\, I_0 e^{i\omega t} = \omega L I_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

e passando alla parte reale vediamo che essa vale $\omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ come trovato in precedenza.

3) *Condensatore.*

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{I_0}{C}\int \cos\omega t\, dt = \frac{I_0}{\omega C}\,\text{sen}\,\omega t$$
$$= \frac{I_0}{\omega C}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La tensione all'istante t è proporzionale al valore che la corrente assume un quarto di periodo prima, cioè è in ritardo sulla corrente di $\pi/2$. È $V_0 = I_0/\omega C$; il rapporto $X_C = V_0/I_0 = 1/\omega C$ si dice reattanza del condensatore; essa decresce al crescere della pulsazione.

Utilizzando la rappresentazione complessa si arriva a:

$$V = \frac{1}{i\omega C} I = -\frac{i}{\omega C} I \quad , \tag{8.13}$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-i\pi/2} = Z_0\, e^{-i\pi/2} \quad . \tag{8.14}$$

Z_0 è l'impedenza (complessa) del condensatore; il suo modulo è $Z_0 = X_C = 1/\omega C$, la sua frase è $-\pi/2$. Quindi

$$V = ZI = \frac{1}{\omega C}\, e^{-i\pi/2}\, I_0 e^{i\omega t} = \frac{I_0}{\omega C}\, e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

e la parte reale dà il risultato trovato prima.

Le derivazioni precedenti mostrano la grande utilità della rappresentazione simbolica: essa permette di estendere la legge di Ohm nella forma generalizzata $V = ZI$ ai componenti L e C purché si usino grandezze complesse; in altre parole, il passaggio al campo complesso linearizza anche per L e C la relazione tra tensione e corrente assorbendo nel fattore di proporzionalità le informazioni sulla connessione tra i moduli e tra le fasi. La ragione matematica sta nel fatto che si passa da funzioni circolari a funzioni esponenziali; per queste ultime derivate e integrali sono sempre proporzionali alla funzione di partenza, mentre lo stesso non succede per il seno e per il coseno. Il modulo dell'impedenza pertanto dà il rapporto tra i moduli della tensione e della corrente mentre la sua fase dà la differenza delle fasi ovvero lo sfasamento introdotto dall'elemento.

Queste proprietà restano vere anche se invece di un elemento si ha una disposizione più o meno complicata di R, L e C; si può sempre stabilire una relazione di proporzionalità tra V e I tramite serie, paralleli, eventualmente trasformazioni triangolo-stella o, in modo più semplice, attraverso il teorema di Thevenin (si estendono i risultati dei problemi 4.3 e 4.7).

L'espressione generale dell'impedenza è

$$Z = Z_0 e^{i\phi} = Z_0\cos\phi + iZ_0\,\text{sen}\,\phi = Z_R + iZ_X \quad .$$
$$Z_0 = (Z_R^2 + Z_X^2)^{1/2} \quad , \quad \text{tg}\,\phi = \frac{Z_X}{Z_R} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad . \tag{8.15}$$

La parte immaginaria Z_X si dice reattanza; se essa è positiva si parla di comportamento induttivo (ed è $\phi > 0$), se invece è negativa si parla di comportamento capacitivo (ed è $\phi < 0$).

Per le serie e i paralleli si ha rispettivamente.

$$Z_{tot} = Z_1 + Z_2 + .. + Z_n \quad , \quad \frac{1}{Z_{tot}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n} \quad .$$

È utile alle volte considerare l'inverso dell'impedenza che viene detto ammettenza $Y = I/V$:

$$Y = Y_0 e^{i\psi} = Y_0\cos\psi + iY_0\,\text{sen}\,\psi = G + iB \quad .$$
$$Y_0 = (G^2 + B^2)^{1/2} \quad , \quad \text{tg}\,\psi = -\text{tg}\,\phi = \frac{B}{G} = -\frac{Z_X}{Z_R} \quad . \tag{8.16}$$

La parte reale G si dice conduttanza, quella immaginaria B suscettanza.

Sia la parte reale che quella immaginaria dell'impedenza sono in generale funzioni della pulsazione ω; da ciò segue che anche la risposta di un circuito in regime alternato varia con ω. Se in particolare per una certa pulsazione $Z_X = 0$ allora l'impedenza è puramente reale, V e I sono in fase: si parla di *risonanza* del circuito a quella certa pulsazione.

8e. Da un punto di vista formale la correttezza della rappresentazione simbolica si giustifica in base alle proprietà delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Precisamente, se $x(t) = a(t) + ib(t)$ è soluzione di una tale equazione il cui termine noto è $f(t) = f_a(t) + if_b(t)$, $a(t)$ è soluzione della stessa equazione quando il termine noto è $f_a(t)$. In particolare, con riferimento a (8.7), $x_0 e^{i(\omega t - \phi)}$ e $x_0\cos(\omega t - \phi)$ sono soluzioni della stessa equazione quan-

do il termine noto sia, rispettivamente, un esponenziale complesso o la sua parte reale.

In relazione alla procedura di prendere, alla fine dei calcoli, la parte reale del risultato, occorre una precisazione importante: essa è applicabile a relazioni del tipo $V = ZI$ o a somme di tali relazioni (la parte reale di una somma è eguale alla somma delle parti reali degli addendi) e quindi, in generale, alle equazioni delle reti lineari. Quando però si fanno considerazioni energetiche eseguendo calcoli di potenze, cioè di prodotti tra tensione e corrente, non si può usare l'espressione VI con i fattori complessi e prenderne la parte reale: la parte reale di un prodotto di numeri complessi non è eguale al prodotto delle parti reali. È quest'ultimo, $\mathrm{Re}\{V\} \cdot \mathrm{Re}\{I\}$, ad avere il significato di potenza e non $\mathrm{Re}\{VI\}$. In effetti non c'è nessuna ragione per definire come potenza complessa il prodotto VI; questa estensione al campo complesso non è legittima come quella della legge di Ohm.

Se si sviluppa il prodotto $I_0 \cos\omega t V_0 \cos(\omega t + \phi)$ si trova (¹) che la potenza istantanea consta di due termini, entrambi con pulsazione 2ω, sfasati tra loro di $\pi/2$. Il primo, $1/2\, I_0 V_0 \cos\phi(1 + \cos 2\omega t)$, ha valor medio su un periodo eguale a

$$P = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos\phi \quad , \tag{8.17}$$

Il secondo, $-1/2 I_0 V_0 \mathrm{sen}\,\phi\, \mathrm{sen}\, 2\omega t$, ha valor medio nullo e valor massimo

$$Q = \frac{1}{2} I_0 V_0 \mathrm{sen}\,\phi \quad . \tag{8.18}$$

P si dice potenza reale ed è quella effettivamente dissipata nel circuito; Q si dice potenza reattiva e viene alternativamente ceduta e assorbita dal generatore. Formalmente P e Q sono i cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa si chiama potenza apparente

$$S = (P^2 + Q^2)^{1/2} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \quad . \tag{8.19}$$

Spesso nella pratica al posto del valor massimo si usa il valore efficace, il cui quadrato è definito come media su un periodo del quadrato della grandezza alternata. Ricordando che $\int_0^{\pi} \cos^2 \omega t\, d\omega t = \pi/2$ e che il periodo del quadrato del coseno è appunto π, si ha

$$A^2_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} A_0^2 \cos^2 \omega t\, \omega t = \frac{1}{2} A_0^2 \quad \Rightarrow \quad A_{\mathrm{eff}} = 2^{-1/2} A_0 \quad .$$

Per questa ragione al posto di $1/2\, I_0 V_0$ si può scrivere $I_{\mathrm{eff}} V_{\mathrm{eff}}$. La (8.17) è nota come formula di Galileo Ferraris e $\cos\phi$ come fattore di potenza.

(¹) A. Rostagni, Fisica Generale, UTET, Vol II, cap VI, § 19

8f. L'interesse per la risposta di un sistema lineare, come un circuito elettrico, ad una sollecitazione sinusoidale è determinato dal fatto che una qualunque funzione periodica, sotto opportune ipotesi, può essere espressa come somma di una serie di termini sinusoidali. Questo risultato, noto come teorema di Fourier, e il principio di sovrapposizione permettono di ricavare la risposta di un sistema lineare sottoposto ad una eccitazione periodica qualunque. Per esempio, se ad un circuito si applica una f.em. $V(t)$ periodica, si calcola la serie di Fourier di questa e si determinano le correnti corrispondenti a ciascun termine della serie; la corrente totale, dovuta a $V(t)$, è la somma delle singole correnti.

Il teorema di Fourier è applicabile a una funzione $f(t)$ periodica, derivabile, con valor medio finito nel periodo T e al più un numero finito di discontinuità in un periodo; per tale funzione vale lo sviluppo

$$f(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_n\, (a_n \cos n\omega t + b_n \mathrm{sen}\, n\omega t) \quad ;$$

i coefficienti sono dati dalle espressioni:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \quad , \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t\, dt \quad ,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \mathrm{sen}\, n\omega t\, dt \quad . \tag{8.21}$$

Utilizzando l'identità trigonometrica

$$a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta = c\cos(\theta - \phi) \quad ,$$
$$c = (a^2 + b^2)^{1/2} \quad , \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{b}{a} \quad , \tag{8.22}$$

la (8.20) si può anche scrivere nella forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{1}^{\infty}{}_n\, c_n \cos(n\omega t - \phi_n) \tag{8.23}$$

dove c_n e ϕ_n sono legati ai coefficienti (8.21) da formule tipo (8.22). Il termine a_0 è il valor medio della funzione; il termine con $n = 1$ si dice fondamentale, quelli successivi si dicono armoniche superiori (seconda, terza, ...). La determinazione dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier si indica col nome di analisi armonica della funzione $f(t)$.

Se un circuito, cui è applicata la tensione $V = V_0 + \Sigma_n V_n \cos(n\omega t + \phi_n)$, assorbe la corrente $I = I_0 + \Sigma_n I_n \cos(n\omega t + \psi_n)$, si dimostra che la potenza media in esso dissipata vale

$$P = I_0 V_0 + \frac{1}{2} I_1 V_1 \cos\alpha_1 + \frac{1}{2} I_2 V_2 \cos\alpha_2 + \ldots \quad , \tag{8.24}$$

con $\alpha_n = \phi_n - \psi_n$. È interessante notare come non ci sia mescolamento tra diverse armoniche; ai fini della potenza ciascuna è indipendente dalle altre. Dalla struttura di (8.24) si può dedurre che il valore efficace di V o I è:

$$V^2_{\text{eff}} = V_0^2 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{V_2^2}{2} + \dots \quad , \quad I^2_{\text{eff}} = I_0^2 + \frac{I_1^2}{2} + \frac{I_2^2}{2} + \dots \quad . \qquad (8.25)$$

8h. L'unica grandezza nuova introdotta in questo capitolo è l'impedenza che si misura evidentemente in ohm. È usuale poi esprimere P in watt, Q in voltampere reattivi (var), S in voltampere (va); è solo questione di terminologia, tutte e tre le unità sono pari a Js^{-1}.

Quasi sempre invece della pulsazione ω si dà la frequenza ν o, meno spesso, il periodo T; la relazione tra tali grandezze è $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. L'unità di misura della frequenza è l'hertz (Hz), numero di cicli al secondo, pari quindi a s^{-1}.

Elenchiamo infine alcune relazioni riguardanti i numeri complessi:

numero complesso $z = a + ib = \varrho e^{i\phi} = \varrho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$

modulo $\varrho = (a^2 + b^2)^{1/2}$, fase $\phi = \text{arctg}\,\dfrac{b}{a}$

complesso coniugato $z^* = a - ib = \varrho e^{-i\phi}$

inverso $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{(a + ib)\,(a - ib)} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\,\dfrac{b}{a^2 + b^2} = \dfrac{1}{\varrho}\,e^{-i\phi}$

dati due numeri complessi $z_1 = \varrho_1 e^{i\phi_1}$, $z_2 = \varrho_2 e^{i\phi_2}$.

prodotto $z_1 z_2 = \varrho e^{i\phi}$, $\varrho = \varrho_1\varrho_2$, $\phi = \phi_1 + \phi_2$

quoziente $z_1/z_2 = \sigma\, e^{i\psi}$, $\sigma = \varrho_1/\varrho_2$, $\psi = \phi_1 - \phi_2$.

L'unità immaginaria è i, radice quadrata di -1; è evidente che $1/i = -i$, cioè i può essere spostata da numeratore a denominatore e viceversa purché si cambi il segno della frazione. Dalla formula di Eulero segue poi $i = e^{i\pi/2}$, $-1 = e^{i\pi}$

* * *

8.1. ***Un condensatore viene caricato alla d.d.p. $V_0 = 10^4$ V e successivamente connesso ad un induttore e ad un resistore in serie. Calcolare, in funzione del tempo, la corrente e le tensioni ai capi del condensatore e dell'induttore; calcolare inoltre in quale istante t_0 la corrente è massima e quanto vale questo massimo. I valori delle costanti del circuito sono $C = 5\ \mu$F, $L = 20$ H, $R = 800\ \Omega$.***

Si tratta di un circuito RLC in serie e quindi la soluzione è la (8.3); inoltre $\delta = R/2L = 20\ \text{s}^{-1}$, $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 100\ \text{s}^{-1}$: essendo $\delta < \omega_0$ siamo nel caso dell'andamento oscillatorio smorzato. Posto $\Omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, la corrente ha l'espressione

$$I(t) = e^{-\delta t}(A\,e^{i\Omega t} + B\,e^{-i\Omega t}) = e^{-\delta t}\,[(A + B)\cos\Omega t + i(A - B)\,\text{sen}\,\Omega t]$$

Dovendo essere $I(t)$ reale sembrerebbe necessario porre $A = B$; però in questa maniera resterebbe una sola costante, $A + B$, che non è sufficiente a soddisfare due condizioni iniziali. L'unica possibilità è allora che A e B siano complessi coniugati, $A = De^{i\phi}$ e $B = De^{-i\phi}$; segue $A + B = D\cos\phi$, $A - B = iD\,\text{sen}\,\varphi$. $I(t) = De^{-\delta t}$ ($\cos\Omega t\cos\phi - \text{sen}\,\Omega t\,\text{sen}\,\varphi$) e finalmente otteniamo la soluzione del problema nella forma

$$I(t) = De^{-\delta t}\cos(\Omega t + \phi) \quad ; \qquad (a)$$

δ e Ω dipendono dal circuito, D e ϕ dalle condizioni iniziali.

Queste si determinano in base alle considerazioni seguenti: per $t = 0$ deve essere $I = 0$; infatti se un istante prima della connessione al sistema RL la corrente era nulla, tale deve restare anche al momento del contatto, non potendoci essere in un circuito induttivo una discontinuità nella corrente (ne risulterebbe una f.em. indotta infinita) Inoltre, all'istante $t = 0$, la (8.1) si scrive

$$\frac{q(0)}{C} = V_0 = L\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} + RI(0) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{L} \quad .$$

Dalla (a) per $t = 0$ otteniamo così il sistema

$$I(0) = D\cos\phi = 0$$

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = -D(\delta\cos\phi + \Omega\,\text{sen}\,\varphi) = -D\Omega\,\text{sen}\,\phi = \frac{V_0}{L}$$

che ha le soluzioni $D = -V_0/\Omega L$, $\phi = \pi/2$ e $D = V_0/\Omega L$, $\phi = -\pi/2$ per cui in ogni caso la (a) diviene

$$I(t) = \frac{V_0}{\Omega L}\,e^{-\delta t}\,\text{sen}\,\Omega t \quad . \qquad (b)$$

La corrente ha un andamento oscillatorio smorzato: parte da zero e tende ad annullarsi asintoticamente descrivendo oscillazioni con ampiezza esponenzialmente decrescente. Non si può parlare di fenomeno periodico in senso proprio perché dopo un'oscillazione completa, ossia dopo un tempo

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}} \quad , \qquad (c)$$

l'ampiezza risulta ridotta del fattore $e^{-\delta T}$; per tale motivo T è spesso chiamato pseudoperiodo. Si noti che sulla decrescita dell'ampiezza gioca solo il parametro δ: da $\delta = R/2L$ si deduce che tanto minore è la resistenza elettrica tanto

minore è lo smorzamento ovvero tanto maggiore è la durata del fenomeno; la costante di tempo è appunto $\tau = 1/\delta = 2L/R$. In termini delle costanti del circuito la condizione di smorzamento oscillatorio $\delta^2 < \omega_0^2$ si scrive $R^2 < 4L/C$; tratteremo il caso limite $R = 0$ nel problema 8.5.

Infine il massimo della corrente si determina annullando la derivata della (b): risulta $t_0 = \dfrac{1}{\Omega}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\Omega}{\delta}$ per cui $I_{max} = I(t_0)$.

Numericamente

$$\Omega = 98\ \mathrm{s}^{-1}\quad,\quad T = 6.4\cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}\quad,\quad t_0 = 1.4\cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}\quad,$$

$$I(t) = 5.1 e^{-20t}\,\mathrm{sen}\,98t\ \ \mathrm{A}\quad,\quad I_{max} = 3.78\ \mathrm{A}\quad.$$

L'andamento è mostrato nella figura insieme a quello di V_L e V_C che adesso calcoliamo.

Ai capi dell'induttore

$$V_L = L\,\frac{dI}{dt} = \frac{V_0}{\Omega}\,e^{-\delta t}(\Omega\cos\Omega t - \delta\,\mathrm{sen}\,\Omega t)$$

$$= \frac{V_0\omega_0}{\Omega}\,e^{-\delta t}\cos(\Omega t + \phi)\qquad :$$

si sono usate le (8.22), con $\phi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{\delta}{\Omega}$, e la definizione di Ω.

Ai capi del condensatore

$$V_C = V_L + RI$$

$$= \frac{V_0}{\Omega}\,e^{-\delta t}\,(\Omega\cos\Omega t + \delta\,\mathrm{sen}\,\Omega t)$$

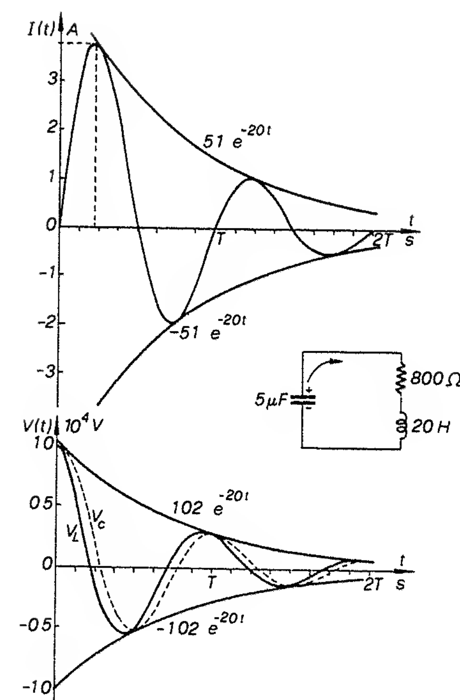
$$= \frac{V_0\omega_0}{\Omega}\,e^{-\delta t}\cos(\Omega t - \phi).$$

Numericamente

$$V_L = 1.02\cdot 10^4 e^{-20t}\cos(98t + 0.20),$$

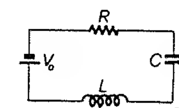
$$V_C = 1.02\cdot 10^4 e^{-20t}\cos(98t - 0.20).$$

L'interpretazione qualitativa è semplice: il condensatore inizia a scaricarsi nell'istante $t = 0$ e fa circolare corrente, per esempio nel verso indicato in figura; tale verso si conserva finché V_L non eguaglia V_C e la corrente si annulla ($t = T/2$). Poi la corrente percorre il circuito in senso inverso finché di nuovo V_L non eguaglia V_C e non si realizza una nuova inversione ($t = T$) e così via. Nell'intervallo 0, $T/2$ il condensatore si scarica totalmente e inizia a caricarsi con segno contrario a quello iniziale (di qui derivano le inversioni della corrente); i valori massimi di V_C in ogni semiperiodo vengono raggiunti quando la corrente si annulla.



L'energia iniziale è $1/2\ CV_0^2$; col passaggio della corrente una parte di questa energia si trasforma in energia intrinseca della corrente $1/2\ LI^2$ e una parte viene dissipata per effetto Joule su R. Ogni qual volta V_C si annulla tutta l'energia residua immagazzinata nel circuito è di tipo magnetico, mentre ogni qual volta V_L si annulla essa è di tipo elettrostatico. A causa della dissipazione su R si ha di necessità uno smorzamento dell'oscillazione e alla fine il fenomeno cessa proprio perché tutta l'energia inizialmente a disposizione si è tramutata in calore.

8.2. ***Nel circuito in figura il generatore di f.em. $V_0 = 100$ V è chiuso, all'istante $t = 0$, su un circuito RLC in serie con i valori $R = 2\cdot 10^3\ \Omega$, $L = 10^{-2}$ H, $C = 10$ nF. Calcolare in funzione del tempo la corrente nel circuito e le tensioni ai capi dell'induttore e del condensatore, che si suppone inizialmente scarico.***



L'equazione del circuito è

$$V_0 - L\,\frac{dI}{dt} - RI = V_C = \frac{q}{C}$$

da cui derivando rispetto al tempo (ora $I = dq/dt$) si ottiene

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0 \quad ,$$

cioè la (8.2). La presenza della f.em. costante non altera la struttura dell'equazione, ma influisce sulle condizioni iniziali. Deve essere $I(0) = 0$ (vedi problema 8.1) e $V_0 - L(dI/dt)_{t=0} - RI(0) = V_C(0)$; poiché sia $I(0)$ che $V_C(0)$ sono nulli, $(dI/dt)_{t=0} = V_0/L$. I parametri δ e ω_0 valgono

$$\delta = \frac{R}{2L} = 10^5\ s^{-1} \quad , \quad \omega_0 = (LC)^{-1/2} = 10^5\ s^{-1} \quad .$$

La loro eguaglianza comporta, secondo (8.4), che α e β siano reali e coincidenti, con valore $-\delta$; in tal caso la (8.3) diviene $I(t) = (A + B)\ e^{-\delta t} = De^{-\delta t}$ Questa può essere però solo una soluzione particolare in quanto contiene una sola costante arbitraria mentre le condizioni iniziali sono due Occorre perciò trovare un'altra soluzione particolare; quella generale sarà data da una combinazione lineare delle due. Si verifica facilmente che $te^{-\delta t}$ è soluzione della (8.2) quando $\delta = \omega_0$. Quindi

$$I(t) = e^{-\delta t}(D + Ft) \quad .$$

Già dalla struttura della formula vediamo che il fenomeno si presenta diverso rispetto al caso $\delta^2 < \omega_0^2$: è scomparsa l'oscillazione ed è rimasta la decrescita esponenziale, che viene chiamata critica per distinguerla da un altro caso che vedremo nel problema 8.3.

Dalle condizioni iniziali si ricava $D = 0$ e $F = V_0/L$ e in conclusione

$$I(t) = \frac{V_0 t}{L}\ e^{-\delta t} = 10^4 t e^{-10^5 t} \quad \text{A} \quad .$$

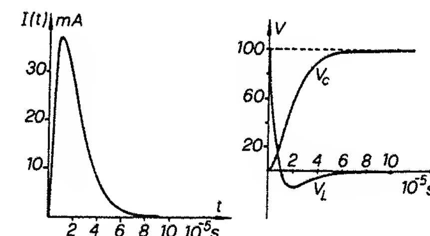
Applicando la relazione $V_L = L\ dI/dt$ otteniamo

$$V_L = V_0 e^{-\delta t}(1 - \delta t) = 10^2 e^{-10^5 t}(1 - 10^5 t) \quad \text{V} \quad ,$$

mentre da $V_C = V_0 - V_L - RI$, ricordando che $\delta = R/2L$, ricaviamo

$$V_C = V_0[1 - e^{-\delta t}(1 + \delta t)] = 10^2[1 - e^{-10^5 t}(1 + 10^5 t)] \quad \text{V} \quad .$$

È facile verificare che per t tendente all'infinito V_C tende a V_0. In realtà, visto che la costante di tempo $\tau = 1/\delta = 10^{-5}$ s è molto piccola, la corrente si estingue molto rapidamente e V_C assume il valore V_0 molto presto. Gli andamenti nel tempo di $I(t)$, $V_L(t)$ e $V_C(t)$ sono mostrati in figura La corrente di carica del condensatore cresce velocemente raggiungendo il suo valor massimo per $t = \tau$ ($I_{max} = 36.8 \cdot 10^{-3}$ A) per poi decrescere tendendo asintoticamente a zero. La tensione V_L ai capi dell'induttore parte dal valore iniziale V_0, decresce restando positiva finché la corrente cresce, si annulla quando $I(t)$ è massima e diviene negativa per il resto del tempo tendendo a zero. Infine V_C cresce monotonamente tendendo a V_0.

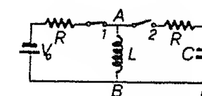


Il caso visto segna il limite in cui c'è passaggio dall'andamento oscillatorio smorzato a quello esponenziale. Dallo studio dei grafici si potrebbe quasi dire che $I(t)$ e $V_L(t)$ partono come per eseguire un'oscillazione, ma questa viene completamente smorzata in meno di mezzo periodo; oppure, sembra di vedere un'oscillazione con periodo infinito, come si ricava dalla (c) del problema 8.1 se $\delta = \omega_0$.

Lasciamo come esercizio il verificare che se nel circuito mancasse il generatore e fosse il condensatore, carico a V_0, a scaricarsi sulla serie RL le espressioni di $I(t)$ e $V_L(t)$ sarebbero le stesse, mentre $V_C(t)$ sarebbe eguale a $V_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t)$. La corrente non si invertirebbe mai, cioè V_L non riuscirebbe mai ad eguagliare V_C L'energia fornita dal condensatore si tramuterebbe in parte in calore, in parte in energia magnetica, quest'ultima però non ritornerebbe poi ad assumere forma elettrostatica, ma finirebbe presto in calore, senza cioè quello scambio caratteristico visto nel problema 8.1.

Il significato energetico della condizione di smorzamento critico ora discussa sta nel fatto che è possibile dimostrare che quando $\delta = \omega_0$ l'energia immagazzinata viene dissipata più rapidamente che in ogni altro caso o più rapidamente trasferita dal generatore al condensatore.

8.3. ***Un generatore di f.em. $V_0 = 20$ V e resistenza interna $R_0 = 25\ \Omega$ è chiuso su un induttore con $L = 4 \cdot 10^{-3}$ H (vedi figura). Stabilite le condizioni di regime, all'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore 2 e simultaneamente aperto l'interruttore 1. Determinare la corrente $I(t)$ nel circuito RLC e le tensioni $V_L(t)$ e $V_C(t)$. I valori sono $R = 400\ \Omega$, $C = 0.28\ \mu F$; il condensatore è inizialmente scarico.***



Le condizioni di regime, per la parte di sinistra, sono $I_0 = V_0/R_0 = 0.8$ A e $V_L = L\ dI/dt = 0$. Con la successiva operazione sugli interruttori abbiamo un circuito oscillante RLC la cui equazione è ancora (8.2). Le condizioni iniziali sono $I(0) = I_0$, in quanto la corrente non può-

cambiare istantaneamente nell'induttore, e

$$V_C(0) = 0 = RI0) + L\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} \Rightarrow \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{RI_0}{L} = -8 \cdot 10^4 \ \frac{\text{A}}{\text{s}} \quad .$$

Controlliamo ora la relazione tra i parametri δ e ω_0, dati da (8.5-8.6):

$$\delta = 5 \cdot 10^4 \ \text{s}^{-1} \quad , \quad \omega_0 = 3 \cdot 10^4 \ \text{s}^{-1} \quad .$$

Abbiamo così il terzo caso possibile, $\delta^2 > \omega_0^2$. Posto $\Omega = (\delta^2 - \omega_0^2)^{1/2} = 4 \cdot 10^4$ s^{-1}, la soluzione generale, secondo (8.3-8.4), è

$$I(t) = e^{-\delta t}(A\,e^{\Omega t} + B\,e^{-\Omega t}) \quad . \qquad \text{(a)}$$

Per calcolare le costanti A e B risolviamo il sistema

$$I(0) = A + B = I_0$$

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = A(\Omega - \delta) - B(\Omega + \delta) = -\frac{RI_0}{L} \quad .$$

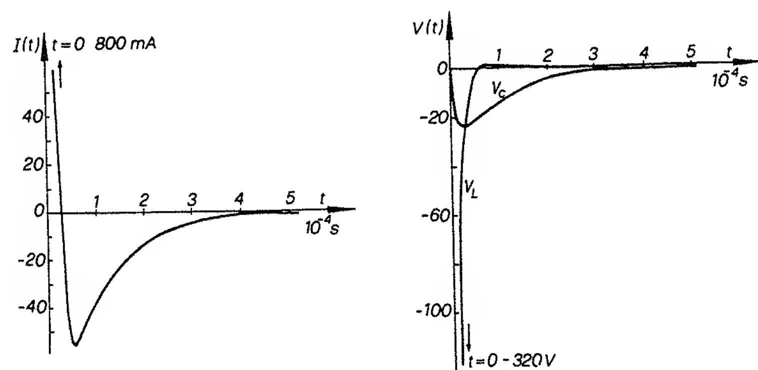
Sostituendo i valori numerici si trova $A = -0.1$, $B = 0.9$ e quindi l'espressione numerica di (a) è

$$I(t) = 0.1(9e^{-9\ 10^4 t} - e^{-10^4 t}) \quad \text{A} \quad .$$

Il calcolo di V_L e V_C segue le stesse linee viste nei problemi 8.1 e 8.2 e porta a questi risultati numerici:

$$V_L = 4(-81e^{-9\ 10^4 t} + e^{-10^4 t}) \quad \text{V} \quad ,$$

$$V_C = 36(e^{-9\ 10^4 t} - e^{-10^4 t}) \quad \text{V} \quad .$$



Dai grafici riportati in figura si nota che la corrente conserva, per $t = 0$, il suo verso nell'induttore, da A a B. di qui deriva il segno iniziale negativo di V_L e il fatto che l'armatura D si carica positivamente rispetto all'armatura E con

conseguente segno negativo per V_C. Tale processo ha termine quando V_C eguaglia V_L: in quell'istante t_0 la corrente si annulla mentre V_C è massimo; per $t > t_0$ il condensatore si scarica, la corrente si inverte e il fenomeno tende all'estinzione senza oscillazioni.

8.4. ***Un condensatore, caricato a $V_0 = 50$ V, viene connesso ad un parallelo RL (vedi figura). Calcolare come variano nel tempo la tensione ai capi del condensatore e le correnti nei tre elementi del circuito ($C = 1$ μF, $R = 250$ Ω, $L = 0.25$ H).***

La tensione V_C è la stessa ai capi dei tre elementi; la somma delle correnti nell'induttore e nel resistore deve eguagliare la corrente che passa nel condensatore. Abbiamo

$$I_C = I_R + I_L \Rightarrow \frac{dI_C}{dt} - \frac{dI_R}{dt} - \frac{dI_L}{dt} = 0 \quad .$$



Per le singole correnti scriviamo

$$I_C = -\frac{dq}{dt} = -C\,\frac{dV_C}{dt} \quad , \quad I_R = \frac{V_C}{R} \quad , \quad L\,\frac{dI_L}{dt} = V_C$$

da cui, derivando I_C e I_R, otteniamo l'equazione

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 2\delta\,\frac{dV_C}{dt} + \omega_0^2 V_C = 0 \quad , \quad \delta = \frac{1}{2RC} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad .$$

Si tratta sempre della (8.2), solo che ora l'incognita è la tensione (circuito in parallelo) e non la corrente (circuito in serie). Si verifica subito che $\delta = \omega_0 = 2 \cdot 10^3$ s^{-1} e quindi dal problema 8.2 abbiamo che la soluzione si scrive

$$V_C(t) = e^{-\delta t}(D + Ft) \quad .$$

Le costanti D e F si calcolano al solito in base alle condizioni iniziali. Per $t = 0$ $V_C = V_0$; inoltre, da $I_C = I_R + I_L$ si ha

$$-\left(\frac{dV_C}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_C(0)}{R} + I_L(0) \Rightarrow \left(\frac{dV_C}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{V_0}{RC}$$

in quanto $I_L(0) = 0$ non potendo la corrente in un induttore subire una discontinuità. Pertanto

$$V_C(0) = V_0 = D$$

$$\left(\frac{dV_C}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{V_0}{RC} = -\delta D + F \Rightarrow F = -\frac{V_0}{2RC}$$

e in definitiva

$$V_C(t) = V_0 e^{-\delta t}(1-\delta t) = 50\ e^{-2\ 10^3 t}(1-2\cdot 10^3 t)\ \text{V} \quad .$$

Le espressioni delle correnti sono

$$I_C(t) = -C\ \frac{dV_C}{dt} = CV_0\delta e^{-\delta t}(2-\delta t) = 0.2 e^{-2\ 10^3 t}(1-10^3 t) \quad \text{A} \quad ,$$

$$I_R(t) = \frac{V_C}{R} = \frac{V_0}{R}\ e^{-\delta t}(1-\delta t) = 0.2 e^{-2\ 10^3 t}(1-2\cdot 10^3 t) \quad \text{A} \quad ,$$

$$I_L(t) = I_C - I_R = \frac{V_0 \delta t}{2R}\ e^{-\delta t} = 2\cdot 10^2 t e^{-2\ 10^3 t} \quad \text{A} \quad .$$

Naturalmente, anche per il caso del parallelo, si può avere oscillazione smorzata o decrescita puramente esponenziale a seconda della relazione tra δ e ω_0.

8.5. ***Un condensatore di capacità $C = 1$ µF è chiuso su un induttore con $L = 1$ H. Se la carica iniziale del condensatore è $q_0 = 10^{-3}$ C determinare la corrente che passa nel circuito e le tensioni V_C e V_L. Descrivere inoltre il comportamento nel tempo dell'energia immagazzinata nel circuito.***

Il caso in esame è il limite (ideale) del circuito *RLC* in serie quando *R* tende a zero e del circuito *RLC* in parallelo quando *R* tende ad infinito, in entrambi i casi è il coefficiente di smorzamento δ che tende a zero. Abbiamo soluzione oscillatoria ($\delta = 0 < \omega_0$), però non smorzata, come risulta anche dalla (8.2) che, se $\delta = 0$, coincide con l'equazione dell'oscillatore armonico semplice. Quindi

$$I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad ,$$

che è eguale alla (a) del problema 8.1 posto $\delta = 0$. Siccome le condizioni iniziali sono le stesse concludiamo che

$$I(t) = \frac{V_0}{\omega_0 L}\text{sen}\,\omega_0 t = \text{sen}\,10^3 t \qquad \text{A}$$

in quanto $V_0 = q_0/C = 10^3$ V e $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 10^3\ \text{s}^{-1}$. La corrente ha andamento sinusoidale, con valore massimo $I_0 = V_0/\omega_0 L$ e pulsazione ω_0: si vede la ragione del nome pulsazione propria. Il periodo, $2\pi/\omega_0$, è sempre minore dello pseudoperiodo $2\pi/\Omega = 2\pi/(\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}$ che si avrebbe nel moto oscillatorio smorzato a parità di *L* e *C*, ma con $R \neq 0$.

La tensione ai capi dei due elementi è la stessa,

$$V_C = V_L = L\ \frac{dI}{dt} = V_0 \cos\omega_0 t = 10^3 \cos 10^3 t \quad ,$$

e risulta in quadratura di fase con la corrente. A $t = 0$ $V = V_0$, $I = 0$: il condensatore inizia a scaricarsi e la corrente aumenta; dopo un quarto di periodo $V = 0$, $I = I_0$; poi, a causa dell'inerzia che si ha in un circuito induttivo. la corrente continua a circolare nello stesso verso caricando con segno opposto il condensatore fino a che, per $t = T/2$, $V = -V_0$ e $I = 0$; di qui fino a $t = T$ si ripete, in senso inverso, lo stesso andamento.

Nell'istante generico *t* l'energia immagazzinata nel circuito è la somma di quella elettrostatica del condensatore e di quella magnetica dell'induttore:

$$W(t) = \frac{1}{2}\ C\ V_0^2 \cos^2\omega t + \frac{1}{2}\ L\left(\frac{V_0}{\omega_0 L}\right)^2 \text{sen}^2\,\omega t = \frac{1}{2}\ C\ V_0^2 \quad .$$

L'energia totale è costante ed è eguale a quella posseduta inizialmente dal condensatore. Essa passa alternativamente, e completamente, dal condensatore all'induttore e viceversa; la frequenza è doppia di quella della corrente. Non essendoci alcun elemento dissipativo il fenomeno dura indefinitamente (si ricordi l'analogo fenomeno nel pendolo, con lo scambio tra energia cinetica e energia potenziale).

Nel caso reale occorre tener conto almeno della resistenza dei collegamenti che, per quanto piccola, alla lunga assorbe tutta l'energia. Ci sarebbe poi da dire che, in generale, ogni qual volta si hanno dei fenomeni elettrici non stazionari c'è una perdita di energia per irraggiamento. Le nostre equazioni non sono però ancora così complete da contenere pure questo fenomeno, per cui ci limitiamo a citarlo. Se le variazioni non sono troppo rapide le perdite per irraggiamento si possono tuttavia considerare trascurabili.

8.6. ***Ad un circuito RLC in serie viene connesso, all'istante $t = 0$, un generatore di f.em. alternata $V = V_0 \cos\omega t$. Calcolare la corrente nel circuito se $R = 800\ \Omega$, $L = 20$ H, $C = 5$ µF, $V_0 = 300$ V, $\omega = 314\ \text{s}^{-1}$ ($\nu = 50$ Hz); il condensatore è inizialmente scarico.***

Siamo nella situazione descritta nel paragrafo 8b. Il regime permanente è rappresentato dalla corrente (8.8)

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \psi) \quad ;$$

secondo (8.5 – 8.6 – 8.9 – 8.10) abbiamo

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} \quad , \qquad \text{tg}\,\psi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \quad .$$

Il regime transitorio è quello del problema 8.1 (il circuito è lo stesso) per cui la soluzione generale è

$$I(t) = De^{-\delta t}\cos(\Omega t + \phi) + I_0\cos(\omega t - \psi) \quad .$$

Ricorriamo alle condizioni iniziali per determinare D e ϕ:

$$I(0) = 0 = D\cos\phi + I_0\cos\psi \quad ,$$

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{L} = -D(\delta\cos\phi + \Omega\operatorname{sen}\phi) + \omega I_0\operatorname{sen}\psi \quad ;$$

risolvendo il sistema:

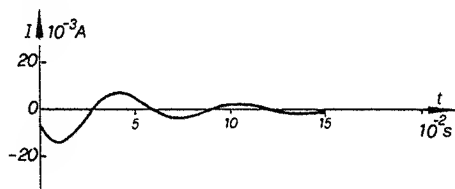
$$\operatorname{tg}\phi = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{V_0}{L\ I_0\cos\psi} - \omega\operatorname{tg}\psi - \delta\right) \quad ,$$

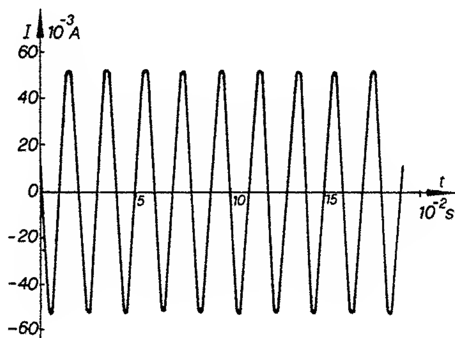
$$D = -I_0\,\frac{\cos\psi}{\cos\phi} \quad .$$

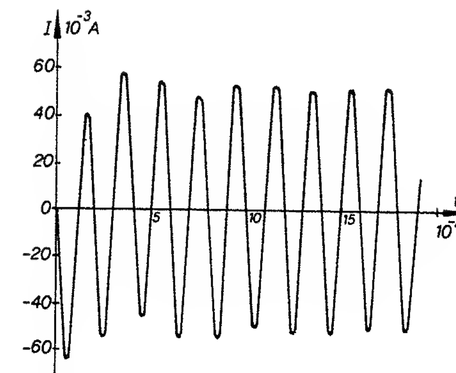
Dal problema 8.1 sappiamo che $\delta = 20\ \text{s}^{-1}$, $\omega_0 = 100\ \text{s}^{-1}$, $\Omega = 98\ \text{s}^{-1}$. Con i nostri dati $I_0 = 5.26 \cdot 10^{-2}$ A, $\psi = 81.93° = 1.43$ rad e quindi $\phi = -64.25° = -1.12$ rad, $D = -1.70 \cdot 10^{-2}$ A. Pertanto

$$I(t) = -1.70 \cdot 10^{-2} e^{-20t}\cos(98t - 1.12) + 5.26 \cdot 10^{-2}\cos(314t - 1.43)\ \text{A} \quad .$$

Nella figura sono rappresentati i due termini e la loro somma $I(t)$. Si vede che dopo un tempo pari a $\sim 4\tau$, con $\tau = 1/\delta = 5 \cdot 10^{-2}$ s, la parte transitoria diviene trascurabile e resta nel circuito il regime permanente, rappresentato dal secondo termine. È questo l'andamento generale che si ha in ogni caso, cioè pure se $\delta = \omega_0$ o $\delta > \omega_0$.

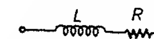






8.7. ***Dati tre elementi di circuito, un resistore con $R = 10^3\ \Omega$, un induttore con $L = 1$ H e un condensatore con $C = 1\ \mu$F, combinarli a due a due nelle varie maniere possibili. Supponendo di disporre di un generatore di f.em. alternata $V = V_0\cos\omega t$ con $V_0 = 100$ V e $\nu = \omega/2\pi = 50$ Hz calcolare in ciascun caso la corrente e la tensione per ogni elemento.***

Ci rifacciamo ai risultati del paragrafo 8d ; i casi possibili sono sei.



L'impedenza di questa serie, secondo (8.12) e (8.15), è

$$Z = R + i\omega L = 1000 + i314 = 1048\,e^{i0.304}$$

La corrente ha modulo $I_0 = V_0/Z_0 = 95 \cdot 10^{-3}$ A e fase -0.304 rad $= -17.43°$ (in ritardo); la sua espressione completa è

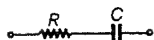
$$I = \frac{V}{Z} = I_0 e^{i(\omega t - \phi)} = 95 \cdot 10^{-3} e^{i(314t - 0.304)} \quad .$$

La tensione ai capi del resistore è $V_R = RI$, in fase con la corrente e di modulo $RI_0 = 95$ V; ai capi dell'induttore $V_L = i\omega LI$, in anticipo di 90° sulla corrente, ovvero di $90° - 17.43° = 72.57°$ sulla tensione applicata, mentre il modulo è $\omega LI_0 = 29.8$ V. Si noti che la somma $RI_0 + \omega LI_0$ non dà V_0 essendo V_R e V_L sfasate; poiché però lo sfasamento tra di esse è di 90°, è $(RI_0)^2 + (\omega LI_0)^2 = V_0^2$; invece la somma complessa $V_R + V_L$ dà, com'è naturale, V. Le espressioni effettive delle grandezze calcolate, che mostriamo esplicitamente solo per questo primo esempio, sono:

$$V = 100\cos 314t\ \ \text{V} \quad , \quad I = 95 \cdot 10^{-3}\cos(314t - 0.304)\ \ \text{A} \quad ,$$

$$V_R = 95\cos(314t - 0.304)\ \ \text{V} \quad , \quad V_L = 29.8\cos(314t + 1.266)\ \ \text{V} \quad .$$

La trattazione degli altri casi sarà più schematica; non metteremo per le grandezze complesse le unità di misura, che sono comunque ovvie per i moduli, e useremo per le fasi indifferentemente gradi o radianti, anche mescolati nella stessa espressione; è chiaro che per un calcolo specifico ad un dato istante t occorre ridurre ωt e ϕ alla stessa unità di misura



Con riferimento a (8.14-8.15):

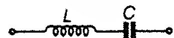
$$Z = R - \frac{i}{\omega C} = 1000 - i3185 = 3338 e^{-i72.57°}$$

$$I = \frac{V_0}{Z_0} e^{i(\omega t - \phi)} = 30 \cdot 10^{-3} e^{i(314t + 72.57°)}$$

$$V_R = RI = 30 e^{i(314t + 72.57°)}$$

$$V_C = \frac{-i}{\omega C} I = 95.6 e^{i(314t - 17.43°)} \quad .$$

La corrente è in anticipo rispetto alla tensione applicata, V_C è in ritardo sia rispetto alla corrente (di $\pi/2$) che rispetto a V.



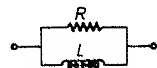
$$Z = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -i2871 = 2871 e^{-i\pi/2}$$

$$I = 35 \cdot 10^{-3} e^{i(314t + \pi/2)}$$

$$V_L = i\omega L I = 11 e^{i(314t + \pi)} = -11 e^{i314t}$$

$$V_C = \frac{-i}{\omega C} I = 111 e^{i314t}$$

V_L e V_C sono in opposizione di fase, con V_C predominante e quindi comportamento globale capacitivo; entrambe sono in quadratura di fase con I, la prima in anticipo, la seconda in ritardo.



Usiamo il concetto di ammettenza e le formule (8.16):

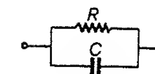
$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = 10^{-3} - i\, 3.18 \cdot 10^{-3} = 3.33 \cdot 10^{-3} e^{-i72.57°}$$

$$I = YV = 0.33 e^{i(314t - 72.57°)} = I_R + I_L$$

$$I_R = \frac{V}{R} = 0.1 e^{i314t}$$

$$I_L = \frac{V}{i\omega L} = 0.32 e^{i(314t - \pi/2)}$$

Si poteva anche scrivere $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ cioè $Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R \cdot i\omega L}{R + i\omega L}$ e calcolare I come V/Z.

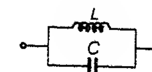


$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C = 10^{-3} + i0.314 \cdot 10^{-3} = 1.05 \cdot 10^{-3} e^{i17.43°}$$

$$I = YV = 0.105 e^{i(314t + 17.43°)} = I_R + I_C$$

$$I_R = \frac{V}{R} = 0.1 e^{i314t}$$

$$I_C = i\omega C V = 31.4 \cdot 10^{-3} e^{i(314t + \pi/2)}$$



$$Y = i\omega C + \frac{1}{i\omega L} = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = -i2.87 \cdot 10^{-3} = 2.87 \cdot 10^{-3} e^{-i\pi/2}$$

$$I = YV = 0.29 e^{i(314t - \pi/2)} = I_L + I_C$$

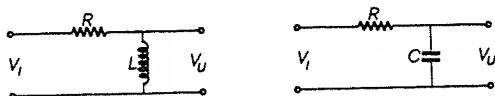
$$I_L = \frac{V}{i\omega L} = 0.32 e^{i(314t - \pi/2)} \quad .$$

$$I_C = i\omega C V = 31.4 \cdot 10^{-3} e^{i(314t + \pi/2)} \quad .$$

L'impedenza è in generale funzione della frequenza; in questo problema, salvo il caso del resistore dove R non dipende da ω (almeno in prima approssimazione, per frequenze non troppo elevate), il modulo dell'impedenza è funzione crescente di ω in un induttore e decrescente in un condensatore. Questo comportamento è conservato sia nella serie RL ($R \leq Z_0 < +\infty$) e RC ($+\infty > Z_0 \geq R$) che nei paralleli ($RL \rightarrow 0 \leq Z_0 \leq R$, $RC \rightarrow R \geq Z_0 \geq 0$). Con la frequenza varia anche lo sfasamento, rispettivamente per le serie e i paralleli da 0 a $\pi/2$, da $-\pi/2$ a 0, da $\pi/2$ a 0, da 0 a $-\pi/2$.

Particolare è il comportamento delle combinazioni LC. Nella serie, se la pulsazione vale $\omega = \omega_0 = (LC)^{-1/2}$, l'impedenza si annulla; per $\omega < \omega_0$ predomina il comportamento capacitivo, per $\omega > \omega_0$ quello induttivo. Invece nel parallelo se $\omega = \omega_0$ è nulla l'ammettenza e quindi infinita l'impedenza: nel circuito non passa corrente; per $\omega < \omega_0$ il comportamento è induttivo, per $\omega > \omega_0$ capacitivo. Rivedremo meglio questi argomenti in problemi successivi, quando studieremo circuiti in risonanza e antirisonanza.

8.8. ***Ai terminali di sinistra delle combinazioni RL e RC mostrate in figura viene applicata una tensione alternata con valore massimo V_0 e pulsazione ω variabile. Dare l'espressione del rapporto A tra la tensione V_u che compare ai terminali di destra e la tensione V_i e tracciare le curve $A_0(\omega)$ avendo come parametri i valori di R, L, C.***



In entrambi i casi abbiamo due elementi in serie, di impedenze $Z_1 = R$ e Z_2; conosciamo la tensione applicata V_i e vogliamo calcolare quella ai capi di Z_2, V_u, e il loro rapporto. Scriviamo:

$$I = \frac{V_i}{Z_1 + Z_2} \quad \Rightarrow \quad V_u = I Z_2 = V_i \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad ,$$

$$A = \frac{V_u}{V_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = A_0 e^{i\phi} \quad .$$

Il modulo di A dà il rapporto tra i valori massimi della tensione in uscita e in ingresso mentre la fase ne dà lo sfasamento.

Per il sistema RL $Z_2 = i\omega L$ e abbiamo:

$$A = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}(\omega L + iR)$$

$$A_0 = \frac{\omega L}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}} = \frac{\omega \tau}{(1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{R}{\omega L} = \frac{1}{\omega \tau} \quad , \quad \tau = \frac{L}{R} \quad .$$

Il rapporto parte da 0 per $\omega = 0$ e tende a 1 per ω tendente all'infinito; in corrispondenza la fase varia da $\pi/2$ a 0. Il limite asintotico $A_0 = 1$, $\phi = 0$ è raggiunto in pratica quando $\omega^2 \tau^2 \gg 1$ ovvero $\omega^2 \gg R^2/L^2$. Per valori di ω tali che ωL sia trascurabile rispetto a R quasi tutta la tensione cade ai capi del resistore e in uscita non c'è quasi nulla; al crescere di ωL rispetto a R la situazione si modifica sempre più a favore dell'induttore finché al limite R è trascurabile rispetto a ωL e V_u coincide con V_i. Il dispositivo si chiama *filtro passa-alto* nel senso che la risposta è piccola alle basse frequenze e diviene buona alle alte frequenze; è chiaro però che si passa con continuità da un regime all'altro.

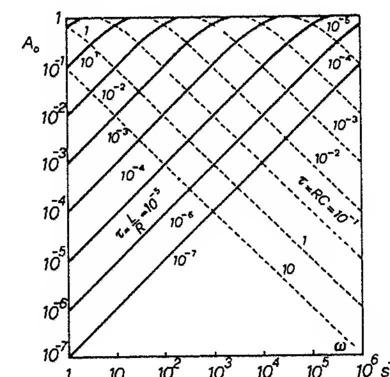
Per il sistema RC $Z_2 = 1/i\omega C$ e quindi:

$$A = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{R + \dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{\omega C\left(R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}\right)}\left(\frac{1}{\omega C} - iR\right)$$

$$A_0 = \frac{1}{\omega C\left(R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi = -\omega RC = -\omega \tau \quad , \quad \tau = RC \quad .$$

Adesso si ha il comportamento opposto: per ω che varia da 0 all'infinito, A_0 passa da 1 a 0, ϕ da 0 a $-\pi/2$. Il confronto deve essere fatto tra $1/\omega C$ e R, ovvero tra ω e $1/RC$: alle basse frequenze $1/\omega C \gg R$ e $V_u \approx V_i$; al crescere di ω la risposta diventa sempre più piccola finché $1/\omega C$ è trascurabile rispetto a R. Si parla ora di *filtro passa-basso*.



Nella figura le curve continue danno A_0 per il circuito RL, quelle tratteggiate corrispondono al circuito RC; il parametro è $\tau = L/R$ o $\tau = RC$. La scala è logaritmica su tutti e due gli assi, cioè sono in effetti riportati $\log A_0$ e $\log \omega$.

8.9. ***La rete in figura si estende indefinitamente verso destra; calcolare l'impedenza vista dai terminali di sinistra. Determinare inoltre come varia la tensione dei punti A_i lungo la rete. Per il calcolo numerico $L = 10^{-2}$ H, $C = 1$ μF; si supponga inoltre che la pulsazione della tensione applicata ai terminali di sinistra valga $\omega_1 = 10^4$ s^{-1} oppure $\omega_2 = 4 \cdot 10^4$ s^{-1}.***

Il calcolo dell'impedenza si basa sul fatto che, se a sinistra si aggiunge o toglie un blocco LC, la rete resta identica, appunto perché indefinita. Perciò, se diciamo Z_0 l'impedenza complessa della rete e supponiamo di aggiungere a sinistra un blocco LC, l'impedenza totale, che è ancora Z_0, si calcola basandosi sul circuito qui accanto, facendo cioè la serie tra $L/2$ e Z_0, il parallelo di questa con C e infine la serie dell'impedenza con $L/2$:

$$Z_0 = i\omega \frac{L}{2} + \frac{\frac{1}{i\omega C}\left(i\omega \frac{L}{2} + Z_0\right)}{\frac{1}{i\omega C} + i\omega \frac{L}{2} + Z_0}$$

Risolvendo in Z_0 si trova

$$Z_0^2 = \frac{L^2}{4}\left(\frac{4}{LC} - \omega^2\right) = \frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} \qquad \text{(a)}$$

e si hanno quindi due casi possibili:

1) $\omega^2 < \frac{4}{LC} \quad Z_0 = \frac{L}{2}\left(\frac{4}{LC} - \omega^2\right)^{1/2}$ reale ,

2) $\omega^2 > \frac{4}{LC} \quad Z_0 = i\,\frac{L}{2}\left(\omega^2 - \frac{4}{LC}\right)^{1/2}$ immaginaria pura .

Da un caso all'altro si passa attraversando il valore $\omega^2 = \omega_0^2 = 4/LC$ per il quale Z_0 è nulla.

Con i dati numerici del testo $\omega_0 = 2 \cdot 10^4\ s^{-1}$ ($\nu = 3183$ Hz):

1) $\omega_1 = 10^4\ s^{-1} < \omega_0$, $Z_0 = 86.6\ \Omega$

2) $\omega_2 = 4 \cdot 10^4\ s^{-1} > \omega_0$, $Z_0 = i173.2$

La tensione V_1 del punto A_1 e quella V_2 di A_2 sono legati dalla relazione $V_1 - V_2 = i\omega L I$, se I è la corrente che circola da A_1 ad A_2, inoltre, da A_1 si vede a destra la serie $i\omega \frac{L}{2} + Z_0$ e quindi $I = \frac{V_1}{Z_0 + i\omega \frac{L}{2}}$; mettendo insieme le due relazioni otteniamo

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0 - i\omega \frac{L}{2}}{Z_0 + i\omega \frac{L}{2}} = \alpha \qquad \text{(b)}$$

Quanto detto per i punti A_1, A_2 si può ripetere per qualunque altra coppia: tra il punto n-esimo e il punto (n-1)-esimo il rapporto dei potenziali è sempre

dato da α, che viene chiamato fattore di propagazione della rete. Le due possibilità viste per Z_0 si riflettono su α.

1) Se Z_0 è reale, nella (b) numeratore e denominatore hanno lo stesso modulo per cui il modulo di α è 1. La fase di α è la differenza delle fasi dei due fattori, $\phi = \phi_1 - \phi_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,(-\omega L/2Z_0)$. In modulo dunque $V(A_1) = V(A_2) = \ldots = V(A_n) = \ldots$, mentre le fasi di due punti consecutivi differiscono della quantità costante ϕ. Si conclude che la rete introduce solo sfasamento, ma che la tensione applicata non si attenua lungo di essa.

2) Se $Z_0 = iX_0$ α è reale e minore di 1:

$$\alpha = \frac{X_0 - \omega \frac{L}{2}}{X_0 + \omega \frac{L}{2}} \quad \Rightarrow \quad \text{in modulo} \quad V(A_1) > V(A_2) > V(A_3) > \ldots$$

Tutti i punti hanno la stessa fase se $\alpha > 0$; se invece $\alpha < 0$ tra due punti consecutivi c'è uno sfasamento di π (si ricordi che $-1 = e^{i\pi}$). Questa volta lungo la rete si ha attenuazione; dopo un certo numero di blocchi praticamente non c'è più tensione ai capi dei condensatori.

Nel caso numerico proposto:

1) $\omega_1 < \omega_0 \quad \alpha = e^{i60°}$ 2) $\omega_2 > \omega_0 \quad \alpha = -0\,072$.

Con la terminologia del problema 8.8 la rete considerata agisce come un filtro passa-basso: finché $\omega < \omega_0$ troviamo V diverso da zero in tutta la rete, per $\omega > \omega_0$ la rete è praticamente scarica. Il fatto che essa sia infinita è solo una difficoltà apparente: visto che Z_0 ha un valore ben definito è possibile interrompere la rete in un punto qualsiasi e chiuderla su un elemento di impedenza Z_0; il comportamento elettrico resta lo stesso. Z_0 è detta *impedenza caratteristica*, ω_0 *pulsazione di taglio*; la rete stessa prende il nome di *linea a costanti concentrate*.

L'aspetto energetico del problema è molto interessante. Intanto c'è l'apparente paradosso di un circuito costituito solo da elementi reattivi (L e C) che si comporta per $\omega < \omega_0$ come un resistore, assorbendo perciò potenza con continuità dal generatore. Poiché questa energia non può che servire a caricare induttori e condensatori (lungo la linea non c'è attenuazione), siamo naturalmente portati all'idea di una propagazione dell'energia lungo la linea che via via si carica. Invece per $\omega > \omega_0$, con Z_0 immaginaria pura, non c'è assorbimento di potenza: e infatti ora si ha attenuazione, la rete resta in pratica tutta scarica, l'energia non si propaga.

8.10. ***Estendere i risultati della precedente linea a costanti concentrate alla linea a costanti distribuite rappresentata da un cavo coassiale formato da due conduttori cilindrici concentrici, sottilissimi, di raggi $R_1 = 2.0$ mm e $R_2 = 4.6$ mm, con intercapedine l'aria. Calcolare l'impedenza caratteristica Z_0 e la frequenza di taglio ν_0.***

Dalla relazione (2.4) del paragrafo 2b. e dal problema 5.14 ricordiamo le espressioni del coefficiente di autoinduzione e della capacità per unità di lunghezza di un cavo coassiale:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log \frac{R_2}{R_1}} \quad .$$

La capacità è tra il conduttore centrale e quello esterno, cioè è distribuita in parallelo, mentre il coefficiente di autoinduzione è distribuito in serie. È possibile perciò assimilare il cavo alla rete del problema 8.9 considerando i blocchi LC di lunghezza infinitesima. Ad un tratto Δx competono le costanti distribuite $L_0 \Delta x$ e $C_0 \Delta x$; con questi valori si scrive la (a) del problema 8.9 e si passa al limite per $\Delta x \to 0$:

$$Z_0 = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{L_0 \Delta x}{C_0 \Delta x} - \frac{\omega^2 L_0^2 \Delta^2 x}{4} \right)^{1/2} = \left(\frac{L_0}{C_0} \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1} = 60 \log \frac{R_2}{R_1} = 50 \ \Omega \quad .$$

Poiché $\omega_0^2 = 4/LC$, secondo i risultati del problema 8.9, troviamo che nel cavo coassiale la frequenza di taglio è infinita essendo L e C infinitesimi. In conclusione il cavo coassiale presenta impedenza reale a tutte le frequenze e non agisce da filtro, ma semplicemente da propagatore. Di nuovo occorre dire che le proprietà viste non sono necessariamente collegate a lunghezza infinita, ma sono possedute da un tratto di cavo di lunghezza qualunque, purché terminato su una resistenza di valore Z_0.

È interessante cercare di dedurre con che velocità si propaga l'energia nel cavo coassiale. Questo è individuato esclusivamente dalle costanti L_0 e C_0 e la velocità di propagazione non può che dipendere da esse. Procedendo per tentativi si trova che $(L_0 C_0)^{-1/2}$ ha le dimensioni di una velocità, il cui valore numerico è $(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c$, velocità della luce nel vuoto. Giustificheremo questo risultato nel problema 10.7.

8.11. ***Una stufa elettrica (potenza 1 KW, corrente efficace massima tollerabile 8 A, sfasamento nullo) deve essere connessa alla rete ($V_{\text{eff}} = 220$ V, $\nu = 50$ Hz). Allo scopo si mette in serie un induttore e, per riportare a zero lo sfasamento, si pone in parallelo al tutto un condensatore. Calcolare i valori necessari di L e C.***

La stufa è equivalente a un resistore su cui viene dissipato 1 KW con $I_{\text{eff}} = 8$ A; da (8.17) ricaviamo $V_{\text{eff}} = P/I_{\text{eff}} = 125$ V e $R = P/I_{\text{eff}}^2 = 15.6 \ \Omega$. Per collegare la stufa alla rete bisogna metterle in serie un elemento di modo

che la tensione fornita dalla rete si ripartisca su di esso e sulla stufa. Se scegliamo la soluzione dell'induttore deve essere (problema 8.7, primo caso):

$$V_L^2 = 220^2 - 125^2 = 181^2 \quad , \quad V_L = \omega L I_{\text{eff}} \quad \Rightarrow \quad L = 72 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

In questo modo però lo sfasamento tra V e I non è più zero, ovvero l'impedenza è ora $Z = R + i\omega L$, con parte immaginaria non nulla. Il valore della capacità del condensatore da mettere in parallelo alla serie RL deve essere tale da annullare la parte immaginaria dell'impedenza risultante; questa vale

$$Z = \frac{(R + i\omega L) \dfrac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} \Rightarrow \text{Im } \{Z\} = -\frac{R^2}{\omega C} - \frac{L}{C} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) .$$

Si ottiene pertanto il risultato voluto se

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 95.4 \ \mu\text{F}$$

Un resistore di 12 Ω in serie alla stufa ridurrebbe lo stesso la tensione a 125 V, però dissiperebbe 768 W; invece il collegamento L, C non comporta alcuna dissipazione al di fuori della stufa nel caso ipotetico di elementi ideali o assorbe poca potenza nel caso pratico.

Si verifichi che scambiando di posto tra loro condensatore e induttore i valori adatti sarebbero $C = 140.8 \ \mu$F, $L = 0.106$ H.

8.12. ***Un circuito RLC in serie ($R = 100 \ \Omega$, $L = 10^{-2}$ H, $C = 1 \ \mu$F) è connesso ad un generatore che fornisce una tensione alternata di valor massimo $V_0 = 100$ V e pulsazione ω variabile. Calcolare, in funzione di ω, le espressioni dell'impedenza, della corrente e dello sfasamento e studiare come variano le conclusioni se $R = 10 \ \Omega$ o $R = 10^3 \ \Omega$.***

L'impedenza del circuito RLC in serie è

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Z_0 e^{i\phi} \quad ,$$

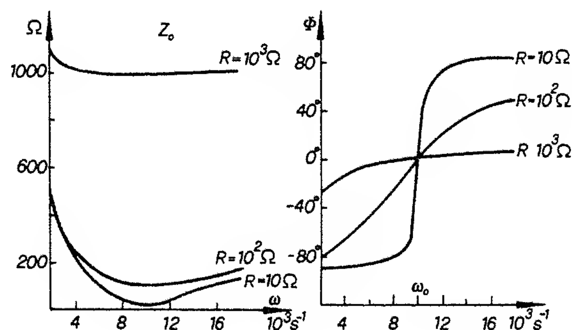
$$Z_0 = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2} \quad , \quad \text{tg}\,\phi = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) .$$

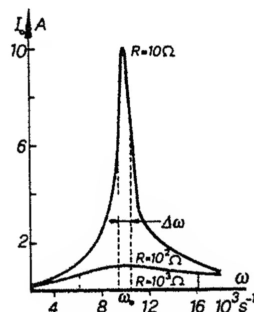
Quando $\omega = \omega_0 = (LC)^{-1/2}$ Z è un numero reale e coincide con R, si dice che il circuito è in *risonanza*. Se $\omega < \omega_0$, $1/\omega C > \omega L$ e il comportamento del circuito è capacitivo (tipo serie RC); se invece $\omega > \omega_0$ il comportamento è induttivo (tipo serie RL). In ogni caso Z_0 è sempre maggiore di R per $\omega \neq \omega_0$. La fase di Z passa dal valore $-\pi/2$ $(\omega = 0)$ al valore zero in risonanza $(\omega = \omega_0)$ e poi al valore $\pi/2$ $(\omega = +\infty)$.

L'espressione della corrente è

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{\imath \omega t}}{Z_0 e^{\imath \phi}} = I_0 e^{\imath(\omega t - \phi)} \ , \ I_0 = \frac{V_0}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}} \ .$$

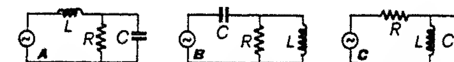
Il modulo assume il suo valore massimo $I_0^M = V_0/R$ alla risonanza, dove corrente e tensione sono in fase; al di sotto di ω_0 la corrente è in anticipo, al di sopra è in ritardo (comportamento appunto capacitivo e induttivo). Si noti che per $\omega = \omega_0$ V_C e V_L non sono nulle, bensì eguali ed opposte per cui si elidono.





Nelle figure sono riportati i grafici di Z_0, I_0 e ϕ in funzione di ω. Si vede chiaramente come il fenomeno diventi più marcato e definito al diminuire del valore della resistenza. Nelle note alla fine del capitolo verrà spiegato il significato dei tratti verticali nel grafico di I_0, legati alla nozione di banda di risonanza.

8.13. ***Tre elementi R, L, C ($R = 10^3$ Ω, $L = 1.35$ H, $C = 4.5$ μF) sono connessi nelle maniere mostrate in figura. Calcolare le frequenze di risonanza, l'impedenza e il valor massimo della corrente alla risonanza; il valore massimo della tensione applicata è $V_0 = 300$ V.***



In tutti e tre i casi calcoliamo l'impedenza e ne annulliamo la parte immaginaria per avere ω_0; dal valore $Z(\omega_0)$ risaliamo poi a $I_0(\omega_0)$.

$$\text{A)}\ Z = \imath\omega L + \frac{R/\imath\omega C}{R + \frac{1}{\imath\omega C}} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + \imath\omega\left(L - \frac{R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\right)$$

La parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ (corrente continua) e per

$$\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{R^2 C - L}{L R^2 C^2} = \frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2 C^2} \ ,$$

da cui segue che deve essere soddisfatta la condizione

$$R^2 C > L \quad \text{ovvero} \quad RC > \frac{L}{R} \ . \qquad \text{(a)}$$

Se ciò avviene, i valori dell'impedenza e di I_0 in risonanza sono

$$Z(\omega_0) = \frac{L}{RC} \ , \quad I_0(\omega_0) = \frac{V_0 RC}{L} \ .$$

Si noti che proprio per la condizione (a) l'impedenza in risonanza L/RC è minore dell'impedenza in continua R.

$$\text{B)}\ Z = \frac{1}{\imath\omega C} + \frac{R \cdot \imath\omega L}{R + \imath\omega L} = \frac{\omega^2 R L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \imath\left(\frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{R^2}{L(R^2 C - L)} = \frac{1}{LC} + \frac{1}{C(R^2 C - L)}$$

$$\Rightarrow \quad Z(\omega_0) = \frac{L}{RC} \ , \quad I_0(\omega_0) = \frac{V_0 RC}{L} \ .$$

Anche questa volta deve essere soddisfatta la (a) per avere risonanza.

$$\text{C)}\ Z = R + \frac{\imath\omega L/\imath\omega C}{\imath\omega L + \frac{1}{\imath\omega C}} = R + \frac{\imath\omega L}{1 - \omega^2 LC} \ .$$

L'impedenza è reale solo in regime continuo ($\omega = 0$); in regime alternato c'è sempre una parte reattiva che, per $\omega^2 = 1/LC$, diviene infinita. Il fenomeno si

chiama antirisonanza ed è tipico delle combinazioni LC in parallelo. In pratica, quando la pulsazione del generatore è eguale a quella propria del circuito oscillante LC, ai capi di questo ritroviamo proprio V_0 ed è come avere due generatori di eguale ampiezza e fase chiusi uno sull'altro: la corrente è nulla perché essi si bilanciano.

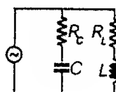
Riportiamo in tabella i valori numerici relativi ai tre casi:

	$\omega_0(\mathrm{s}^{-1})$	$\nu_0(\mathrm{Hz})$	$Z(\omega=0)$	$Z(\omega_0)$	$Z(\infty)$	$I_0(\omega_0)$
A	339	54	R	300 Ω	∞	1 A
B	485	77	∞	300 Ω	R	1 A
C	406	65	R	∞	R	0

Si osservi che già in circuiti semplici come quelli in figura la parte reale dell'impedenza non coincide sempre con R, come nel circuito RLC in serie; in generale Z_R è funzione sia di ω che dei valori delle costanti del circuito.

8.14 ***Calcolare la pulsazione di risonanza del circuito in figura se $R_L = R_C = 100$ Ω, $L = 10^{-3}$H, $C = 100$ nF. Dare l'espressione della potenza dissipata nel circuito e calcolarla con i valori suddetti. Si assuma come generatore una presa della rete ($V_{eff} = 220$ V, $\nu = 50$ Hz).***

Ricorriamo questa volta all'ammettenza di cui poi annulliamo la parte immaginaria:



$$Y = \frac{1}{R_L + i\omega L} + \frac{1}{R_C + \dfrac{1}{i\omega C}}$$

$$= \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} +$$

$$+ i\left(\frac{1}{\omega C}\frac{1}{R_C^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} - \frac{\omega L}{R_L^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\,\frac{R_L^2 C - L}{R_C^2 C - L} \quad .$$

Le costanti del circuito devono soddisfare contemporaneamente alle condizioni

$$R_L^2 > \frac{L}{C} \quad , \quad R_C^2 > \frac{L}{C} \quad \text{oppure} \quad R_L^2 < \frac{L}{C} \quad , \quad R_C^2 < \frac{L}{C}$$

affinché ω_0^2 sia positiva Se in particolare $R_L = R_C$, $\omega_0^2 = 1/LC$; se poi è anche $R_L^2 = R_C^2 = L/C$. ω_0 risulta indeterminata. Sostituendo questi particolari valori nell'espressione dell'ammettenza si trova $Y = (C/L)^{1/2}$: essa è reale e indipendente da ω. Si può dire che il circuito in esame, quando $R_L = R_C = (L/C)^{1/2}$, risuona a tutte le frequenze.

Con i dati numerici del testo siamo proprio in questa situazione:

$$R_L^2 = R_C^2 = 10^4 = \frac{L}{C} \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{Y} = 100\ \Omega \quad ,$$

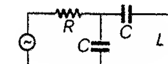
$$I_{eff} = Y V_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = 2.2\ \mathrm{A} \quad ,$$

$$P = I_{eff} V_{eff} = 484\ \mathrm{W} \qquad (\cos\phi = 1) \quad .$$

Se fosse $R_L = R_C = R$ solamente, l'ammettenza varrebbe $2R/(R^2 + L/C)$ e il circuito risuonerebbe a $\omega = \omega_0 = 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$, cioè a $15.9 \cdot 10^3$ Hz.

8.15. ***Calcolare in funzione della frequenza l'impedenza del circuito in figura; i valori dei componenti sono $R = 100$ Ω, $L = 1$ H, $C = 10$ nF.***

I rami in parallelo hanno ammettenza



$$Y = i\omega C + \frac{1}{i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} = i\omega C\frac{2 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

L'impedenza totale vale

$$Z = R + \frac{1}{Y} = R - \frac{i}{\omega C}\,\frac{1 - \omega^2 LC}{2 - \omega^2 LC} \quad .$$

Suddividiamo lo studio in tre intervalli di frequenza.

1) $\quad \omega^2 \leqslant \dfrac{1}{LC} = 10^8\ \mathrm{s}^{-2} \quad , \quad \nu \leqslant 1592$ Hz

La reattanza è negativa, il comportamento capacitivo; il modulo dell'impedenza scende da infinito ($\omega = 0$) a R, valore assunto per $\omega = \omega_0 = (LC)^{-1/2}$, dove si ha risonanza.

2) $\quad \dfrac{1}{LC} \leqslant \omega^2 \leqslant \dfrac{2}{LC} \quad , \quad 1592\ \mathrm{Hz} \leqslant \nu \leqslant 2251$ Hz

Superata la risonanza la reattanza diviene positiva e si ha comportamento induttivo fino a che, per $\omega^2 = 2 \cdot 10^8\ \mathrm{s}^{-2}$, l'impedenza diventa infinita; siamo passati all'antirisonanza.

3) $\quad \omega^2 > \dfrac{2}{LC} \quad , \quad \nu > 2251$ Hz

Il comportamento torna ad essere capacitivo e il modulo dell'impedenza tende a R per ω tendente all'infinito.

Si noti che $(2/LC)^{1/2}$ è la pulsazione di risonanza del blocco LC: in tale circuito oscillante i condensatori sono in serie e la loro capacità totale è $C/2$, si possono ripetere le considerazioni fatte nel problema 8.13 a proposito del terzo caso.

8.16. ***Una bobina piana, con $N = 30$ spire di sezione $\Sigma = 1$ cm^2, è sospesa verticalmente in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo $B = 10^{-2}$ T. La costante di torsione del filo di sospensione è $K = 2.5 \cdot 10^{-10}$ N · m/rad, il momento d'inerzia della bobina rispetto all'asse di rotazione è $I_M = 10^{-11}$ Kgm^2; le forze di attrito che si oppongono al moto della bobina agiscono con un momento proporzionale alla velocità angolare con costante di proporzionalità $h = 0.6 \cdot 10^{-10}$ Nms/rad. Studiare le piccole oscillazioni libere della bobina cercando le condizioni di smorzamento critico e determinare la posizione di equilibrio se nella bobina circola una corrente continua $I_0 = 10^{-6}$ A. Studiare infine il moto della bobina in condizioni di risonanza se la corrente circolante è $I = I_0$ sen ωt e se permangono le condizioni di smorzamento critico. Si supponga che in assenza di correnti il piano della bobina sia parallelo a B.***

Elenchiamo i vari momenti che agiscono sulla bobina, tutti paralleli all'asse di rotazione.

1) Momento di torsione $-K\theta$ se θ è l'angolo di deviazione dalla posizione di equilibrio.

2) Momento d'attrito $-h\, d\theta/dt$.

3) Momento delle forze magnetiche: durante la rotazione varia il flusso di **B** attraverso la sezione della bobina e ha origine una corrente indotta

$$I_i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(N\Sigma B \,\mathrm{sen}\,\theta) = -\frac{N\Sigma B}{R}\frac{d\theta}{dt}$$

nell'ipotesi di piccole oscillazioni (sen $\theta \simeq \theta$). La bobina si comporta come un dipolo con momento magnetico $\mu = N\Sigma I_i$ e su di essa agisce il momento

$$M_i = \mu B \cos\theta = -\frac{(N\Sigma B)^2}{R}\frac{d\theta}{dt} \quad ,$$

avendo posto $\cos\theta \simeq 1$.

Il teorema del momento angolare si scrive pertanto

$$I_M \frac{d^2\theta}{dt^2} = -h\frac{d\theta}{dt} - \frac{(N\Sigma B)^2}{R}\frac{d\theta}{dt} - K\theta \qquad \text{(a)}$$

da cui riordinando otteniamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\delta = \frac{1}{2I_M}\left(h + \frac{N^2\Sigma^2B^2}{R}\right) \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{K}{I_M} \quad ,$$

cioè l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato. Se si vuole smorzamento critico deve essere $\delta = \omega_0$ ovvero, risolvendo per la resistenza della bobina,

$$R = R_C = \frac{N^2\Sigma^2B^2}{2(KI_M)^{1/2} - h} = 22.5\ \Omega \quad ;$$

con questo valore $\delta = \omega_0 = 5$ s^{-1}. Si può facilmente ottenere un determinato valore di R chiudendo il circuito della bobina su opportuni resistori esterni.

Quando passa nella bobina la corrente I_0 bisogna aggiungere nella (a) il termine $N\Sigma I_0 B\cos\theta \simeq N\Sigma I_0 B$, che funge da termine noto. La soluzione asintotica, valida quando si esaurisce l'oscillazione propria del sistema, è

$$K\theta = N\Sigma I_0 B \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{N\Sigma I_0 B}{K} = 0.12 \text{ rad} = 6.9° \quad .$$

Le condizioni descritte, corrente continua e smorzamento critico, sono realizzate in generale nei galvanometri.

Se la corrente è alternata il corrispondente momento delle forze magnetiche si scrive $N\Sigma IB\cos\theta \simeq N\Sigma IB = N\Sigma BI_0 \mathrm{sen}\,\omega t$ e la (b) diviene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = \frac{N\Sigma BI_0}{I_M}\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad .$$

Sappiamo (paragrafo 8b. e problema 8.6) che questa equazione ammette la soluzione permanente

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t - \phi) \quad ,$$

$$\theta_0^2 = \left(\frac{N\Sigma BI_0}{I_M}\right)^2 \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \qquad \text{(c)}$$

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\delta\omega} \quad .$$

Per $\omega = \omega_0$ $\theta_0 = N\Sigma BI_0/2\delta\omega I_M = 0.06$ rad $= 3.4°$, $\phi = 0$ e quindi

$$\theta = 0.06 \cos 5t \quad .$$

Il risultato è piuttostro strano: in risonanza troviamo un'ampiezza minore di quella in continua (che è 0.12 rad); c'è da chiedersi se effettivamente ci troviamo di fronte a una risonanza.

Analizziamo il denominatore della (c): esso può scriversi

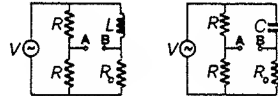
$$D(\omega) = \omega^4 + \omega_0^4 + 2\omega^2(2\delta^2 - \omega_0^2)$$

e presenta un minimo per $\omega = (\omega_0^2 - 2\delta^2)^{1/2}$ che è reale solo se $\omega_0^2 > 2\delta^2$; altrimenti $D(\omega)$ è minimo per $\omega = 0$ e poi cresce monotonamente con ω.

Pertanto l'ampiezza delle oscillazioni della bobina può avere un massimo solo se $\omega_0^2 > 2\delta^2$, altrimenti decresce monotonamente; ne segue che in condizioni di smorzamento critico non può esserci risonanza. Se invece le costanti del sistema sono tali che $\omega_0^2 > 2\delta^2$ (con $\delta \neq 0$) la pulsazione di risonanza non è ad ogni modo ω_0, ma come visto sopra $\omega_R = (\omega_0^2 - 2\delta^2)^{1/2}$.

La situazione è diversa per la (8.9) dove c'è dipendenza da ω anche al numeratore: in effetti ora $D(\omega) = \omega_0^4/\omega^2 + \omega^2 + 2(2\delta^2 - \omega_0^2)$ e si ha sempre un minimo per $\omega = \omega_0$ senza nessun'altra condizione.

8.17. ***Per i circuiti in figura calcolare, in modulo e fase, la tensione tra i punti A e B. Determinare, per una certa pulsazione ω, in che relazione devono stare R_0, L, C affinché, in entrambi i casi, $V_A - V_B$ sia sfasata di $\pi/2$ rispetto alla V fornita dal generatore.***



Diciamo I_1 la corrente nel ramo contenente A e I_2 quella nel ramo contenente B. Con riferimento all'estremo inferiore del generatore $V_A - V_B = I_1 R - I_2 R_0$; inoltre

$$I_1 = \frac{V}{2R} \quad , \quad I_2 = \frac{V}{R_0 + i\omega L} \quad \text{oppure} \quad I_2 = \frac{V}{R_0 + \dfrac{1}{i\omega C}} \quad .$$

Di conseguenza, abbiamo nei due casi:

$$V_A - V_B = V\left(\frac{1}{2} - \frac{R_0}{R_0 + i\omega L}\right) = -\frac{V}{2}\,\frac{R_0 - i\omega L}{R_0 + i\omega L} \quad ,$$

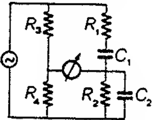
$$V_A - V_B = V\left(\frac{1}{2} - \frac{R_0}{R_0 + \dfrac{1}{i\omega C}}\right) = \frac{V}{2}\,\frac{1 - i\omega R_0 C}{1 + i\omega R_0 C} \quad .$$

In entrambe le espressioni numeratore e denominatore sono complessi coniugati e hanno quindi stesso modulo e fase opposta. Tra A e B si preleva così una tensione che è la metà di quella fornita dal generatore indipendentemente dai parametri del circuito, purché le resistenze nel ramo A siano eguali tra loro. Dette poi ϕ_1 e ϕ_2 la fase del numeratore e del denominatore, con $\phi_2 = -\phi_1$, lo sfasamento risulta $\phi = \phi_1 - \phi_2 = 2\phi_1$; dovendo essere $\phi = \pm\,\pi/2$, $\phi_1 = \pm\,\pi/4$ e questa condizione è soddisfatta solo se $R_0 = \omega L$ oppure $R_0 = 1/\omega C$.

È chiaro che si potevano sviluppare completamente le espressioni di $V_A - V_B$ fino alla forma $a + ib$ e dedurre da questa i risultati; abbiamo però voluto mostrare come un esame attento delle formule possa evitare a volte dei calcoli.

8.18. ***Fissata una certa pulsazione ω è possibile, nel circuito in figura, variando R_1 portare a zero la corrente nello strumento di misura. Se in tali condizioni $R_1 = 1.1 \cdot 10^3\ \Omega$, $R_2 = 10^3\ \Omega$, $R_3 = 3 \cdot 10^3\ \Omega$, $R_4 = 2 \cdot 10^3\ \Omega$, $C_1 = 0.5\ \mu F$, calcolare i valori di ω e di C_2.***

La condizione di equilibrio del ponte si può scrivere imponendo che in R_3 e R_4 circoli la stessa corrente e analogamente per l'altro ramo: in tal modo nel ponte che contiene lo strumento non passa corrente. Gli estremi sono allora equipotenziali e si può scrivere:



$$I_1 R_3 = I_2\left(R_1 + \frac{1}{i\omega C_1}\right) \quad , \quad I_1 R_4 = I_2\,\frac{R_2/i\omega C_2}{R_2 + \dfrac{1}{i\omega C_2}} \quad .$$

Dividendo membro a membro si può scrivere sinteticamente $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$: trattazione e risultato sono formalmente identici a quelli visti in corrente continua per il ponte di Wheatstone (problema 4.12). Esplicitando si arriva a

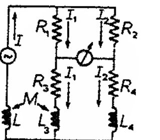
$$i\omega C_1\,\frac{R_2 R_3}{R_4} = (1 + i\omega R_1 C_1)\,(1 + i\omega R_2 C_2) \quad .$$

L'eguaglianza tra due numeri complessi implica eguaglianza delle parti reali e delle parti immaginarie separatamente, il che porta a

$$\omega^2 = \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2} \quad , \quad C_2 = C_1\left(\frac{R_3}{R_4} - \frac{R_1}{R_2}\right) \quad .$$

Dalla seconda ricaviamo $C_2 = 0.2\ \mu F$ e quindi $\omega = 3 \cdot 10^3\ s^{-1}$.

8.19. ***Per la misura dei coefficienti di mutua induzione può servire il circuito in figura, detto ponte di Heaviside. Con una regolazione opportuna dei valori R_1 e R_2 si supponga di annullare la corrente nel ponte; calcolare, in base a questo fatto e ai valori $R_3 = 100\ \Omega$, $L_3 = 0.5$ H, $R_4 = 125\ \Omega$, $L_4 = 0.7$ H, quanto vale M.***



Quando nello strumento del ponte non circola corrente si ha per I_1 e I_2 la situazione schematizzata in figura. Occorre tener presente che nel ramo contenente L_3 c'è anche la tensione dovuta alla mutua induzione, pari a $M\,dI/dt = i\omega M I = i\omega M(I_1 + I_2)$. Pertanto

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad , \quad I_1(R_3 + i\omega L_3) + i\omega M(I_1 + I_2) = I_2(R_4 + i\omega L_4) \quad .$$

Riordinando nelle correnti e dividendo membro a membro

$$\frac{R_3 + i\omega(L_3 + M)}{R_1} = \frac{R_4 + i\omega(L_4 - M)}{R_2}$$

e l'eguaglianza sussiste se

$$\frac{R_3}{R_1}=\frac{R_4}{R_2} \quad , \quad \frac{L_3+M}{R_1}=\frac{L_4-M}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_3+M}{L_4-M}=\frac{R_3}{R_4} \quad .$$

Si risolve in M e si ottiene

$$M=\frac{L_4R_3-L_3R_4}{R_3+R_4}=33\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} \quad .$$

Il segno di M dipende dal verso degli avvolgimenti.

8.20. ***Un trasformatore ideale (flusso disperso nullo) è costituito da un nucleo magnetico su cui sono disposti, uno sull'altro, due avvolgimenti aventi lo stesso verso, uno con $N_1=20$ spire, l'altro con $N_2=500$ spire; la sezione del nucleo è $\Sigma=4$ cm^2, gli avvolgimenti sono lunghi $l=10$ cm, la permeabilità magnetica relativa è $\varkappa_m=60$. Al primario del trasformatore viene collegato un generatore di f.em. alternata con $V_0=3$ V, $\omega=2.5\cdot 10^3$ s^{-1}, mentre il secondario viene chiuso su un resistore di resistenza $R_2=10^5$ Ω. Si calcolino le correnti nel primario e nel secondario e il loro rapporto, in modulo e fase, la tensione ai capi di R_2, la potenza erogata dal generatore e quella dissipata su R_2.***

Secondo quanto visto nei problemi 7.5, 6.25, 6.27 scriviamo:

$$L_1=\mu_0\varkappa_m\frac{N_1^2}{l}\,\Sigma=1.2\cdot 10^{-4}\ \mathrm{H} \quad , \quad L_2=\mu_0\varkappa_m\frac{N_2^2}{l}\,\Sigma=7.54\cdot 10^{-2}\ \mathrm{H} \quad ,$$



$$M=(L_1L_2)^{1/2}=3\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} \quad .$$

Poiché i due avvolgimenti sono equiversi si ha, ragionando sui flussi, che istante per istante gli estremi vicini dei due avvolgimenti hanno la stessa polarità; usualmente gli estremi con la stessa polarità istantanea vengono segnati con un punto. Se gli avvolgimenti non fossero equiversi dovremmo, secondo questa convenzione, lasciare fisso per esempio il punto di L_1 e portare quello di L_2 all'altro estremo. Supponiamo ora che ad un certo istante la corrente I_1 abbia il verso segnato in figura: gli estremi segnati col punto sono positivi e quindi, in quell'istante, la corrente nel circuito secondario ha il verso segnato; questa corrente viene detta naturale, nel senso che è quella che circola spontaneamente nel secondario, non essendoci altre sorgenti di f.em. Ragionando di nuovo sui flussi e sui versi degli avvolgimenti, si vede che una corrente I_2 con quel verso genera nel primario una f.em. di mutua induzione con lo stesso verso di V e quindi verso opposto a quella di autoinduzione. Tutto ciò si trasferisce nei segni delle equazioni delle maglie:

$$V=i\omega L_1I_1-i\omega MI_2 \quad , \quad 0=-i\omega MI_1+(R_2+i\omega L_2)I_2 \quad .$$

La regola mnemonica generalmente usata in questi casi è: se le correnti entrano o escono entrambe dagli estremi col punto M ha lo stesso segno di L, se invece una entra e l'altra esce M e L hanno segno opposto.

Risolvendo nelle correnti si trova:

$$I_1=\frac{\omega L_2-iR_2}{\omega L_1R_2}\,V \quad , \quad I_2=\frac{M}{L_1R_2}\,V=\frac{N_2}{N_1}\frac{V}{R_2} \quad ,$$

essendosi usata la $M=(L_1L_2)^{1/2}$ e le espressioni di L_1 e L_2. Nel primario la corrente è in ritardo rispetto a V, nel secondario invece è in fase con V e non dipende da ω, a differenza di I_1.

Il rapporto tra le correnti vale

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{i\omega M}{R_2+i\omega L_2}=\frac{\omega M}{(R_2^2+\omega^2L_2^2)^{1/2}}\,e^{i\phi} \quad , \quad \mathrm{tg}\,\phi=\frac{R_2}{\omega L_2} \quad .$$

La tensione ai capi di R_2 è

$$V_2=R_2I_2=\frac{N_2}{N_1}\,V \quad .$$

Per il calcolo della potenza erogata dal generatore occorre conoscere lo sfasamento tra corrente e tensione nel primario, cioè la fase di I_1 rispetto a V: dall'espressione di I_1 si vede che $\mathrm{tg}\,\phi_1=-R_2/\omega L_2$. Pertanto

$$P=\frac{I_{1,0}V_0}{2}\cos\phi_1=\frac{(R_2^2+\omega^2L_2^2)^{1/2}}{2\omega L_1R_2}\,\frac{V_0^2}{(1+\mathrm{tg}^2\phi_1)^{1/2}}=\frac{L_2V_0^2}{2L_1R_2}=\frac{N_2^2V_0^2}{2N_1^2R_2} \quad .$$

La potenza dissipata su R_2 è

$$P'=\frac{R_2I_{2,0}^2}{2}=\frac{R_2}{2}\left(\frac{N_2V_0}{N_1R_2}\right)^2=P \quad .$$

Nel trasformatore ideale non c'è assorbimento di potenza: quella fornita dal generatore viene integralmente spesa nel secondario (se non ci sono resistenze nel circuito primario).

Nel caso particolare in cui $R_2\ll\omega L_2$ abbiamo:

$$I_1=\frac{L_2}{L_1R_2}\,V \quad \Rightarrow \quad I_{1,0}=\frac{L_2V_0}{L_1R_2}=\frac{N_2^2V_0}{N_1^2R_2} \quad , \quad \mathrm{tg}\,\phi_1=0 \quad ,$$

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{M}{L_2}=\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1/2}=\frac{N_1}{N_2} \quad ;$$

le correnti nel primario e nel secondario sono in fase tra loro e col generatore.

Passiamo al calcolo numerico: $\omega L_2=188.5\ \Omega\ll R_2$, per cui dobbiamo usare le formule non approssimate. Si trova:

$$I_1=10e^{-i\pi/2} \quad , \quad I_2=7.5\cdot 10^{-4}e^{i0^\circ} \quad ,$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 7.5 \cdot 10^{-5} e^{i\pi/2} \quad , \; V_2 = R_2 I_2 = 75 e^{i0^\circ} \quad ,$$

$$P = 2.8 \cdot 10^{-2}\text{W}.$$

Il fattore $e^{i\omega t}$ è stato sottinteso, come si usare fare comunemente, lasciando solo l'indicazione degli sfasamenti.

Se gli avvolgimenti non fossero stati equiversi, le differenze nel risultato avrebbero riguardato solo la fase di I_2 (π invece di zero) e perciò di V_2; i moduli sarebbero rimasti gli stessi e così la potenza dissipata.

8.21. ***Calcolare, per il circuito in figura, le potenze erogate dai generatori e quelle assorbite da R_1 e R_2. Si assuma $V_1 = 200$ V, $V_2 = 100$ V (in fase tra loro), $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $\omega L_1 = 4\ \Omega$, $\omega L_2 = 2\ \Omega$, $\omega M = 1\ \Omega$.***



Le equazioni del circuito, alla luce di quanto visto nel problema 8.20, di cui seguiamo le convenzioni, sono:

$$\begin{aligned} (R_1 + i\omega L_1)I_1 + i\omega M I_2 = V_1 & \qquad (4 + i4)I_1 + iI_2 = 200 \\ & \Rightarrow \\ i\omega M I_1 + (R_2 + i\omega L_2)I_2 = V_2 & \qquad iI_1 + (2 + i2)I_2 = 100 \quad . \end{aligned}$$

Risolvendo direttamente le equazioni numeriche

$$I_1 = 20.24 - i23.74 = 31.20 e^{-i49\,55^\circ} \quad ,$$

$$I_2 = 14.00 - i24.12 = 27.89 e^{-i59\,87^\circ} \quad .$$

Le potenze erogate dai generatori sono.

$$P_1 = \frac{1}{2}\, 31.20 \cdot 200 \cos 49.55^\circ = 2024 \text{ W} \quad ,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\, 27.89 \cdot 100 \cos 59.87^\circ = 700 \text{ W} \quad .$$

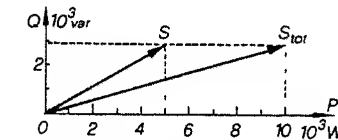
Su R_1 e R_2 vengono spese le potenze

$$P_1' = \frac{1}{2}\, 4(31.20)^2 = 1947 \text{ W} \quad ,$$

$$P_2' = \frac{1}{2}\, 2(27.89)^2 = 778 \text{ W} \quad ,$$

Vediamo che $P_1 + P_2 = P_1' + P_2'$, però R_2 dissipa più di quanto il secondo generatore fornisca e quindi c'è un trasferimento di potenza dal primario al secondario. Lo scambio tra i due circuiti, che non sono collegati conduttivamente, avviene tramite il campo magnetico.

8.22. ***Un trasformatore, che al massimo può erogare 10^4 va, è connesso a un carico di $5 \cdot 10^3$ W con fattore di potenza 0.866 in anticipo. Calcolare quanti carichi resistivi possono essere aggiunti prima che il trasformatore sia a pieno carico. Ripetere il calcolo se i carichi aggiunti hanno un fattore di potenza 0.800 in ritardo.***



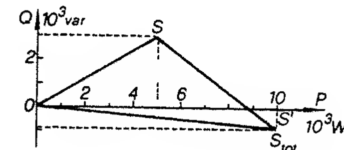
Per carico con fattore di potenza in anticipo (in ritardo) si intende un carico il cui comportamento è induttivo (capacitivo). La situazione è illustrata in figura, dove si è fatto uso delle (8.17-8.18-8.19); $\cos\phi = 0.866$ vuol dire $\phi = 30^\circ$ e $Q = P \operatorname{tg}\phi = 2.89 \cdot 10^3$ var; di qui $S = (P^2 + Q^2)^{1/2} = 5.78 \cdot 10^3$ va. Se si aggiungono carichi resistivi Q resta invariata e aumenta P: possiamo farlo fino a che la potenza apparente vale $S_{\text{tot}} = 10^4$ va. La nuova potenza reale è

$$P' = (S_{\text{tot}}^2 - Q^2)^{1/2} = 9.57 \cdot 10^3 \text{ W} \quad ;$$

si possono cioè aggiungere $4.57 \cdot 10^3$ W; il fattore di potenza aumenta da 0.866 a 0.957.

Nel secondo caso dobbiamo determinare la potenza apparente S' che sommata vettorialmente a S dà S_{tot} (vedi figura). La potenza reale corrispondente a S' è 0.8 S', quella reattiva è 0.6 S'; dopo l'aggiunta deve essere soddisfatta la relazione

$$(P + 0.8\ S')^2 + (Q - 0.6\ S')^2 = S_{\text{tot}}^2 \quad ,$$



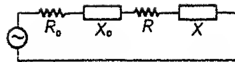
dove $P = 5 \cdot 10^3$ W e $Q = 2.89 \cdot 10^3$ var; risulta $S' = 6.21 \cdot 10^3$ va con componenti $P' = 4.97 \cdot 10^3$ W, $Q' = -3.73 \cdot 10^3$ var. In conclusione possono essere aggiunti 4970 W con fattore di potenza 0.800 in ritardo per arrivare a caricare completamente il trasformatore. Il nuovo fattore di potenza è 0.997.

È conveniente in generale che il fattore di potenza sia vicino a 1; a parità di potenza reale minore è la potenza apparente, cioè il prodotto della corrente per la tensione; in caso contrario occorrerebbe dimensionare i generatori in modo da poter fornire notevoli correnti che poi non vengono sfruttate se $\cos\phi$ è piccolo. È pratica comune, se un carico presenta un grande sfasamento, aggiungere opportuni carichi capacitivi o induttivi; il problema 8.11 rappresenta un esempio semplice di tale procedura. D'altra parte non è nemmeno consigliabile un collegamento con $\cos\phi = 1$, in quanto è bene che l'erogatore possieda una certa elasticità di servizio, cioè una riserva di potenza.

8.23. ***Nel circuito in figura, fissati i valori di R_0 e X_0, trovare i valori di R e X affinché sia massima la potenza dissipata su R. Applicare il risultato al circuito della seconda figura in cui $R_0 = 100\ \Omega$, $L_0 = 0.1$ H, $L = 0.04$ H, $\omega = 10^3\ \text{s}^{-1}$.***

L'impedenza del primo circuito è

$$Z = R_0 + R + i(X_0 + X)$$



e il valor massimo della corrente è quindi

$$I_0 = \frac{V_0}{[(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2]^{1/2}} \quad .$$

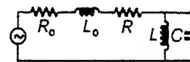
La potenza spesa su R ha l'espressione

$$P = \frac{1}{2} R I_0^2 = \frac{R}{2} \frac{V_0^2}{(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2} \quad .$$

Qualunque sia il valore di R la potenza è massima quando $X = -X_0$; soddisfatta questa condizione il circuito si comporta come se fosse puramente resistivo e dal problema 4.6 sappiamo che la potenza è massima se $R = R_0$. Diversamente, dP/dR si annulla solo se $(R_0 + R)(R_0 - R) + (X_0 + X)^2 = 0$, cioè solo se $R = R_0$ e $X = -X_0$. Notiamo che la condizione sulle reattanze, coincidente con la condizione di risonanza, non è sempre realizzabile; basta per esempio che X_0 e X siano due reattanze induttive (o capacitive).

Vediamo allora se è possibile applicare la condizione di massimo al circuito in figura: $X_0 = \omega L_0$ e

$$iX = \frac{i\omega L / i\omega C}{i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad .$$



Dall'uguaglianza $X = -X_0$ si ricava

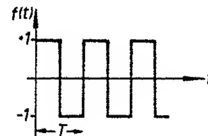
$$C = \frac{1}{\omega^2} \frac{L + L_0}{L L_0} = 35 \ \mu\text{F} \quad .$$

Basta ora porre $R = R_0 = 100\ \Omega$ per avere il massimo trasferimento di potenza su R. È importante rilevare che la soluzione dipende dalla pulsazione del generatore.

8.24. ***La funzione periodica della figura ha periodo $T = 10^{-3}$ s e vale $V = 1$ nel primo mezzo periodo, $V = -1$ nel secondo; nei punti $t = 0$, $T/2$, T, ... presenta una discontinuità. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di tale funzione.***

La funzione $f(t)$ è alternata, cioè con valor medio nullo su un periodo; secondo (8.21) $a_0 = 0$. Calcoliamo gli altri coefficienti dello sviluppo (8.20):

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V \cos n\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^{T} -V \cos n\omega t \, dt \quad .$$



Cambiamo variabile di integrazione, passando da t a $n\omega t$:

$$a_n = \frac{2V}{n\omega T} \int_0^{n\pi} \cos n\omega t \, d(n\omega t) - \frac{2V}{n\omega t} \int_{n\pi}^{2n\pi} \cos n\omega t \, d(n\omega t)$$

$$= \frac{V}{n\pi} \Big[\operatorname{sen} n\omega t \Big]_0^{n\pi} - \frac{V}{n\pi} \Big[\operatorname{sen} n\omega t \Big]_{n\pi}^{2n\pi} = 0 \quad .$$

Il risultato è vero qualunque sia il valore di n. Passiamo a b_n:

$$b_n = \frac{2V}{n\omega t} \int_0^{n\pi} \operatorname{sen} n\omega t \, d(n\omega t) - \frac{2V}{n\omega t} \int_{n\pi}^{2n\pi} \operatorname{sen} n\omega t \, d(n\omega t)$$

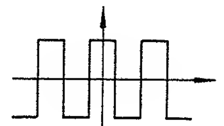
$$= \frac{V}{n\pi} \Big[-\cos n\omega t \Big]_0^{n\pi} + \frac{V}{n\pi} \Big[\cos n\omega t \Big]_{n\pi}^{2n\pi} = \frac{2V}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

Se n è pari $b_n = 0$, se n è dispari $b_n = 4V/n\pi$. Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(t)$ è dunque

$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \left(\operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\omega t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\omega t + \ldots \right)$$

$$= 1.27 \left(\operatorname{sen} 6283 t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 18849 t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 31415 t + \ldots \right)$$

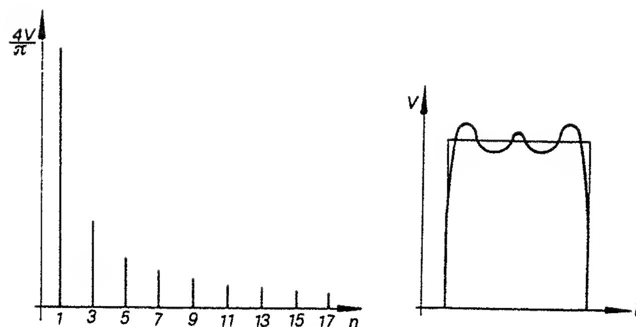
La struttura caratteristica dello sviluppo, contenente oltre al termine fondamentale solo armoniche dispari, può essere prevista a priori dallo studio delle proprietà di simmetria di $f(t)$. Si vede subito che $f(t) = -f(-t)$ per cui i termini $\cos n\omega t$, simmetrici rispetto allo scambio $t \to -t$, sono esclusi; inoltre $f(t + T/2) = -f(t)$ e ciò esclude i termini $\operatorname{sen} n\omega t$ con n pari. Lasciamo come esercizio il calcolo dello sviluppo di Fourier della funzione nella figura accanto; è la stessa vista prima, però con l'origine dell'asse dei tempi spostata di $T/4$. Il risultato è



$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \ldots \right) \quad .$$

Di nuovo si può giustificare la struttura in base a considerazioni di simmetria. In realtà non ci sarebbe bisogno di nessun calcolo: in termini di ωt c'è stato uno spostamento di $\pi/2$ che muta i seni in coseni.

Un fatto importante mostrato dall'esempio studiato è l'invarianza dell'ampiezza delle varie armoniche: nell'uno e nell'altro caso l'n-esima ha ampiezza $4V/n\pi$. Nella figura è rappresentato lo spettro di Fourier: in ascissa si riporta n, in ordinata l'ampiezza delle armoniche. Nel nostro caso le armoniche di ordine elevato hanno ancora ampiezza apprezzabile, cioè per approssimare



bene la funzione data occorre un gran numero di termini. La risultante del termine fondamentale e della 3ª, 5ª, 7ª, 9ª armonica è riportato accanto allo spettro (per mezzo periodo); esso mostra anche una proprietà generale di questi sviluppi: nei punti di discontinuità la somma della serie dà il medio aritmetico tra il limite sinistro e quello destro di $f(t)$.

8.25. *Un segnale sinusoidale $V = V_0$ sen$\,\omega t = 310$sen$\,314t$ V, passando attraverso un sistema raddrizzatore, viene modificato secondo la forma $V'(t)$ mostrata in figura. Questa è applicata a un filtro passa-basso con $R = 100\ \Omega$. Calcolare a circuito aperto quanto vale il livello di continua V_c in uscita al filtro e quanto deve valere C affinché il valore efficace del termine armonico più importante sia $10^{-2}\ V_c$.*



Il segnale sinusoidale raddrizzato è ancora una funzione periodica non alternata cui applichiamo la scomposizione in serie di Fourier. Dalla figura ricaviamo queste informazioni: a_0, valor medio di $V'(t)$, è diverso da zero; i coefficienti b_n sono tutti nulli perché $V'(t)$ è simmetrico rispetto all'origine; i coefficienti a_n con n dispari sono anch'essi tutti nulli perché $V'(t + T/2) = V'(t)$ Essendo $V'(t) = V_0 \text{sen}\,\omega t$ nel primo semiperiodo (di V) e $V'(t) = -V_0 \text{sen}\,\omega t$ nel secondo, abbiamo:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T V'(t)\,dt = \frac{V_0}{2\pi}\int_0^\pi \text{sen}\,\omega t\, d(\omega t) - \frac{V_0}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \text{sen}\,\omega t\, d(\omega t) = \frac{2V_0}{\pi} \quad ,$$

$$a_n = \frac{V_0}{\pi}\int_0^\pi \text{sen}\,\omega t \cos n\,\omega t\, d(\omega t) - \frac{V_0}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \text{sen}\,\omega t \cos n\,\omega t\, d(\omega t) \quad .$$

I due integrali sono eguali ed opposti; il primo vale (n è pari)

$$\left[\frac{n\,\text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,n\,\omega t + \cos\omega t\cos n\,\omega t}{n^2-1}\right]_0^\pi = -\frac{2}{n^2-1}$$

per cui $a_n = -4V_0/[(n^2-1)\pi]$ e lo sviluppo di Fourier risulta

$$V'(t) = \frac{4V_0}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2\,\omega t - \frac{1}{15}\cos 4\,\omega t - \dots\right) \quad .$$

Il termine continuo non è modificato dal filtro e vale in uscita

$$V_c = \frac{2V_0}{\pi} = 0.637\ V_0 = 197.5\ \text{V} \quad .$$

Il termine armonico più importante è il secondo, di pulsazione $\omega_2 = 628\ \text{s}^{-1}$ il cui valore efficace in entrata al filtro è

$$V_i = \frac{1}{2^{1/2}}\,\frac{4V_0}{3\pi} = \frac{2^{3/2}V_0}{3\pi} = 0.3\ V_0 = 93\ \text{V} \quad .$$

In uscita vogliamo

$$V_u = 10^{-2}V_c = 2\cdot 10^{-2}\,\frac{V_0}{\pi} = \frac{3\cdot 10^{-2}}{2^{1/2}}\,V_i = 2.12\cdot 10^{-2}V_i = 1.97\ \text{V}$$

Dal problema 8.8 abbiamo, per un filtro passa-basso,

$$\frac{V_u}{V_i} = \frac{1}{(1+\omega_2^2R^2C^2)^{1/2}} = 2.12\cdot 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad C = 751\ \mu\text{F} \quad .$$

Il filtraggio capacitivo, qui descritto a grandi linee, è comunemente usato nei generatori a raddrizzatore di f.em. continue

8.26. *Un generatore di f.em. $V = AV_0\cos\omega t + BV_0\cos 3\,\omega t$ è connesso a un circuito RLC in serie. Calcolare quanto devono valere R e C affinché il circuito entri in risonanza alla pulsazione della terza armonica e, in risonanza, il rapporto tra i valori massimi della corrente con pulsazione 3ω e della corrente con pulsazione ω sia 10. Calcolare inoltre il valore efficace della corrente totale e la potenza dissipata. Si assuma $L = 3\cdot 10^{-2}$ H, $V_0 = 10$ V, $\omega = 10^5\ \text{s}^{-1}$, $A = 1$, $B = 0.1$.*

Se deve essere $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 3\,\omega$, otteniamo

$$C = \frac{1}{9\,\omega^2 L} = 0.37\ \text{nF} \quad .$$

Imponiamo adesso la condizione sui valori massimi delle correnti. Se applicassimo separatamente $V_1 = AV_0\cos\omega t$ e $V_3 = BV_0\cos 3\,\omega t$ ottenendo rispettiva-

mente le correnti I_1 e I_3, il principio di sovrapposizione ci assicura che quando applichiamo $V = V_1 + V_3$ la corrente è $I = I_1 + I_3$; i valori massimi sono dati da

$$I_{1,0} = \frac{A V_0}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}} \quad , \quad I_{3,0} = \frac{B V_0}{R}$$

e la condizione $I_{3,0} = 10\ I_{1,0}$ porge $R = 240\ \Omega$. Di qui e da (8.25) segue:

$$I_{1,0} = 0.42 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \quad , \quad I_{3,0} = 4.17 \cdot 10^{-3}\ \text{A}$$

$$I_{\text{eff}} = \left(\frac{1}{2}\ I_{1,0}^2 + \frac{1}{2}\ I_{3,0}^2\right)^{1/2} = 2.96 \cdot 10^{-3}\ \text{A}$$

La potenza dissipata si calcola da (8.24); per gli sfasamenti $\operatorname{tg}\phi_1 = (\omega L - 1/\omega C)/R = 100$, da cui $\cos\phi_1 = 10^{-2}$, $\phi_3 = 0$ e quindi

$$P = \frac{1}{2}\ A V_0 I_{1,0} \cos\phi_1 + \frac{1}{2}\ B V_0 I_{3,0} \cos\phi_3$$

$$= 0.21 \cdot 10^{-3} + 2.08 \cdot 10^{-3} = 2.29 \cdot 10^{-3}\ \text{W}.$$

NOTE

A. Esiste un limite all'analisi dei circuiti in regime alternato vista in questo capitolo. Precisamente, non sempre è lecito considerare, ad un certo istante, identico il valore della corrente attraverso ogni sezione di un circuito. Occorre, in base a considerazioni che verranno esposte in seguito, che il periodo delle grandezze alternate sia grande rispetto al tempo che la luce impiegherebbe a percorrere la dimensione massima del circuito. La luce impiega $\sim 3 \cdot 10^{-9}$ s a percorrere un metro (nel vuoto); è possibile perciò arrivare a periodi dell'ordine di 10^{-7} s, ovvero a frequenze di 10^7 Hz, senza dovere tener conto nei circuiti a estensione ordinaria, della limitazione suddetta.

B. Con riferimento al problema 8.12 e seguenti, introduciamo il concetto di banda di risonanza. Si definisce così l'intervallo $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, dove $\omega_1 < \omega_0$ e $\omega_2 > \omega_0$ sono tali che

$$I_0(\omega_1) = I_0(\omega_2) = \frac{1}{2^{1/2}}\ I_0(\omega_0) \quad ;$$

alle pulsazioni ω_1 e ω_2 succede cioè che

$$\frac{V_0}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{V_0}{2^{1/2} R} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad .$$

Si presentano le due possibilità

$$R = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad , \quad -R = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad .$$

Nella prima, poiché R è sempre positivo, deve essere $\omega L > 1/\omega C$ e quindi la usiamo per il calcolo di ω_2; nella seconda deve essere $\omega L < 1/\omega C$ e ci serve per calcolare ω_1. Le equazioni sono

$$LC\omega_2^2 - RC\omega_2 - 1 = 0 \quad , \quad LC\omega_1^2 + RC\omega_1 - 1 = 0$$

e le due soluzioni fisiche (maggiori di zero) sono

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \left(\frac{R}{4L} + \omega_0\right)^{1/2} \quad , \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \left(\frac{R}{4L} + \omega_0\right)^{1/2} \quad .$$

Le due pulsazioni non sono simmetriche rispetto a ω_0; la differenza

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

è la larghezza della banda di risonanza; si vede poi che $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$, cioè ω_0 è medio proporzionale tra ω_1 e ω_2. Al rapporto

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}$$

si dà in nome di Q – *valore* del circuito alla risonanza.

Si noti che in termini di fasi $\phi(\omega_1) = -45°$, $\phi(\omega_2) = +45°$; inoltre la definizione di banda di risonanza può essere fatta anche in termini di potenza: $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 1/2\ P(\omega_0)$; poiché $P(\omega) = 1/2\ RI_0^2(\omega)$, le definizioni sono equivalenti.

Le linee tratteggiate verticali nella figura del problema 8.12 indicano i limiti della banda di risonanza; con i dati del problema:

$R(\Omega)$	$\omega_1(s^{-1})$	$\omega_2(s^{-1})$	$\Delta\omega(s^{-1})$	Q
10	$9.5 \cdot 10^3$	$10.5 \cdot 10^3$	10^3	10
10^2	$6.2 \cdot 10^3$	$16.2 \cdot 10^3$	10^4	1
10^3	$1.0 \cdot 10^3$	$10.1 \cdot 10^4$	10^5	10^{-1}

* * *

MOTI DI CARICHE IN CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI

9a. Una particella con carica q, posta in un campo elettrico $\mathbf{E}$, risente di una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad . \tag{9.1}$$

Passando da un punto a potenziale V_1 ad un altro a potenziale V_2 la particella acquista o cede l'energia $W = q(V_2 - V_1)$ Tramite un campo elettrico è così possibile comunicare energia ad una particella carica: su questo fatto sono basati tutti gli acceleratori di particelle.

In presenza di un campo magnetico la forza agente è quella di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathbf{B} \quad . \tag{9.2}$$

Essa non compie lavoro sulla particella in quanto è ortogonale alla velocità e quindi alla traiettoria del moto: di conseguenza l'accelerazione tangenziale è nulla, il modulo della velocità e della quantità di moto e l'energia cinetica restano costanti; invece è diversa da zero l'accelerazione centripeta e cambia la direzione della velocità. L'azione del campo magnetico non è perciò quella di scambiare energia con la particella, bensì quella di mutarne la traiettoria.

Se sulla particella agiscono contemporaneamente un campo elettrico e uno magnetico, la forza totale è

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mathbf{B}) \quad ; \tag{9.3}$$

le componenti cartesiane si scrivono

$$\begin{aligned} F_x &= q\left(E_x + B_z \frac{dy}{dt} - B_y \frac{dz}{dt}\right) \\ F_y &= q\left(E_y + B_x \frac{dz}{dt} - B_z \frac{dx}{dt}\right) \\ F_z &= q\left(E_z + B_y \frac{dx}{dt} - B_x \frac{dy}{dt}\right) \quad . \end{aligned} \tag{9.4}$$

L'equazione vettoriale del moto risulta

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_- \, , \tag{9.5}$$

se m è la massa della particella; essa equivale a tre equazioni sulle componenti. Con **R** abbiamo indicato la risultante delle altre forze agenti, che possono essere il peso (trascurabile rispetto alla forza elettromagnetica per particelle atomiche e subatomiche), eventuali forze di attrito o altro.

A rigore, nel calcolo dei valori dei campi occorrerebbe tener conto, oltre che delle sorgenti prefissate, anche delle modificazioni introdotte dalla particella carica in moto; noi però trascureremo questi effetti, molto piccoli in generale.

Una particella carica in moto con accelerazione a perde energia per irraggiamento; la potenza irradiata è data dalla *formula di Larmor*:

$$P = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{2}{3}\,\frac{a^2}{c^3} = 0.22 \cdot 10^{-15} q^2 a^2\ \mathrm{W} = 1.38 \cdot 10^3 q^2 a^2\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{s}} \quad , \quad (9.6)$$

dove $c = 3 \cdot 10^8$ m/s è la velocità della luce nel vuoto. La formula resta valida finché la velocità della particella è molto minore di c.

9b. Nel processo di accelerazione di particelle come gli elettroni e i protoni è facile far loro acquistare velocità assai prossime a c; occorre allora usare formule relativistiche. Senza darne alcuna spiegazione elenchiamo quelle formule che ci saranno utili, più che altro per valutare l'importanza delle correzioni relativistiche e quando è necessario applicarle

La massa di una particella carica varia con la velocità della stessa secondo

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{1/2}} = \gamma m_0 \quad ; \quad (9.7)$$

m_0 è una costante che rappresenta la massa della particella quando questa è in quiete e viene detta *massa a riposo*. Nella (9.7) abbiamo introdotto due espressioni comunemente usate: β, che dà il rapporto tra la velocità della particella e la velocità della luce nel vuoto, e γ, che dà il rapporto tra m e m_0 in funzione di β. Vediamo da (9.7) che c è un valore limite, non raggiungibile da corpi materiali, cioè con $m_0 > 0$.

L'energia totale posseduta da una particella in moto è

$$W = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad . \quad (9.8)$$

Per $v = 0$, ovvero a riposo, la particella ha l'energia (di massa) $m_0 c^2$. L'energia cinetica è data dalla differenza

$$T = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left[\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} - 1\right] \quad . \quad (9.9)$$

Se si sviluppa γ in serie di Taylor in un intorno di $\beta = 0$, cioè per piccole velocità, si trova, arrestandosi al second'ordine, $\gamma = 1 + 1/2\ \beta^2$ e quindi

$T = 1/2\ m_0 v^2$: per $v \ll c$ la formula relativistica coincide in pratica con quella classica.

Tra l'energia totale W e quantità di moto p sussiste la relazione

$$W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad . \quad (9.10)$$

Da questa e da (9.9) si ha poi

$$p = \frac{1}{c}\,[T(T + 2m_0 c^2)]^{1/2} \quad . \quad (9.11)$$

9c. Riportiamo dal secondo capitolo il legame tra elettronvolt e Joule:

$$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \quad , \quad 1\ \mathrm{J} = 6.25 \cdot 10^{18}\ \mathrm{eV} \quad .$$

Si usano i multipli KeV $= 10^3$ eV, MeV $= 10^6$ eV, GeV $= 10^9$ eV, TeV $= 10^{12}$ eV.

La carica elementare vale $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C ed è la carica posseduta, per esempio, da un protone (con segno positivo) e da un elettrone (con segno negativo).

Le masse a riposo dell'elettrone e del protone sono

$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{Kg} \quad , \quad m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{Kg} \quad ,$$

cui corrispondono le energie a riposo

$$W_e = m_e c^2 = 0.82 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J} = 0.51\ \mathrm{MeV} \quad ,$$

$$W_p = m_p c^2 = 0.15 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{J} = 938\ \mathrm{MeV} \quad .$$

La struttura della (9.10) suggerisce l'adozione delle unità eV/c per la quantità di moto e eV/c^2 per la massa; le relazioni con le unità MKS sono:

$$1\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{c}} = 5.33 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{Kg}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad , \quad 1\ \mathrm{Kg}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1.87 \cdot 10^{27}\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{c}} \quad ,$$

$$1\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{c}^2} = 1.78 \cdot 10^{-36}\ \mathrm{Kg} \quad , \quad 1\ \mathrm{Kg} = 5.62 \cdot 10^{35}\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{c}^2} \quad .$$

Le unità eV, eV/c, eV/c^2 (con i rispettivi multipli) sono, nella pratica, sempre usate in fisica atomica, nucleare e subnucleare al posto delle corrispondenti unità MKS. Si noti che la misura della massa a riposo in eV/c^2 è numericamente eguale a quella dell'energia a riposo in eV e che, in queste unità, la (9.10) si scrive semplicemente $W^2 = p^2 + m_0^2$.

9d. Salvo esplicita avvertenza in contrario, nei dispositivi descritti nei problemi di questo capitolo è praticato un vuoto spinto: il moto delle particelle avviene cioè nel vuoto: nella (9.5) $\mathbf{R} = m\mathbf{g}$ ovvero, se si può trascurare il peso, $\mathbf{R} = 0$.

Occorre infine precisare che molti degli argomenti trattati nel seguito sono un'esposizione, sotto forma di problema, di classiche esperienze degli albori della fisica moderna oppure dei principi di funzionamento di alcune macchine

acceleratrici. Una tale trasposizione non è però sempre possibile; pertanto certi problemi vanno visti piuttosto come complementi (p.e. il 9.3, il 9.5, il 9.11, il 9.22 e il 9.23).

* * *

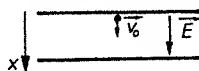
9.1. ***Descrivere il moto di una particella carica all'interno di un condensatore piano con le armature orizzontali e distanti d, ai cui capi è applicata la d.d.p. V, nell'ipotesi che la velocità iniziale sia parallela a g. Ripetere il calcolo nel caso in cui il moto avvenga in aria (viscosità*** $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ **Kg/ms,** ***densità*** $\varrho = 1.3$ **Kg/m^3*)* *e la particella sia una gocciolina d'olio (raggio*** $R = 10^{-4}$ **cm,** ***densità*** $\delta = 8 \cdot 10^2$ **Kg/m^3*)* *con carica positiva*** $q = 10e = 1.6 \cdot 10^{-18}$ **C.** ***Si assuma*** $x_0 = 0$, $v_0 = 10$ **cm/s,** $E = V/d = 10^5$ **V/m.**

Consideriamo uniforme il campo elettrico $E = V/d$ all'interno del condensatore, con verso e direzione indicati in figura. La forza peso e la forza elettrica sono entrambe parallele all'asse x e, vista l'ipotesi sulla velocità iniziale, il moto si svolge lungo l'asse x con equazione

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = qE + mg \qquad \text{ovvero} \qquad a = \frac{q}{m}\,E + g \quad .$$

Si tratta di un moto uniformemente accelerato e la posizione della particella è data da

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\,E + g\right)t^2 \quad .$$



Il problema è analogo a quello del moto verticale di un grave, con la differenza che l'accelerazione può essere in modulo maggiore o minore di g e anche opposta in verso, a seconda di come si confrontano tra loro i termini qE/m e g. Si noti che sul primo termine influiscono il segno della carica e il verso del campo, oltre che i rispettivi valori numerici.

In presenza d'aria le forze in gioco sono quattro: forza di gravità $m\mathbf{g}$, spinta idrostatica $-m'\mathbf{g}$, forza elettrica $q\mathbf{E}$, resistenza dell'aria. Per quest'ultima usiamo la legge di Stokes, pensando che le velocità non siano elevate (attrito viscoso), e scriviamo $-6\pi\eta R\mathbf{v}$. Posto

$$m = \frac{4}{3}\,\pi R^3\delta \quad , \quad m' = \frac{4}{3}\,\pi R^3\varrho = \frac{\varrho}{\delta}\,m \quad ,$$

l'equazione del moto risulta

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\left[\left(1 - \frac{\varrho}{\delta}\right)g + \frac{q}{m}\,E - 6\pi\eta\,\frac{R}{m}\,v\right]$$

ovvero, ponendo $C_1 = \left(1 - \frac{\varrho}{\delta}\right)g + \frac{q}{m}\,E$ e $C_2 = 6\pi\eta\,\frac{R}{m}$,

$$\frac{dv}{dt} = C_1 - C_2 v \quad .$$

Separando le variabili e integrando tra lo stato iniziale $t = 0$, $v = v_0$ e un generico stato successivo t, v otteniamo

$$v = \frac{C_1}{C_2} - \frac{C_1 - C_2 v_0}{C_2}\,e^{-C_2 t} \quad .$$

Dopo un tempo dell'ordine di qualche costante di tempo $\tau = 1/C_2 = m/6\pi\eta R$ la parte esponenziale diviene trascurabile e la velocità assume in pratica il valore di regime

$$v_r = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{6\pi\eta R}\left[m\left(1 - \frac{\varrho}{\delta}\right)g + qE\right] \quad . \qquad \text{(a)}$$

Si arriva così a un equilibrio dinamico in cui le forze agenti sono equilibrate da quelle resistenti e il moto risulta uniforme; v_r può essere ricavata molto semplicemente dall'equilibrio delle quattro forze.

Numericamente

$$m = 3.35 \cdot 10^{-15}\ \text{Kg} \quad , \quad \tau = 9.88 \cdot 10^{-6}\ \text{s} \quad ,$$
$$C_1 = 57.6\ \text{m/s}^2 \quad , \quad C_2 = 1.01 \cdot 10^5\ \text{s}^{-1} \quad ,$$
$$v = 5.54 \cdot 10^{-4} + 9.94 \cdot 10^{-2}e^{-1.01 \cdot 10^5 t}\ \text{m/s} \quad ,$$
$$v_r = 5.54 \cdot 10^{-4}\ \text{m/s} = 5.54 \cdot 10^{-2}\ \text{cm/s} \quad .$$

A regime, il tempo impiegato a percorrere un centimetro risulta $t_r = 10^{-2}/v_r = 18.1$ s.

Se durante il moto la carica della gocciolina varia di una quantità $\Delta q = \pm e$, in base alla (a) la velocità varia di

$$\Delta v_r = \pm\frac{eE}{6\pi\eta R} = 4.7 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il tempo per percorrere un centimetro varia di

$$\frac{\Delta t_r}{t_r} = \frac{\Delta v_r}{v_r} = 8.48 \cdot 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_r = 1.54\ \text{s} \quad ,$$

si tratta di una variazione ben rivelabile sperimentalmente.

Di fatto, muovendosi nell'aria, la gocciolina può cedere o acquistare carica dall'ambiente. Se la carica è quantizzata, cioè se in questi processi viene scambiata una carica che è un multiplo intero della carica elementare e, le variazioni di carica saranno $\Delta q = \pm ne$ e in corrispondenza $\Delta v = \pm n\Delta v_r$, $\Delta t = \pm n\Delta t_r$. In base alla (a), regolando opportunamente il valore del campo elettrico, si può far scendere o salire la stessa gocciolina e osservare se le variazioni di tempo obbediscono alla legge data. È stato con un dispositivo

simile a quello qui schematizzato e con il metodo appena discusso che nel 1909 R.A. Millikan riuscì a risalire al valore della carica elettrica elementare.

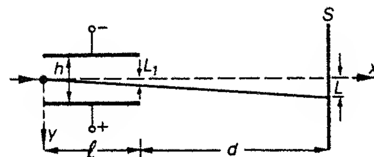
È interessante notare che la misura del raggio della goccioliina viene fatta determinando la velocità $v_{r,0}$ delle goccioline in assenza di campo elettrico; per $E = 0$ la (a) dà

$$R = \left[\frac{9\eta v_{r,0}}{2g\delta\left(1-\frac{\varrho}{\delta}\right)}\right]^{1/2}$$

9.2. ***Ai capi di un condensatore piano è applicata una d.d.p. in modo da realizzare un campo elettrico (uniforme) di valore $E = 10^3$ V/m. Un elettrone con velocità $v_0 = 10^7$ m/s entra nel condensatore ortogonalmente alle linee di campo. Calcolare la deflessione che si osserva su uno schermo fluorescente S posto a una distanza $d = 10$ cm dal bordo del condensatore (vedi figura). Si assuma $l = 4$ cm, $h = 1$ cm.***

Il rapporto tra forza elettrica e forza peso è circa 10^{13} (verificare), per cui ci occuperemo solo della prima. Il moto lungo l'asse x è uniforme con velocità v_0 non essendoci alcuna forza lungo tale asse. Invece lungo l'asse y il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione qE/m concorde all'asse y: il verso del campo è discorde a quello dell'asse y, ma la carica dell'elettrone è negativa. Quindi

$$x = v_0 t \quad , \quad y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2$$



sono le equazioni parametriche della traiettoria dell'elettrone all'interno del condensatore. Il legame esplicito è

$$y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E\frac{x^2}{v_0^2} \quad ,$$

cioè il moto avviene lungo un arco di parabola, come c'era da attendersi vista l'analogia con il moto dei gravi.

La deviazione L_1 lungo l'asse y all'uscita del condensatore si ricava per $x = l$ (al tempo $t = l/v_0$):

$$L_1 = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E\frac{l^2}{v_0^2} \quad .$$

Le componenti della velocità all'istante t sono

$$v_x = v_0 \quad , \quad v_y = at = \frac{q}{m}E\frac{l}{v_0} \quad ,$$

per cui la traiettoria forma con l'asse x l'angolo α dato da

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q}{m}E\frac{l}{v_0^2} \quad .$$

Una volta fuori dal condensatore la traiettoria è rettilinea e sullo schermo si osserva la deflessione

$$L = L_1 + d\operatorname{tg}\alpha = \frac{qEl}{mv_0^2}\left(\frac{l}{2}+d\right) \quad . \tag{a}$$

Con i dati numerici del testo $L = 8.4 \cdot 10^{-3}$ m $= 8.4$ mm.

Storicamente J.J. Thomson si servì di questo metodo nel 1897 per determinare il rapporto q/m per gli elettroni; col il successivo risultato dell'esperienza di Millikan (problema 9.1) fu possibile determinare la massa dell'elettrone.

Si verifichi che per $v = 10^7$ m/s la funzione γ definita in (9.7) differisce dall'unità per circa $6 \cdot 10^{-4}$ così che, con ottima approssimazione, possiamo usare formule non relativistiche (m è quindi la massa a riposo dell'elettrone).

Uno strumento di larghissimo uso in cui sono adottati due elettrodi deflettori come quelli sopra descritti è il tubo a raggi catodici, impiegato per esempio negli oscilloscopi. Si vede dalla relazione (a) come la deflessione sia direttamente proporzionale al modulo di E, ovvero alla d.d.p. applicata tra gli elettrodi: lo strumento fornisce una misura lineare di d.d.p.. Riscriviamo la (a) con due modifiche: sostituiamo E con V/d e mv_0^2/q con $2V_a$; quest'ultima deriva dalla $1/2\, mv_0^2 = qV_a$, dove V_a è la d.d.p. acceleratrice che è servita a comunicare agli elettroni la velocità v_0. Otteniamo

$$L = \frac{Vl}{2hV_a}\left(\frac{l}{2}+d\right) \quad . \tag{b}$$

Si usa definire *sensibilità* dello strumento il rapporto

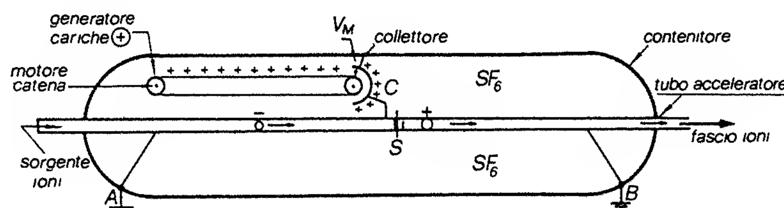
$$S = \frac{L}{V} = \frac{l}{2hV_a}\left(\frac{l}{2}+d\right) \quad ,$$

che nel nostro caso vale 0.84 mm/V. La sensibilità è indipendente dalla d.d.p. applicata (lo strumento è lineare); dipende invece inversamente da V_a: più veloci sono gli elettroni, più difficile è defletterli. Si definisce anche il *fattore di deflessione*

$$F = \frac{1}{S} \quad \Rightarrow \quad F = 1.19 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad ;$$

esso misura la d.d.p. necessaria per ottenere una deflessione unitaria (qui 1.19 V danno 1 mm sullo schermo).

9.3. *In figura è mostrato un acceleratore elettrostatico Tandem. Con un generatore tipo Van de Graaf si porta la parte centrale del tubo acceleratore al potenziale V_M rispetto agli estremi che sono a massa, così che ioni negativi di carica $-e$ immessi a sinistra acquistano l'energia cinetica eV_M; a questo punto essi attraversano un foglio sottilissimo e vengono privati di un certo numero di elettroni; nella seconda metà del tubo tali ioni ora positivi con carica Ze vengono accelerati dalla stessa d.d.p. V_M, così che acquistano l'energia cinetica ZeV_M. Detto A il numero di massa degli ioni e ammesso che Z/A valga circa 0.5 fino allo zolfo e $\sim 16/A$ per elementi più pesanti, calcolare l'energia cinetica finale e l'energia cinetica per nucleone nel caso di ioni* He, O, S, A, Xe, Au, U *se V_M vale* $16 \cdot 10^6$ V.



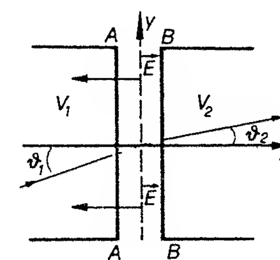
L'energia cinetica finale vale ZeV_M, quella per nucleone vale ZeV_M/A per cui possiamo compilare la seguente tabella.

	A	Z/A	Z	ZeV_M (MeV)	ZeV_M/A (MeV/nucl.)
He	4	0.5	2	32	8
0	16	0.5	8	128	8
S	32	0.5	16	256	8
A	40	0.4	16	256	6.4
Xe	131	0.12	16	256	2.0
Au	197	0.08	16	256	1.3
U	238	0.07	16	256	1.1

I fasci accelerati dal Tandem vengono inviati su bersagli al fine di realizzare un urto ione-nucleo bersaglio. Dallo studio di queste reazioni si possono ottenere informazioni sulla struttura dei nuclei e sulla dinamica dei processi nucleari in funzione dell'energia. Nel problema 9.23 descriveremo un dispositivo per accelerare gli ioni uscenti dal Tandem fino ad energie dell'ordine di 20 − 50 MeV/nucl.

In Italia sono installati il *Tandem dei Laboratori Nazionali di Legnaro (Padova)* con $V_M = 16$ MV e quello dei *Laboratori Nazionali del Sud a Catania* con $V_M = 13$ MV, entrambi dell'*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN)*.

9.4. *Nella figura due griglie conduttrici AA e BB tra loro parallele, la prima al potenziale $V_1 = 100$ V e la seconda al potenziale $V_2 = 400$ V, delimitano tre regioni: a sinistra di AA il potenziale è costante al valore V_1, a destra di BB è costante al valore V_2, nell'intercapedine esiste un campo elettrico. Un fascio parallelo di elettroni arriva da sinistra con un angolo di incidenza $\theta_1 = 30°$ rispetto alla normale alle griglie e con velocità $v_1 = 6 \cdot 10^6$ m/s. Quando gli elettroni entrano nella regione in cui il potenziale vale V_2 essi formano un angolo θ_2 con la normale. Trovare che relazione esiste tra θ_1 e θ_2 e quanto valgono θ_2 e la velocità v_2 di uscita degli elettroni.*



Intanto constatiamo che con $v_1 = 6 \cdot 10^6$ m/s $\gamma = 1.0002$ e quindi gli effetti relativistici sono trascurabili. Quando l'elettrone si muove nelle regioni dove il potenziale è costante il suo moto è rettilineo uniforme essendo là il campo elettrico nullo ($\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = 0$). Invece nella regione compresa tra AA e BB esiste un campo elettrico e qui l'elettrone risentirà di una forza, parallela all'asse x. L'assenza di una componente F_y comporta la conservazione della quantità di moto lungo l'asse y per cui

$$v_1 \operatorname{sen}\theta_1 = v_2 \operatorname{sen}\theta_2 \quad . \tag{a}$$

La conservazione dell'energia d'altra parte impone

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - eV_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - eV_2 \quad . \tag{b}$$

Ricavando v_2 da (b) e sostituendo in (a) si trova

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = n = \left[1 + \frac{2e}{m v_1^2}(V_2 - V_1)\right]^{1/2} \quad , \tag{c}$$

che dà la relazione cercata tra θ_1 e θ_2. Con i dati del problema

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 14.6° \quad \Rightarrow \quad v_2 = 1.2 \cdot 10^7 \text{ m/s} \quad .$$

In analogia con il caso di un fascio di luce che incide su una superficie di discontinuità tra due mezzi trasparenti (fenomeno della rifrazione, vedi capitolo 14), n può essere considerato l'*indice di rifrazione* del sistema descritto, che evidentemente fornisce un metodo per rifrangere (deviare) un fascio di elettroni. Fissata l'energia cinetica del fascio incidente, n può essere cambiato semplicemente variando la d.d.p. tra le griglie.

9.5. *Nel modello atomico di Bohr gli elettroni descrivono orbite circolari attorno al nucleo. Si consideri l'atomo di idrogeno, formato da un protone e da un elettrone, e si calcoli l'energia di legame in funzione del raggio dell'orbita.*

La forza agente è quella elettrica (il contributo gravitazionale è trascurabile); essendo il moto circolare la legge di Newton si scrive

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{mr} \quad . \tag{a}$$

L'energia totale W è eguale alla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elettrostatica, da prendere con segno negativo in quanto l'elettrone e il protone hanno carica opposta:

$$W = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad . \tag{b}$$

È noto come Bohr postulasse che il raggio r non potesse avere valori qualsiasi, ma tali da soddisfare alla *condizione di quantizzazione del momento angolare* dell'elettrone orbitale:

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad . \tag{c}$$

La (a) dà il valore di v in funzione di r; dal paragrafo 5g. o dal problema 7.24 prendiamo il valore di $h/2\pi$ e otteniamo

$$r = 4\pi\varepsilon_0 \frac{n^2}{me^2} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 = 0.53 \cdot 10^{-10} n^2 \quad \text{m} \quad ;$$

in corrispondenza, in base alla (b),

$$W = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{me^4}{(h/2\pi)^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{21.7 \cdot 10^{-19}}{n^2} \text{ J} = -\frac{13.56}{n^2} \text{ eV} \ .$$

L'orbita più interna ($n = 1$) ha il raggio minimo e l'energia minima (massima in modulo):

$$r_0 = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{m} \quad , \quad W_0 = -13.56 \text{ eV} \quad ;$$

r_0 è il raggio dell'orbita di equilibrio, ovvero il raggio dell'atomo di idrogeno non eccitato, e W_0 è l'energia di legame. Ricordiamo che il segno meno dell'energia di legame è una caratteristica di tutti i sistemi stabili, comunemente detti sistemi legati.

Ai valori di r_0 e W_0 corrispondono i seguenti valori per le altre grandezze cinematiche:

$$v_0 = 2.19 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad , \qquad \omega_0 = 4.13 \cdot 10^{16} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad ,$$

$$\nu_0 = 0.66 \cdot 10^{16} \text{ Hz} \qquad , \qquad T_0 = 1.52 \cdot 10^{-16} \text{ s} \qquad .$$

Il valore trovato per la velocità ci dà una conferma a posteriori che per questa trattazione non è necessario usare formule relativistiche.

L'accelerazione dell'elettrone nell'orbita con $n = 1$ è

$$a_0 = \frac{v_0^2}{r} = \omega_0^2 r_0 = 9.05 \cdot 10^{22} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \Rightarrow \quad P_0 = 2.89 \cdot 10^{11} \frac{\text{eV}}{\text{s}}$$

sarebbe la potenza irradiata secondo (9.6); l'energia W_0 verrebbe così persa in un tempo $t = W_0/P_0 = 4.7 \cdot 10^{-11}$ s, risultato che è in contrasto con la stabilità dei sistemi atomici. Per ovviare a ciò Bohr postulò che l'elettrone in un atomo, quando percorre un'orbita di equilibrio, come quella di raggio r dell'atomo di idrogeno, non irradia.

Questo postulato, il postulato relativo al momento angolare orbitale e quello secondo cui l'atomo può assorbire o emettere energia solo attraverso il passaggio da un livello energetico ad un altro, caratterizzati da diversi valori di n, costituiscono le basi del *modello atomico di Bohr*. Benché superato dalla successiva descrizione dei sistemi atomici fatta nell'ambito della meccanica quantistica, esso costituisce il primo tentativo coronato da successo di interpretazione teorica dei risultati sperimentali sulle proprietà atomiche.

9.6. ***Sulla superficie di una sfera di raggio $R = 10^{-8}$ m, entro cui è distribuita uniformemente una carica positiva $q = 3.2 \cdot 10^{-18}$ C, viene depositato un elettrone. Descrivere il moto che ne risulta.***

Il campo elettrico all'interno della sfera, trascurando il contributo dell'elettrone, vale in modulo $E = \varrho r/3\varepsilon_0$ ed è diretto radialmente verso l'esterno, come sappiamo dal problema 1.12. L'elettrone è attirato verso il centro e l'equazione del moto è

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\varrho \frac{e}{3\varepsilon_0} r \quad ,$$

cioè l'equazione di un moto armonico con $\omega^2 = e\varrho/3\varepsilon_0 m$. Le condizioni iniziali, $r(t=0) = R$ e $(dr/dt)_{t=0} = 0$, permettono di ridurre la soluzione generale $r = A\cos(\omega t + \phi)$ a $r = R\cos\omega t$.

Numericamente

$$\varrho = 0.76 \cdot 10^6 \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \quad , \quad \omega = 7.09 \cdot 10^{13} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad ,$$

$$r = 10^{-8} \cos 7.09 \cdot 10^{13} t \quad \text{m} \quad .$$

La velocità massima dell'elettrone, pari a $\omega R = 7.09 \cdot 10^5$ m/s, non è relativistica.

9.7. ***Una regione di spazio è sede di un campo elettrico ricavabile da un potenziale $V = V_0(x^2 + y^2)$. Una particella con carica positiva $q = 9.6 \cdot 10^{-18}$ C, di massa $m = 2 \cdot 10^{-15}$ Kg, all'istante $t = 0$ si trova sull'asse x a distanza***

$x_0 = 1$ cm dall'origine, con velocità concorde all'asse y, $v_0 = 3.1$ m/s. Descrivere il moto della particella; il valore di V_0 è 10^7 V/m^2.

L'equazione del moto è $m d^2\mathbf{r}/dt^2 = q\mathbf{E}$; proiettata sugli assi dà:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE_x = -q\frac{\partial V}{\partial x} = -2qV_0x \quad ,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = qE_y = -q\frac{\partial V}{\partial y} = -2qV_0y \quad ,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = qE_z = -q\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad .$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali si vede che il moto avviene nel piano xy. Ciascuna componente del moto è armonica, con identica pulsazione $\omega = (2qV_0/m)^{1/2} = 3.1 \cdot 10^2$ rad/s:

$$x = A\cos\omega t \quad , \quad y = B\cos(\omega t + \phi) \quad .$$

dove assumiamo arbitrariamente eguale a zero la fase del primo moto, ovvero misuriamo rispetto a questa la fase del secondo. Le condizioni iniziali dicono.

$$x(0) = x_0 = A \quad , \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0 = (-\omega A \,\mathrm{sen}\,\omega t)_{t=0} \quad ,$$

$$y(0) = 0 = B\cos\phi \quad , \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0 = -\omega B \,\mathrm{sen}\,\phi \quad ;$$

ϕ può dunque valere $\pm\pi/2$, ma in entrambi i casi il risultato è lo stesso:

$$x = x_0\cos\omega t \quad , \quad y = \frac{v_0}{\omega}\mathrm{sen}\,\omega t$$

I due moti armonici, su assi ortogonali, hanno differenza di fase $\pi/2$ e ampiezze in generale diverse. L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo tra le due equazioni parametriche:

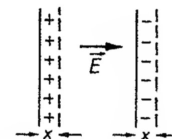
$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{v_0/\omega}\right)^2 = 1 \quad .$$

che rappresenta un'ellisse; se in particolare $v_0 = \omega x_0$ il moto è circolare uniforme con raggio x_0 e velocità angolare ω

Si noti che le linee equipotenziali sono circonferenze con centro nell'origine e che le linee di campo sono semirette uscenti dall'origine; abbiamo un esempio di moto centrale. A parte la differenza nelle condizioni iniziali, la situazione vista nel problema 9.6 è identica a quella ora esaminata: su di un piano equatoriale di una sfera uniformemente carica il potenziale è proporzionale al quadrato della distanza dal centro.

Nel caso numerico proposto è rispettata la condizione $v_0 = \omega x_0$ e quindi la traiettoria è una circonferenza di raggio 1 cm, percorsa con velocità uniforme pari a 3.1 m/s.

9.8. *In una regione di spazio si trovano sovrapposte due densità uniformi di carica, una positiva e una negativa; quest'ultima è costituita da elettroni, mentre le cariche positive sono ioni, la cui massa è molto superiore a quella dell'elettrone. A causa di una perturbazione esterna avviene uno spostamento del complesso delle cariche negative. Determinare il campo elettrico che in tal modo si genera nel sistema e il tipo di moto che ne segue per gli elettroni; si assuma per questi una densità $n = 3.1 \cdot 10^{11}$ elettroni/m^3 e si consideri il moto unidirezionale.*



A causa dell'azione esterna, che per esempio potrebbe avvenire tramite un campo elettrico impulsivo, si ha uno spostamento delle cariche negative rispetto a quelle positive che, molto più pesanti, possono essere considerate ferme. Se isoliamo una porzione di sistema, vediamo che in essa si è creata la situazione illustrata in figura: è comparso un doppio strato di cariche, la cui densità superficiale è $\sigma = nex$ e che quindi produce il campo elettrico

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{nex}{\varepsilon_0}$$

Ogni elettrone, sotto l'azione della forza $F = -eE = -ne^2x/\varepsilon_0$, tende a ritornare nella posizione di equilibrio Poiché F è una forza di richiamo proporzionale allo spostamento, si instaura nel sistema una oscillazione armonica secondo l'equazione

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{ne^2x}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \quad .$$

Il sistema studiato si chiama plasma e il moto viene detto oscillazione di plasma. Numericamente

$$\omega = 3\,14 \cdot 10^7 \,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \quad , \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \cdot 10^6 \text{ Hz} \quad .$$

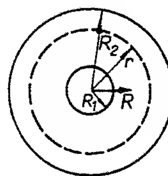
Un fenomeno come quello descritto avviene in natura nella ionosfera e ad esso viene ricondotta la proprietà della ionosfera di riflettere o meno, a seconda della loro frequenza, le radiazioni elettromagnetiche usate per le comunicazioni.

9.9. *Un condensatore cilindrico ($R_1 = 1$ cm, $R_2 = 3$ cm) è carico alla d.d.p. $V_2 - V_1 = 5 \cdot 10^3$ V; l'armatura interna è negativa. In un punto equidistante dalle armature ($R = 2$ cm) viene prodotta una coppia elettrone-ione positivo. Trascurando l'azione mutua tra le particelle e la loro velocità iniziale, dire su quale armatura esse cadono e con quale energia.*

L'elettrone va sull'armatura esterna, positiva, lo ione su quella interna, negativa. Le energie rispettive sono date da

$$W_- = -e(V - V_2) \quad , \quad W_+ = e(V - V_1) \quad ,$$

essendo V_1, V_2, V i potenziali dell'armatura interna (raggio R_1), di quella esterna (raggio R_2) e del punto medio (raggio R). Occorre perciò calcolare le dette d.d.p. ovvero il campo elettrico all'interno del condensatore. Applicando il teorema di Gauss ad una generica superficie cilindrica, coassiale alle armature, di altezza unitaria e raggio r (vedi figura), con $R_1 < r < R_2$, si ha $E = q/2\pi\varepsilon_0 r$, diretto verso l'armatura interna; q indica la carica per unità di lunghezza. Quindi



$$V - V_2 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\int_R^{R_2}\frac{dr}{r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{R_2}{R} \quad ,$$

$$V - V_1 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\int_R^{R_1}\frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{R}{R_1} \quad .$$

Dalla formula (2.4) per la capacità di un condensatore cilindrico ricaviamo

$$q = C(V_2 - V_1) = 2\pi\varepsilon_0(V_2 - V_1)/\log\frac{R_2}{R_1}$$

e in definitiva

$$W_- = e(V_2 - V_1)\log\frac{R_2}{R}/\log\frac{R_2}{R_1} = 2.95 \cdot 10^{-16}\ \text{J} = 1.84\ \text{KeV} \quad ,$$

$$W_+ = e(V_2 - V_1)\log\frac{R}{R_1}/\log\frac{R_2}{R_1} = 5.04 \cdot 10^{-16}\ \text{J} = 3.15\ \text{KeV} \quad .$$

Si noti la semplicità del calcolo in elettronvolt: $1.84 \cdot 10^3$ è $V_2 - V$, $3.15 \cdot 10^3$ è $V - V_1$.

9.10. ***Un filo sottile conduttore ($R_1 = 20$ µm) è teso lungo l'asse di una superficie cilindrica ($R_2 = 1$ cm), anch'essa conduttrice. Il sistema si può considerare indefinito. Tra i due conduttori è stabilita una d.d.p. $V = 3 \cdot 10^3$ V. L'intercapedine è riempita da una miscela argon-anidride carbonica con costante dielettrica relativa eguale praticamente a 1. Se in questa miscela viene liberato un elettrone esso si muove radialmente verso il filo con velocità proporzionale al campo elettrico secondo la formula $v = KE$ con $K = 25 \cdot 10^{-2}$ m²/sV. Calcolare l'accelerazione dell'elettrone per $r = 100$ µm.***

Se vogliamo l'accelerazione dobbiamo conoscere la velocità e quindi calcolare il campo elettrico all'interno del sistema, che è un condensatore cilindrico. Come abbiamo visto nel problema 9.9, $E = q/2\pi\varepsilon_0 r$, $q = 2\pi\varepsilon_0 V/\log(R_2/R_1)$, da cui

$$E = \frac{V}{\log(R_2/R_1)}\frac{1}{r} = \frac{482.7}{r}\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad .$$

La velocità dell'elettrone, in funzione del raggio, è

$$v = KE = \frac{120.7}{r}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad .$$

Di conseguenza abbiamo per l'accelerazione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = K\frac{dE}{dr}v = K^2E\frac{dE}{dr} =$$

$$= \left[\frac{KV}{\log(R_2/R_1)}\right]^2\frac{1}{r^3} = \frac{1.46 \cdot 10^4}{r^3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad ;$$

il segno meno della derivata dE/dr è cancellato dal fatto che velocità e accelerazione dell'elettrone sono discordi al campo elettrico. Per $r = 100$ µm $a = 1.46 \cdot 10^{16}$ m/s² A questa accelerazione, secondo (9.6), corrisponde una potenza irradiata di $7.53 \cdot 10^{-3}$ eV/s, la velocità istantanea, per $r = 100$ µm, è $v = 1.21 \cdot 10^6$ m/s.

9.11. ***Due piani conduttori indefiniti paralleli, distanti h, sono posti uno a potenziale zero, l'altro a potenziale $V_0 > 0$. Dal primo (catodo) escono elettroni con velocità nulla. Calcolare la relazione che sussiste tra densità di corrente j e d.d.p. V_0, nell'ipotesi che al catodo il campo elettrico sia nullo (per la soluzione occorre tener conto della densità di carica dovuta agli elettroni nello spazio tra i piani).***

Gli elettroni emessi dal catodo vengono attirati dall'elettrodo a potenziale positivo V_0 (anodo). Detta x la coordinata ortogonale agli elettrodi ($x = 0$ sul catodo, $x = h$ sull'anodo), in ciascun punto la velocità degli elettroni è parallela all'asse x ed è legata al potenziale in quel punto dalla relazione

$$\frac{1}{2}mv^2(x) = eV(x) \quad \Rightarrow \quad v(x) = \left[\frac{2eV(x)}{m}\right]^{1/2} \quad .$$

A differenza di quanto visto nel problema 2.9 il potenziale ora non varia linearmente con x, a causa della presenza tra gli elettrodi di una densità di carica negativa che altera il campo elettrico non più uniforme. Il legame tra $V(x)$ e $\varrho(x)$ si ottiene dalle equazioni di Maxwell, ridotte al nostro caso unidimensionale:

$$\text{div}\,\mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dx} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x) \quad ,$$

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\text{grad}\,V \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dx} \quad .$$

Mettendole insieme, $d^2V/dx^2 = -\varrho(x)/\varepsilon_0$, che è l'equazione di Poisson (1.8) cui si poteva ricorrere subito. Adesso occorre trovare il legame tra $\varrho(x)$ e la densità di corrente j: dal problema 5.5 abbiamo $j = -\varrho(x)v(x)$, dove il segno meno significa che le cariche in moto sono negative. In conclusione

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(x) = \frac{j}{\varepsilon_0 v(x)} = \frac{j}{\varepsilon_0}\left[\frac{m}{2eV(x)}\right]^{1/2} = \frac{j}{A}V(x)^{-1/2},$$

con $A = \varepsilon_0(2e/m)^{1/2} = 5.25 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C^{5/2}s^2/m^3Kg^{3/2}}$.

La soluzione dell'equazione differenziale richiede qualche accorgimento matematico. Si pone $V' = dV/dx$; allora

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dV'}{dx} = \frac{dV'}{dV}\frac{dV}{dx} = V'\frac{dV'}{dV} = \frac{j}{A}V^{-1/2} .$$

Dall'ultima eguaglianza, separando le variabili, si ha

$$V'dV = \frac{j}{A}V^{-1/2}\,dV \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}[V'(x)^2 - V'(0)^2] = \frac{2}{A}j\,[V(x)^{1/2} - V(0)^{1/2}]$$

Secondo i dati $V'(0) = (dV/dx)_{x=0} = 0$ e $V(0) = 0$ per cui

$$V'(x)^2 = \frac{4}{A}j\,V(x)^{1/2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dV}{dx} = \left(\frac{4}{A}j\right)^{1/2}V^{1/4}$$

e integrando nuovamente per separazione di variabili tra 0 e h

$$\frac{4}{3}\left[V(h)^{3/4} - V(0)^{3/4}\right] = \left(\frac{4}{A}j\right)^{1/2}h \quad ;$$

di qui si ricava il risultato finale

$$j = \frac{4}{9}\frac{A}{h^2}V_0^{3/2} = \frac{2.33 \cdot 10^{-6}}{h^2}V_0^{3/2}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} .$$

Questa relazione $j = KV_0^{3/2}$ è nota come *legge di Langmuir-Child* ed è valida anche in disposizioni geometriche differenti (con valori di K diversi). Nella pratica essa è verificata per esempio nei diodi ad emissione termoelettronica. Quanto studiato è interessante anche perché mostra un sistema che non segue la legge di Ohm (4.3-4.4).

9.12. ***Secondo il modello elementare di Fermi in un conduttore metallico gli atomi sono privi degli elettroni di valenza, i quali costituiscono una specie di gas che può muoversi liberamente entro il metallo; gli ioni invece si pensano fissi e si trascura l'interazione tra ioni ed elettroni. Si supponga che al moto collettivo degli elettroni, generato con l'applicazione di un campo elettrico costante, si opponga una forza di attrito proporzionale alla***

velocità. Dimostrare che con questa ipotesi si arriva alla legge di Ohm; dare inoltre un'espressione esplicita per la conduttività di un metallo e calcolare la velocità degli elettroni di conduzione. Come esempio si consideri il rame, valenza unitaria, densità $\delta = 8.9 \cdot 10^3$ Kg/m³, conduttività $g = 5.8 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, peso atomico $M = 63.6$; per la velocità si assuma di avere a che fare con un filo percorso da una corrente di densità $j = 10^7$ A/m².

Applicando un campo elettrico costante, al moto disordinato degli elettroni si aggiunge un moto in verso opposto a quello del campo elettrico, di equazione $m\,dv/dt = -eE - Kv$, dove v è la componente della velocità dovuta al campo elettrico e K è il coefficiente di attrito viscoso. Riscriviamo così l'equazione:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = -\frac{e}{m}E \quad . \tag{a}$$

La soluzione più generale di questa equazione differenziale (lineare, a coefficienti costanti, non omogenea) è data dalla somma di due termini:

1) l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, $dv/dt + Kv/m = 0$, che è del tipo $v = Ae^{-Kt/m}$, con A costante di integrazione; fisicamente ciò vuol dire che una perturbazione momentanea produce un moto che si smorza esponenzialmente con costante di tempo $\tau = m/K$;

2) un integrale particolare della (a): è immediato verificare che $v = -eE/K = -e\tau E/m$ è soluzione di (a); questa è la condizione di equilibrio dinamico, quando le due forze in gioco si bilanciano (si ricordi che sotto l'azione di una forza costante e di un attrito viscoso si ottiene a regime un moto uniforme).

Pertanto, in un conduttore sottoposto ad un campo costante, passato il regime transitorio si instaura un moto uniforme antiparallelo al campo. Se prendiamo una sezione del conduttore ortogonale a E attraverso questa c'è un flusso di elettroni in senso contrario al campo (in assenza di campo il flusso è nullo in quanto il numero di elettroni che attraversa la sezione in un senso è mediamente eguale a quello che la attraversa nell'altro). In presenza di campo esiste dunque una densità di corrente (problema 5.5)

$$j = -nev = \frac{ne^2\tau}{m}E \quad , \tag{b}$$

che è proprio la legge di Ohm (4.4). Per la conduttività si ricava

$$g = \frac{ne^2\tau}{m} \quad . \tag{c}$$

Più che per calcolare g la (c) serve, nota sperimentalmente la conduttività, a calcolare τ, costante di tempo del fenomeno transitorio, detta anche *tempo di rilassamento* del conduttore; se l'equilibrio di un conduttore elettrico viene perturbato, τ dà l'ordine di grandezza del tempo necessario affinché si ristabiliscano le condizioni di equilibrio.

Nel caso del rame cominciamo col calcolare n, che è eguale al numero di

atomi per unità di volume, essendo la valenza unitaria. Con la solita formula (vedi problema 3.14)

$$n = \frac{N\delta}{M} = 8.4 \cdot 10^{28}\ \frac{\text{elettroni}}{\text{m}^3} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{mg}{ne^2} = 2.5 \cdot 10^{-14}\ \text{s} \quad .$$

La velocità degli elettroni di conduzione nella direzione di **E** si ricava dalla (b): $v = 7.4 \cdot 10^{-4}$ m/s. Vediamo che essa è assai bassa (per percorrere un centimetro occorrono 13.5 s) se confrontata con le velocità degli elettroni liberi che nella teoria di Fermi sono dell'ordine di 10^6 m/s.

9.13. ***Calcolare quanto deve valere la d.d.p. acceleratrice che fa aumentare dell'1% la massa dell'elettrone; ripetere il calcolo per il protone. Si supponga che le particelle siano inizialmente a riposo.***

Si può ragionare in questa maniera, con riferimento al paragrafo 9b.: a riposo la massa dell'elettrone è m_e e l'energia di massa vale $m_e c^2$; per fare aumentare la massa occorre mettere in moto l'elettrone cedendogli energia; quando la massa è diventata $m = 1.01\ m_e$, l'energia totale posseduta dall'elettrone è, secondo (9.8), $mc^2 = 1\ 01\ m_e c^2$ e quindi $\Delta W = 10^{-2} m_e c^2$ Ricordando il valore dell'energia a riposo dell'elettrone dato nel paragrafo 9c., occorre che il campo elettrico fornisca l'energia

$$\Delta W = 10^{-2} \cdot 0.51 \cdot 10^6\ \text{eV} = 5.1 \cdot 10^3\ \text{eV} = 5.1\ \text{KeV} \quad ,$$

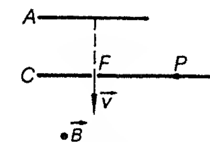
la d.d.p. acceleratrice vale quindi $5.1 \cdot 10^3$ V. Per il protone il valore numerico è evidentemente $9.38 \cdot 10^6$ V.

Nella tabella seguente sono riportati alcuni valori della velocità, di $\beta = v/c$ e di $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$:

v(m/s)	β	γ
$5 \cdot 10^6$	0.0167	1.0002
$1 \cdot 10^7$	0.0333	1.0006
$5 \cdot 10^7$	0.1667	1 0142
$1 \cdot 10^8$	0.3333	1.0605

Si vede che a un $\gamma = 1.01$ corrisponde una velocità di circa $5 \cdot 10^7$ m/s; sappiamo da quanto detto che per farla acquistare a un elettrone bastano circa $5 \cdot 10^3$ V, mentre per un protone occorrono quasi dieci milioni di volt.

9.14. ***Nel dispositivo mostrato in figura A e C sono due piastre metalliche parallele; la prima, a potenziale zero, emette elettroni con velocità nulla, la seconda, a potenziale V = 2.1 · 10⁴ V, ha un forellino F così da permettere il passaggio degli elettroni. Uscendo dal foro questi si trovano in una regione di spazio in cui esiste un campo magnetico* B*, uniforme e costante, diretto verso il lettore e di modulo* 10^{-2} *T. Si osserva che gli elettroni deviano verso destra e ricadono sulla piastra C nel punto P distante* 98.70 mm *da F. Descrivere il moto degli elettroni nel campo magnetico e calcolarne il rapporto carica su massa.***



Sugli elettroni in moto nel campo magnetico agisce la forza di Lorentz (9.2); nel caso particolare in cui **v** sia ortogonale a **B** il modulo della forza è qvB. Se dunque non ci sono componenti iniziali della velocità uscenti dal piano del disegno, come noi supporremo, il moto avviene in tale piano, ortogonale a **B**. Inoltre esso è uniforme, cioè con velocità costante in modulo, perché la forza di Lorentz, ortogonale alla traiettoria, non compie lavoro sulla particella (paragrafo 9a.), bensì dà origine a un'accelerazione centripeta secondo la legge

$$m\,\frac{v^2}{r} = qvB \quad \Rightarrow \quad mv = p = qrB \quad ;$$

il raggio di curvatura della traiettoria vale

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{mv}{qB} \tag{a}$$

e risulta costante, essendo v e B costanti. La traiettoria è quindi un arco di circonferenza e il moto è circolare uniforme con velocità angolare e periodo dati da

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad . \tag{b}$$

La trattazione, fino a questo punto, è relativisticamente corretta; nel campo magnetico il modulo della velocità della particella non subisce variazioni e il rapporto $p/v = m$, massa della particella, non varia; naturalmente v può essere tale che m sia maggiore della massa a riposo m_0. *Per piccole velocità* le formule (a) e (b) si possono scrivere con m_0 al posto di m; è molto importante notare che, in questo caso, *ω e T sono indipendenti dalla velocità e quindi dal raggio.*

Cominciamo col trattare il caso proposto con le formule non relativistiche; la velocità che gli elettroni possiedono quando entrano nel campo magnetico si ricava da $eV = 1/2\ m_0 v^2$ per cui il raggio di curvatura secondo (a) vale

$$r = \frac{1}{B}\left(\frac{2m_0 V}{e}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{m_0} = \frac{2V}{r^2 B^2} \quad .$$

Siccome la velocità di entrata è ortogonale alla piastra C la traiettoria è esattamente una circonferenza e $r = FP/2 = 49.35$ mm. Numericamente si ottiene $e/m_0 = 1.725 \cdot 10^{11}$ C/Kg. Se prendiamo i valori noti delle costanti e, m_0 e ne facciamo il rapporto troviamo $1.758 \cdot 10^{11}$ C/Kg, cioè una differenza di circa

2%. Evidentemente la velocità degli elettroni è tale da dover usare espressioni relativistiche; in effetti si è visto nel problema 9.13 che già $0.5 \cdot 10^4$ V bastano per causare una variazione dell'1% nella massa dell'elettrone.

Utilizziamo allora la (9.11) in cui esprimiamo l'energia cinetica come eV e la quantità di moto come eBr, secondo la (a). Si trova

$$\frac{e}{m_0} = \frac{2V}{r^2B^2 - \frac{V^2}{c^2}} = 1.760 \cdot 10^{11} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Kg}} \quad .$$

La precisione dei mezzi di indagine sperimentale che possono essere usati per una misura di questo genere consente con facilità di provare la correttezza delle formule relativistiche.

Gli *spettrometri di massa* sono un esempio di applicazione pratica dei risultati visti; le particelle accelerate sono in generale ioni, la cui massa è almeno $2 \cdot 10^3$ volte superiore a quella dell'elettrone; le d.d.p. usate sono dell'ordine di $10^3 - 10^4$ V e non è necessario usare formule relativistiche. L'idea base è di sfruttare l'azione del campo magnetico per separare ioni con masse diverse, in quanto essi percorrono traiettorie diverse. Sono stati così scoperti numerosissimi isotopi ed è stato possibile iniziarne la produzione, in quantità ponderabilmente apprezzabili, per scopi di ricerca e di applicazioni mediche e industriali.

Per concludere, vogliamo accennare a una formula assai usata in questi casi. Come si deduce dal paragrafo 9c., nella formula $p = qBr$ se si vuole esprimere la quantità di moto in unità eV/c occorre moltiplicare per $3 \cdot 10^8/1.6 \cdot 10^{-19}$; se q è proprio la carica elementare

$$p = 3 \cdot 10^8 Br \, \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{c}} = 3 \cdot 10^2 Br \, \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}} \quad , \tag{c}$$

essendo B misurato in tesla e r in metri.

Vogliamo infine notare che la prima delle (b) si può scrivere in forma vettoriale: si parte dal fatto che la forza di Lorentz è centripeta, cioè che $q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v}$ e si ricava

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{q}{m}\,\mathbf{B} \quad ; \tag{d}$$

la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ della particella è concorde al campo $\mathbf{B}$ se la carica q è negativa, discorde a $\mathbf{B}$ se q è positiva.

9.15. ***Un fascetto di ioni, con carica $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C e velocità iniziale nulla, accelerato da una d.d.p. di 23 V, penetra normalmente nel punto M (vedi figura) entro la camera a vuoto di uno spettrometro di massa, in cui esiste un campo magnetico uniforme, ortogonale al disegno. Nello spettrometro il fascio si rivela fatto di due componenti: una cade nel punto N tale che***

$MN = 280$ mm, l'altra nel punto P tale che $MP = 392$ mm. Se gli ioni che arrivano in N vengono riconosciuti per ioni sodio, aventi massa atomica 23, calcolare la massa e la velocità del secondo tipo di ioni (si ricordi che l'unità di massa atomica vale $1.65 \cdot 10^{-27}$ Kg).

Ci riferiamo alle formule del problema 9.14, dove le masse sono quelle a riposo, visto il piccolo valore della d.d.p. acceleratrice. Gli ioni dei due tipi diversi percorrono due semicirconferenze di raggi

$$r_1 = \frac{1}{2}\, MN = 140 \text{ mm}\,, \quad r_2 = \frac{1}{2}\, MP = 196 \text{ mm}\,.$$

Degli ioni sodio possiamo calcolare la velocità: è $1/2 \; m_1 v_1^2 = qV$ con $m_1 = 23 \cdot 1.65 \cdot 10^{-27}$ Kg; si trova $v_1 = 1.39 \cdot 10^4$ m/s. D'altra parte è vero anche che $1/2 \; m_2 v_2^2 = qV$ e che $m_1 v_1 = qBr_1$, $m_2 v_2 = qBr_2$. Abbiamo quindi il seguente sistema nelle incognite m_2, v_2:

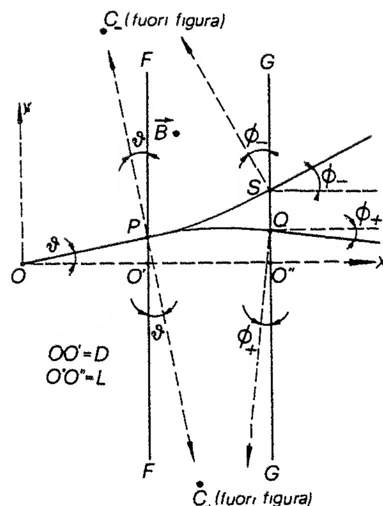
$$\begin{cases} m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2 \\ \dfrac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} m_2 = m_1 \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 \\ v_2 = v_1 \, \dfrac{r_1}{r_2} \end{cases}$$

ovvero $m_2 = 1.96 \; m_1 = 74.4 \cdot 10^{-27}$ Kg (massa atomica 45), $v_2 = 10^4$ m/s.

Se ioni diversi entrassero nello spettrometro con la stessa velocità (e diversa energia cinetica) allora il rapporto tra le masse sarebbe eguale al rapporto dei raggi di curvatura. In effetti alcuni tipi di spettrometro possiedono questa caratteristica (si veda il problema 9.21).

9.16. ***Nella figura le due linee FF e GG, distanti $L = 1$ m, delimitano tre regioni di spazio con le seguenti caratteristiche: a sinistra di FF e a destra di GG non c'è campo magnetico, nella regione intermedia esiste un campo magnetico uniforme, ortogonale al piano del disegno e diretto verso il lettore, di modulo $B = 1.5$ T. Dal punto O e nel piano del disegno viene emessa una particella con carica e che entra nella regione in cui $B \neq 0$ nel punto P e ne esce nel punto Q. Detta $D = 1$ m la distanza OO', determinare il segno della carica della particella nonché il modulo della quantità di moto e, nel punto Q, la sua direzione; si sa che $O'P = 9$ cm, $O''Q = 13$ cm. Determinare inoltre in quale punto e con quale angolo sarebbe uscita dal campo una particella con eguale massa e velocità, ma carica opposta.***

Se si prolunga il segmento OP fino all'uscita della zona in cui c'è campo magnetico si vede che il punto Q si trova al di sotto del prolungamento, cioè



la traiettoria è incurvata verso la parte inferiore del disegno. Ragionando sulla (9.2) oppure sulla (d) del problema 9.14 si deduce che la carica è positiva. Una carica negativa sarebbe invece deviata verso la parte superiore, uscendo dal campo per esempio nel punto S. La traiettoria nella regione in cui c'è campo magnetico è in ogni caso un arco di circonferenza di raggio R. Dalla figura si deduce che i centri C_+ e C_- delle circonferenze cui appartengono le traiettorie della carica positiva e di quella negativa hanno le coordinate

$$C_+ \begin{cases} x_0 = D + R\,\text{sen}\,\theta \\ y_0 = D\,\text{tg}\,\theta - R\cos\theta \end{cases} \qquad C_- \begin{cases} x_0 = D - R\,\text{sen}\,\theta \\ y_0 = D\,\text{tg}\,\theta + R\cos\theta \end{cases} .$$

Facendo sistema tra $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ e $x = D + L$ si ottengono le coordinate y dei punti di uscita dal campo. Scartando soluzioni non fisiche il risultato è

$$y_\pm = D\,\text{tg}\,\theta \mp R\cos\theta \pm [R^2 - (L \mp R\,\text{sen}\,\theta)^2]^{1/2} .$$

Noti che siano D, L, $y_+ = O''Q$, $\theta = \text{arctg}\,(O'P/OO')$, si ricava

$$R = \frac{(y_+ - D\,\text{tg}\,\theta)^2 + L^2}{2[L\,\text{sen}\,\theta - (y_+ - D\,\text{tg}\,\theta)]} = 10 \text{ m} .$$

La conoscenza del raggio di curvatura porta a $y_- = 23$ cm e alla quantità di moto, secondo la (c) del problema 9.14:

$$p = 300\ BR = 4.5 \cdot 10^3\ \frac{\text{MeV}}{\text{c}} = 4.5\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}} .$$

Riassumendo: la particella positiva che esce da O e passa per P e Q ha quantità di moto pari a 4.5 GeV/c; un'identica particella, ma con carica negativa, che uscisse da O e passasse per P con quantità di moto 4.5 GeV/c, abbandonerebbe il campo nel punto S di coordinata $y_- = 23$ cm.

La direzione della quantità di moto in Q o in S si calcola facilmente: dalla figura risulta, tenendo conto delle convenzioni sui segni degli angoli, che $R\,\text{sen}\,\theta \mp R\,\text{sen}\,\phi_\pm = L$ e dunque

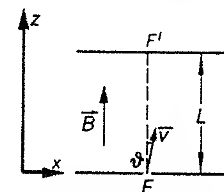
$$\text{sen}\,\phi_\pm = \mp\ \frac{L}{R} + \text{sen}\,\theta .$$

I valori numerici sono $\phi_\mp = -0.59° = -0°35'$, $\phi_- = 10.93° = 10°56'$; anche ϕ, come θ, è misurato rispetto all'asse x.

Il dispositivo descritto è un esempio di *spettrometro magnetico*: da misure geometriche sulla traiettoria di una particella prima e dopo l'interferro di un elettromagnete si risale alla quantità di moto di una particella. Uno schema di questo tipo è molto usato in esperimenti di fisica nucleare e subnucleare. Nei calcoli reali occorre tener conto della struttura effettiva del campo magnetico (si ricordi l'osservazione fatta alla fine del capitolo settimo).

9.17. ***Nel dispositivo mostrato in figura dal forellino F escono elettroni che sono stati emessi, con velocità nulla, da un filamento per effetto termoelettrico e accelerati da una d.d.p. $V = 3 \cdot 10^3$ V. Questi elettroni hanno, con ottima approssimazione, la stessa componente v_z della velocità e diverse, ma molto piccole, componenti v_x. Lungo l'asse z, nella regione al di sopra del foro, c'è un campo magnetico B uniforme e costante; a distanza $L = 2$ cm dal foro c'è uno schermo fluorescente S su cui gli elettroni vanno a cadere. Determinare le condizioni per cui le traiettorie di tutti gli elettroni finiscono nel punto F' e calcolare il corrispondente valore del campo magnetico.***

La velocità di un singolo elettrone forma, nel punto F, un certo angolo θ con il campo magnetico **B** e ha quindi le componenti $v_x = v\,\text{sen}\,\theta$, $v_z = v\cos\theta$ (possiamo supporre per comodità che $\mathbf{v}$ sia contenuta nel piano x, z). Il moto risulta scomponibile in due parti, una con velocità parallela a **B**, l'altra con velocità ortogonale. Nel primo caso la forza di Lorentz è nulla, quindi il moto è rettilineo uniforme con velocità v_z; per il secondo caso siamo nella stessa situazione del problema 9.14 e pertanto, nel piano ortogonale a **B**, il moto è circolare uniforme con velocità lineare v_x, velocità angolare $\omega = eB/m$ (indipendente dalla velocità, essendo piccolo il valore della d.d.p. acceleratrice) e raggio $R = mv_x/eB = mv\,\text{sen}\,\theta/eB$. La composizione di questi due moti dà luogo a un moto elicoidale uniforme lungo un asse parallelo all'asse z. Dopo un tempo $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/eB$ l'elettrone si trova in un punto dell'asse FF' distante da F



$$h = v_z T = \frac{2\pi m v \cos\theta}{eB} \quad ;$$

h è il passo dell'elica e corrisponde alla misura della traslazione lungo l'asse z che avviene nel tempo T, periodo del moto circolare uniforme; notiamo che h è inversamente proporzionale a B.

Un elettrone descrive pertanto un'elica con un dato raggio, dipendente da v_x e perciò caratteristico di ciascun elettrone; il passo di tutte le eliche è però lo stesso, in quanto eguali per tutti gli elettroni sono v_z e T. Se allora h coincide con L tutte le traiettorie elicoidali iniziatesi in F terminano in F'. Potendosi scrivere $1/2\ m v_z^2 = eV$ ovvero $v_z = (2eV/m)^{1/2}$, da $h = L$, cioè $v_z T = L$, utilizzando l'espressione di T si ha

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{B^2 L^2} \quad .$$

Questa relazione fissa il valore di B corrispondente alla condizione richiesta. Se ora B aumenta h diminuisce e non si verifica più l'effetto; quando però $2h = L$ oppure $3h = L$ e così via, le orbite degli elettroni terminano ancora tutte in F'. Pertanto la condizione più generale è

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{B^2 L^2} n^2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\pi}{L}\left(\frac{8mV}{e}\right)^{1/2} n = 5.8 \cdot 10^{-2} n \quad \mathrm{T} \quad :$$

B deve assumere uno dei valori $(5.8,\ 11.6,\ 17.4,\ \ldots) \cdot 10^{-2}$ T.

L'apparato descritto funziona come una lente, nel senso che dà un'immagine del punto F nel punto F': si parla di *lente magnetica* e di *focalizzazione magnetica*; il campo magnetico può essere facilmente prodotto per mezzo di un solenoide che contiene il dispositivo.

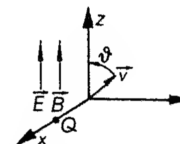
Il metodo è detto di Busch ed è servito per una determinazione molto precisa del rapporto e/m per gli elettroni. Confrontato col metodo del problema 9.14, adottato da Lenard che sfruttava l'effetto fotoelettronico per fare uscire gli elettroni dalla piastra metallica A, ha permesso di stabilire che in tutti e due i fenomeni (termoelettronico e fotoelettronico) le particelle emesse erano le stesse.

9.18. ***Una regione di spazio è sede di un campo elettrico e di un campo magnetico, paralleli tra loro, uniformi e costanti (vedi figura). Dall'origine O viene immesso nella regione un protone con velocità $v_0 = 5 \cdot 10^6$ m/s, contenuta nel piano y, z e formante un angolo $\theta = 54°$ con l'asse z. Descrivere il moto del protone dando l'equazione della traiettoria e la legge oraria. Si assuma $E = 10^3$ V/m e $B = 10^{-1}$ T.***

Ricorriamo alle relazioni generali (9.4) in cui $E_x = E_y = B_x = B_y = 0$, $E_z = E$, $B_z = B$:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qB\frac{dy}{dt} \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -qB\frac{dx}{dt} \quad , \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = qE \quad . \qquad \text{(a)}$$

Le condizioni iniziali per $t = 0$ sono $x = y = z = 0$, $dx/dt = 0$, $dy/dt = v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$, $dz/dt = v_{0z} = v_0\cos\theta$. La terza equazione è indipendente dalle altre due e dà un moto uniformemente accelerato lungo l'asse z, dovuto esclusivamente al campo elettrico:



$$z = v_{0z}t + \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 \quad . \qquad \text{(b)}$$

Per risolvere le equazioni in x e y, che sono tra loro dipendenti, deriviamo la prima rispetto al tempo, ottenendo un'espressione per d^2y/dt^2 che sostituiamo nella seconda, analogamente deriviamo la seconda e sostituiamo d^2x/dt^2 nella prima. Si ottiene

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{q^2B^2}{m^2}\frac{dx}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{q^2B^2}{m^2}\frac{dy}{dt} = 0 \quad ,$$

che nelle funzioni incognite dx/dt e dy/dt sono le equazioni di due oscillatori armonici,

$$\frac{dx}{dt} = X_0\cos(\omega t + \alpha) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Y_0\cos(\omega t + \beta) \quad ,$$

con $\omega = qB/m$. A loro volta queste due equazioni differenziali sono facilmente risolubili:

$$x = \frac{X_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \alpha) + A \quad , \quad y = \frac{Y_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \beta) + C \quad .$$

In totale abbiamo sei costanti arbitrarie; alle quattro condizioni iniziali su spazio e velocità abbiamo aggiunto, con l'operazione di derivazione, due condizioni sulle accelerazioni: per $t = 0$ $d^2y/dt^2 = 0$, come risulta dalla seconda delle (a), $d^2x/dt^2 = qBv_0\operatorname{sen}\theta/m$, come si vede dalla prima delle (a). Fisicamente, questa è l'accelerazione centripeta dovuta alla forza di Lorentz che incurva la traiettoria del protone, facendola uscire dal disegno verso il lettore In conclusione abbiamo sei equazioni:

$$\frac{X_0}{\omega}\operatorname{sen}\alpha + A = 0 \quad , \quad X_0\cos\alpha = 0 \quad , \quad -\omega X_0\operatorname{sen}\alpha = \frac{qBv_0\operatorname{sen}\theta}{m} \quad ,$$

$$\frac{Y_0}{\omega}\operatorname{sen}\beta + C = 0 \quad , \quad Y_0\cos\beta = v_0\operatorname{sen}\theta \quad , \quad -\omega Y_0\operatorname{sen}\beta = 0 \quad .$$

La soluzione è immediata e porta al risultato finale

$$x = \frac{mv_0\operatorname{sen}\theta}{qB}\left(1 - \cos\frac{qB}{m}t\right) \quad , \quad y = \frac{mv_0\operatorname{sen}\theta}{qB}\operatorname{sen}\frac{qB}{m}t \quad . \qquad \text{(c)}$$

Nel piano x, y il moto è circolare uniforme, con centro nel punto Q di coordinate $x_0 = mv_0 \operatorname{sen}\theta/qB$, $y_0 = 0$ e raggio $R = x_0$; esso dipende solo dal campo magnetico.

L'insieme di (b) e (c) dice che il moto è elicoidale, con asse passante per Q e parallelo all'asse z. A differenza del caso del problema 9.17, cui ci si riconduce se $E = 0$, il moto non è più uniforme e il passo dell'elica è variabile. Con i campi e la velocità disposti come in figura, a seconda del segno della carica si hanno due possibilità; se la carica è positiva, il moto procede indefinitamente lungo il verso positivo dell'asse z; se invece la carica è negativa, per cui la forza elettrica è antiparallela a z, il moto inizia lungo l'asse z positivo, ma specularmente rispetto al caso prima descritto (il piano yz essendo lo "specchio"), raggiunge una certa quota massima per poi invertirsi in z e proseguire indefinitamente tendendo a $z = -\infty$. La quota massima dipende dalla velocità iniziale lungo l'asse z in accordo con la conservazione dell'energia: $1/2\, m v_{0z}^2 = qEz_M$; è evidente che se $v_{0z} = 0$ non si ha inversione del moto.

Nel caso specifico proposto la carica è positiva e il moto procede esclusivamente lungo l'asse z positivo con i seguenti valori numerici:

$$R = \frac{mv_0 \operatorname{sen}\theta}{qB} = 0.42 \text{ m} , \quad \omega = \frac{qB}{m} = 9.58 \cdot 10^6 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.56 \cdot 10^{-7} \text{ s},$$

$$x = 0.42\ (1 - \cos 9.58 \cdot 10^6 t) \quad \text{m} \quad ,$$

$$y = 0.42 \operatorname{sen} 9.58 \cdot 10^6 t \quad \text{m} \quad ,$$

$$z = 2.94 \cdot 10^6 t + 4.79 \cdot 10^{10} t^2 \quad \text{m} \quad .$$

Dopo n giri ($t = nT$) la quota raggiunta è

$$z_n = n v_{0z} T + n^2 \frac{qE}{2m} T^2 \quad ,$$

dopo $n + 1$ giri è z_{n+1} (stessa struttura di z_n con $n + 1$ al posto di n) e quindi l'espressione del passo è, sostituendo $T = 2\pi m/qB$,

$$h = z_{n+1} - z_n = \frac{2\pi m}{qB} \left[v_{0z} + (2n + 1)\ \pi \frac{E}{B} \right] \quad ;$$

esso cresce linearmente col numero di giri. Numericamente

$$h = 1.93 + (2n + 1) \cdot 2.06 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad .$$

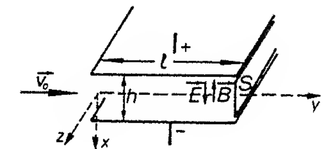
Al primo giro il passo è 1.95 m, dal primo al secondo è 1.99 m, dal secondo al terzo 2.03 m e così via; esattamente l'aumento ad ogni giro è dato da $dh/dn = 4.12 \cdot 10^{-2}$ m.

9.19. ***Tra le armature di un condensatore piano, quadrate di lato $l = 8$ cm, distanti $h = 2$ cm e cariche alla d.d.p. $V = 400$ V, esiste un campo magnetico parallelo e discorde al campo elettrico, di modulo $B = 0.1$ T (vedi figura). Un fascetto di ioni passa attraverso il condensatore con velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ parallela alle armature. Determinare le equazioni parametriche della traiettoria entro il condensatore. Se nella soluzione si possono adattare le approssimazioni $\operatorname{sen}\alpha \simeq \alpha$ e $\cos\alpha \simeq 1 - \alpha^2/2$, calcolare dove cadrebbe il fascetto su uno schermo fluorescente S posto immediatamente fuori del condensatore e specificare come si sposta il punto di impatto al variare della velocità iniziale degli ioni e del rapporto carica su massa degli stessi. Si consideri in particolare il caso di ioni Ne^{20} e Ne^{22} con carica positiva pari alla carica elementare.***

La determinazione delle equazioni parametriche avviene come nel problema 9.18, le cui (b) e (c) diventano, tenuto conto che $\theta = 90°$ e che il sistema di coordinate non è lo stesso,

$$x = \frac{qE}{2m} t^2 \quad , \quad y = \frac{mv_0}{qB} \operatorname{sen} \frac{qB}{m} t \quad ,$$

$$z = \frac{mv_0}{qB} \left(1 - \cos \frac{qB}{m} t \right) . \qquad \text{(a)}$$



Si tratta di un'elica cilindrica con asse parallelo all'asse x; il moto, non uniforme, avviene nel verso positivo dell'asse x.

Se adottiamo le espressioni valide per valori piccoli dell'argomento del seno e del coseno le (a) diventano

$$x = \frac{qE}{2m} t^2 \quad , \quad y = v_0 t \quad , \quad z = \frac{qB}{2m} v_0 t^2 \quad . \qquad \text{(b)}$$

Per questo occorre che ωt sia piccolo; siccome per entrambi i tipi di ioni $\omega = qB/m \simeq 5 \cdot 10^5$ rad/s, t deve valere all'incirca 10^{-7} s o meno. Se il tempo di attraversamento del condensatore è di questo ordine di grandezza le (b) servono per calcolare il punto di incontro P tra schermo S e traiettoria; le coordinate di P si ricavano ponendo $y = l$ e $t = l/v_0$:

$$x = \frac{qE}{2m} \frac{l^2}{v_0} \quad , \quad z = \frac{qB}{2m} \frac{l^2}{v_0} \quad .$$

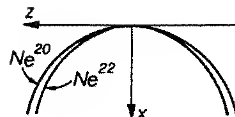
Eliminando v_0 si ottiene il luogo dei punti descritti da P sullo schermo S:

$$x = \frac{2E}{l^2 B^2} \frac{m}{q} z^2 \quad . \qquad \text{(c)}$$

Si tratta di una parabola che, fissati i parametri dell'apparato, dipende solo dal rapporto carica su massa degli ioni. Per uno stesso tipo di ioni al variare di v_0 P si sposta sulla curva (c); se invece è diverso il tipo di ioni (per esempio isotopi di uno stesso elemento, con q/m diverso), diversa è la parabola sullo schermo. Nel caso proposto le equazioni sono:

Ne^{20} $m = 20 \cdot 1.65 \cdot 10^{-27}$ Kg $\Rightarrow$ $x = 128.8\ z^2$ m,

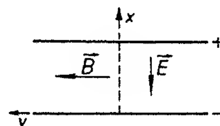
Ne^{22} $m = 22 \cdot 1.65 \cdot 10^{-27}$ Kg $\Rightarrow$ $x = 141.9\ z^2$ m ;



in figura sono mostrate le due parabole corrispondenti.

Con un apparato simile a quello descritto J.J. Thomson nel 1913 dimostrò l'esistenza degli isotopi di elementi non radioattivi, come il neon. Se gli ioni vengono prodotti utilizzando neon naturale le intensità luminose delle due parabole non sono eguali: quella relativa al Ne^{20} è molto maggiore in quanto in natura i due isotopi sono presenti nel rapporto 9:1.

9.20. ***Un condensatore piano indefinito ha le armature distanti d = 5 mm; l'armatura inferiore è a potenziale zero, quella superiore al potenziale V = 10³ V. Parallelamente alle armature c'è un campo magnetico uniforme, di modulo B = 8 · 10⁻² T (vedi figura). Dall'armatura inferiore vengono emessi elettroni con velocità trascurabile. Descrivere il loro moto e calcolare il valore minimo di B per cui gli elettroni non raggiungono più l'armatura superiore.***



Consideriamo una particella con carica q e massa m che si trovi in quiete nell'origine al tempo $t = 0$. Tenuto conto che $E_y = E_z = B_x = B_z = 0$ e che $\mathbf{E} = -E\mathbf{u}_x$, da (9 4) abbiamo

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -qE - qB\,\frac{dz}{dt} \quad , \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad , \quad m\,\frac{d^2z}{dt^2} = qB\,\frac{dx}{dt} \quad . \text{(a)}$$

Lungo l'asse y non c'è moto in quanto la componente iniziale della velocità lungo y è nulla al pari della componente y della forza. Il moto si sviluppa perciò nel piano xz (in figura l'asse z è diretto verso il lettore).

Usiamo ora parzialmente la procedura vista nel problema 9.18; deriviamo la prima delle (a) e sostituiamo l'espressione ottenuta per d^2z/dt^2 nella terza:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{q^2B^2}{m^2}\,\frac{dx}{dt} = 0 \quad .$$

Le condizioni iniziali, al tempo $t = 0$, sono $x = 0$, $dx/dt = 0$ e $d^2x/dt^2 = -qE/m$, come si ha dalla prima delle (a). Risolvendo in dx/dt si trova

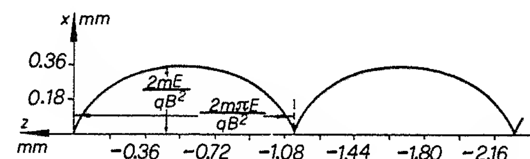
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{E}{B}\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mE}{qB^2}\left(\cos\frac{qB}{m}\,t - 1\right) \quad . \qquad \text{(b)}$$

La conoscenza di x e quindi di d^2x/dt^2 permette di ricavare dalla prima delle (a)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{E}{B}\left(\cos\frac{qB}{m}\,t - 1\right) \quad \Rightarrow \quad z = \frac{mE}{qB^2}\left(\mathrm{sen}\,\frac{qB}{m}\,t - \frac{qB}{m}\,t\right) \; ; \qquad \text{(c)}$$

nell'ultima integrazione si è tenuto conto che $z = 0$ per $t = 0$.

La (b) corrisponde a un'oscillazione armonica sull'asse x attorno al punto di coordinata $x_0 = -mE/qB^2$, con ampiezza mE/qB^2 e pulsazione $\omega = qB/m$. Lungo l'asse z si ha, secondo (c), oltre ad una oscillazione armonica eguale, a parte lo sfasamento di $\pi/2$, a quella lungo l'asse x, una traslazione uniforme nel verso negativo con velocità E/B: ad ogni periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi m/qB$ dell'oscillazione la particella avanza della quantità fissa $ET/B = 2\pi mE/qB^2$. Il moto risultante avviene lungo la traiettoria mostrata in figura, eguale a quella descritta da un punto che ruoti con moto circolare uniforme attorno ad un centro che sia in moto rettilineo uniforme lungo l'asse z, come il punto generico della circonferenza di una ruota che, nel piano xz, rotoli senza strisciare sull'asse z. Una tale traiettoria si dice *cicloide*.



Nel nostro caso la particella ha carica negativa $-e$; le equazioni parametriche (b) e (c) diventano

$$x = \frac{mE}{eB^2}\left(1 - \cos\frac{eB}{m}\,t\right) \quad , \quad z = \frac{mE}{eB^2}\left(\mathrm{sen}\,\frac{eB}{m}\,t - \frac{eB}{m}\,t\right) \quad . \qquad \text{(d)}$$

Si verifichi, basandosi sul verso e sulla direzione di $\mathbf{E}$ nonché sulla forza di Lorentz, che il moto dell'elettrone avviene con $x \geq 0$ e $z \leq 0$, come dicono le (d). Le espressioni numeriche, cui corrisponde la traiettoria della figura, sono:

$$x = 1.78 \cdot 10^{-4}\ (1 - \cos 1.41 \cdot 10^{10}\ t) \qquad \text{m} \quad ,$$

$$z = 1.78 \cdot 10^{-4}\ (\mathrm{sen}\ 1.41 \cdot 10^{10}t - 1.41 \cdot 10^{10}t) \qquad \text{m} \quad .$$

È evidente dalla prima delle (d) che la massima x accessibile agli elettroni è $2mE/eB^2$; se non si vuole che l'elettrone cada sull'armatura superiore occorre che $2mE/eB^2 < d$ ovvero

$$B^2 > \frac{2mE}{ed} = \frac{2mV}{ed^2} \quad \Rightarrow \quad B > 2.13 \cdot 10^{-2}\ \text{T} \quad .$$

La forza magnetica riesce in tal caso ad incurvare la traiettoria e renderla parallela all'asse z prima che essa incontri l'armatura superiore. Con i dati proposti questa condizione è soddisfatta; e del resto lo si vede dalla figura, dove $x_M = 0.36$ mm, minore della distanza $d = 5$ mm tra le armature.

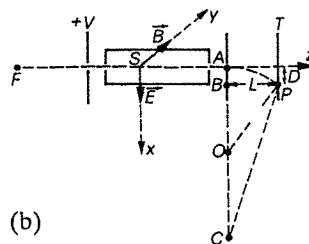
9.21. ***In figura è rappresentato un possibile dispositivo per lo studio delle variazioni della massa con la velocità. Dal filamento F vengono emessi per effetto termoelettronico elettroni con velocità trascurabile; essi sono accelerati da una d.d.p. V e passano successivamente attraverso un selettore di velocità S che si può schematizzare come una regione di spazio in cui si trovano un campo elettrico e uno magnetico, equiversi rispettivamente all'asse x e all'asse y, uniformi. Uscendo dal selettore gli elettroni sono sottoposti solo al campo* B *di cui sopra e vanno a cadere su uno schermo fluorescente T. Descrivere il procedimento della misura ed esprimere il risultato con una relazione analitica che leghi e/m alle altre grandezze misurabili.***

Cominciamo con l'esaminare il funzionamento del *selettore di velocità*: sull'elettrone che lo attraversa agiscono la forza elettrica $-e\mathbf{E}$, discorde all'asse x, e la forza magnetica $-e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, concorde all'asse x. L'azione combinata di tali forze modifica la traiettoria dell'elettrone a meno che questo non abbia una velocità tale che, in modulo, $evB = eE$ e quindi le forze si bilancino; se ciò avviene l'elettrone avanza con moto rettilineo uniforme lungo l'asse z alla velocità che possedeva inizialmente e che deve valere E/B. Con opportuni diaframmi è possibile isolare abbastanza bene gli elettroni che seguono una traiettoria rettilinea per cui nell'ultima parte dello strumento, che funziona come uno spettrometro di massa, entra un fascetto *collimato* di elettroni *monocromatici*, aventi cioè tutti la stessa velocità. Questi descrivono un arco di circonferenza di centro O, il cui raggio è ricavabile dalle quantità L (costante dello strumento) e D (deflessione misurata sullo schermo) tramite l'applicazione del teorema di Euclide al triangolo rettangolo APC:

$$\frac{D}{L} = \frac{L}{2R - D} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{L^2 + D^2}{2D} \quad . \tag{a}$$

Dalla (a) del problema 9.14 sappiamo che

$$R = \frac{p}{qB} = \frac{mv}{eB} = \frac{m_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{v}{eB}$$



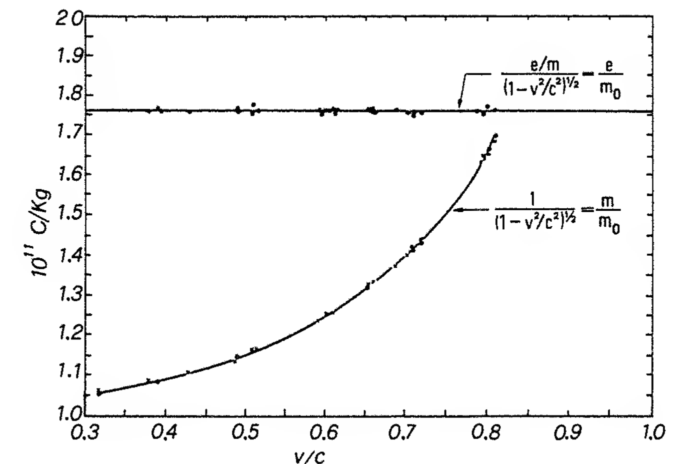
ovvero, con $v = E/B$,

$$R = \frac{m_0}{\left(1 - \dfrac{E^2}{c^2 B^2}\right)^{1/2}} \frac{E}{eB^2} \quad . \tag{b}$$

Mettendo insieme le relazioni (a) e (b) si ottiene

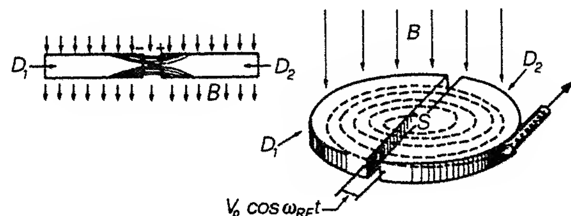
$$\frac{e}{m_0} = \frac{2D}{L^2 + D^2} \frac{E}{B^2} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{E^2}{c^2 B^2}\right)^{1/2}} \quad . \tag{c}$$

In conclusione: si regola V ad un certo valore, in corrispondenza si regola E (supponendo che B sia fissato una volta per tutte) in modo che la velocità selezionata corrisponda a quella impressa dalla d.d.p. acceleratrice; quindi si misura D. Ogni misura eseguita con valori diversi di V, E, D deve dare, entro gli errori sperimentali, lo stesso valore, calcolato con la relazione (c), di e/m_0. Nella figura sono rappresentati alcuni risultati sperimentali e le curve teoriche, anche per il rapporto $m/m_0 = \gamma$. Un esperimento di questo tipo è stato condotto da Bucherer nel 1909 (la teoria di Einstein della relatività ristretta è del 1905) e successivamente raffinato da altri; i risultati si sono sempre dimostrati in perfetto accordo con le previsioni teoriche (e confermano indirettamente che la carica elettrica è invariante, cioè non dipende dallo stato di moto della particella, come postulato dalla teoria della relatività ristretta).



9.22. ***Il nucleo dell'atomo di elio, formato da due protoni e due neutroni, viene chiamato anche particella α; esso possiede una carica positiva 2e e una massa m = 6.65 · 10⁻²⁷ Kg. Si vogliono accelerare particelle α mediante un ciclotrone fino a portarle a un'energia cinetica di 20 MeV. La sorgente di α è posta al centro del ciclotrone; per semplificare, si supponga che le particelle, appena uscite dalla sorgente, vengano accelerate dalla stessa d.d.p. che poi le accelererà nel passaggio da una cavità all'altra del ciclotrone. Il raggio massimo delle traiettorie, fissato dalle dimensioni del magnete, è*** $R_M = 0.5$ ***m, mentre la d.d.p. acceleratrice vale*** $V_0 = 10^4$ ***V. Calcolare il valore di B, la frequenza di ciclotrone, il numero totale di giri, il percorso totale e il tempo necessario per passare da zero a 20 MeV; discutere infine gli effetti relativistici.***

In figura è mostrato lo schema di un ciclotrone: esso consiste di una cavità metallica cilindrica piatta divisa in due metà D_1 e D_2 (chiamate così a causa



della loro forma di d maiuscola), posta in un campo magnetico uniforme **B**, parallelo all'asse. Le due cavità sono isolate e sono connesse ai poli di un generatore che fornisce una tensione del tipo $V = V_0 \cos \omega_{RF} t$, detta radiofrequenza. Quando lo ione percorre una delle cavità ($V_{cav} = \text{cost}$, $E_{cav} = 0$) non subisce alcuna forza elettrica, mentre invece viene accelerato quando attraversa la regione tra le due D in cui c'è campo elettrico. Il campo **B** costringe lo ione a compiere una traiettoria circolare. Dopo aver percorso una semicirconferenza all'interno di una D lo ione si riaffaccia all'intercapedine; se nello stesso tempo la radiofrequenza ha cambiato di segno lo ione subisce un'ulteriore accelerazione e il processo si ripete ad ogni semigiro fino a che viene raggiunta l'orbita di raggio massimo e la particella, con un opportuno meccanismo, viene deflessa all'esterno del ciclotrone.

Analizziamo adesso quantitativamente il moto appena descritto. Se la particella α uscita dalla sorgente viene accelerata proprio dalla d.d.p. V_0, la velocità con cui essa entra per la prima volta in una delle D del ciclotrone è data da

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = q V_0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \left(\frac{2 q V_0}{m} \right)^{1/2} = 9.81 \cdot 10^5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad .$$

Nella D la particella descrive una semicirconferenza di raggio $R_1 = m v_1 / qB$ e dopo un tempo $t/2 = \pi R_1 / v_1 = \pi m / qB$ (mezzo periodo) esce da una D per entrare nell'altra; al passaggio la sua energia cinetica diventa

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + q V_0 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = v_1^2 + \frac{2 q V_0}{m} = 2 \, \frac{2 q V_0}{m} \quad ,$$

e così via; dopo n semigiri la velocità vale $v_n = n^{1/2} v_1 = n^{1/2} \, (2 q V_0 / m^{1/2})$.

La velocità massima corrisponde a un'energia cinetica $T_M = 20$ MeV: $v_M = (2 T_M / m)^{1/2} = 3.1 \cdot 10^7$ m/s. Da v_M e dal fatto che $R_M = 0.5$ m si ricava

$$B = \frac{m v_M}{q R_M} = 1.29 \ \text{T} \quad .$$

Il numero totale di giri è

$$N = \frac{1}{2} \, \frac{v_M^2}{v_1^2} = \frac{T_M}{2 q V_0} = 500 \quad ;$$

esso è pari al rapporto tra l'energia cinetica finale e l'energia cinetica acquistata in ogni giro.

Notiamo che il raggio delle semicirconferenze cresce proporzionalmente alla velocità, ma il tempo impiegato a percorrerle è sempre lo stesso, almeno finché la massa si può ritenere costante (vedi problema 9.14); il periodo è quindi

$$t = \frac{2 \pi m}{q B} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2 \pi}{t} = \frac{q B}{m} \quad .$$

Egualmente costante è allora la frequenza di rivoluzione delle particelle, nota come *frequenza di ciclotrone*, che vale

$$\nu = \frac{\omega}{2 \pi} = \frac{q B}{2 \pi m} = 9.88 \cdot 10^6 \ \text{Hz} \quad .$$

Abbiamo già detto che nel tempo $t/2 = 5.06 \cdot 10^{-8}$ s in cui la particella percorre mezzo giro la radiofrequenza $V_0 \cos \omega_{RF} t$ deve cambiare di segno, di conseguenza ω_{RF} deve essere un multiplo intero di ω; in termini di frequenze

$$\nu_{RF} = j \nu \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{b}$$

Se $j = 1$ si dice che il ciclotrone opera in prima armonica, se $j = 2$ si parla di seconda armonica e così via.

Per passare da zero a 20 MeV occorre il tempo

$$t_0 = 2 \, \frac{t}{2} \, 500 = \frac{500}{\nu} = 50.6 \cdot 10^{-6} \ \text{s}$$

Il percorso totale all'interno del ciclotrone è

$$S = \pi R_1 + \pi R_2 + \ldots + \pi R_M = \pi R_1 (1 + 2^{1/2} + \ldots + 1000^{1/2}) =$$

$$= \pi R_1 \int_1^{1000} x^{1/2} dx = 1125 \ \text{m} \quad .$$

Essendo le due D del ciclotrone a una certa distanza tra loro, nel calcolo del cammino e del tempo totale occorrerebbe tener conto di ciò, ma la distanza è in effetti di pochi centimetri e le correzioni sono dell'ordine di qualche percento.

Verifichiamo quanta energia viene persa per irraggiamento percorrendo ad esempio l'ultima semiorbita. Secondo (9.6) viene irradiata la potenza

$$P = 1.38 \cdot 10^3 q^2 a^2 = 1.41 \cdot 10^{-34} a^2 \ \frac{\text{eV}}{\text{s}} \quad .$$

L'accelerazione centripeta vale

$$a = \frac{v_M^2}{R_M} = 19.2 \cdot 10^{14} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \Rightarrow \quad P = 5.2 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{eV}}{\text{s}} \quad .$$

Il tempo impiegato sulla semiorbita è $10^{-3} t_0$ e l'energia persa vale $W = 10^{-3} t_0 P = 0.26 \cdot 10^{-10}$ eV, assolutamente trascurabile rispetto all'energia

totale posseduta dalla particella (e lo stesso si può dire per le perdite durante l'accelerazione tra le due D).

Discutiamo ora brevemente gli effetti relativistici. Un requisito essenziale per il funzionamento del ciclotrone è la relazione (b) che possiamo chiamare isocronismo tra le due frequenze caratteristiche ν_{RF} e ν. Vediamo se ν rimane costante durante il moto. In base alla (a) ν è inversamente proporzionale alla massa che a sua volta dipende dalla velocità secondo (9.7). La variazione percentuale di ν tra l'istante iniziale, $v = 0$ $W = mc^2$, e l'istante finale, $v = v_M$ $W = m\gamma c^2$ con $\gamma = (1 - v_M^2/c^2)^{-1/2} = 1.005$, è data da

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{qB/\gamma m - qB/m}{qB/m} = \frac{1-\gamma}{\gamma} = -5 \cdot 10^{-3} \quad .$$

A causa dell'aumento della massa la frequenza di rivoluzione diminuisce e alla lunga la particella non è più in fase con la radiofrequenza, che deve cambiare in corrispondenza. L'effetto si esalta con l'aumentare dell'energia della particella e porta a un nuovo tipo di acceleratore, il *sincrociclotrone*, adatto a raggiungere energie di qualche centinaio di MeV.

Come vedremo nel problema 9.23 è possibile recuperare la condizione di isocronismo facendo variare il campo magnetico con la distanza dal centro secondo una opportuna legge $B(r)$ che corregga la variazione di ν con la velocità della particella; il campo magnetico cioè, pur restando costante nel tempo, non è più uniforme.

Notiamo infine che l'effetto relativistico non dipende da V_0; se V_0 è piccolo maggiore sarà il numero di giri e viceversa; ma l'energia cinetica massima T_M, ovvero la velocità massima v_M, dipendono solo dal prodotto BR_M.

Le idee che stanno alla base del funzionamento del ciclotrone sono state formulate nel 1932 da E.O. Lawrence. Fondamentale è l'utilizzazione multipla della stessa d.d.p. alternata, che permette di raggiungere elevate energie cinetiche senza disporre di una corrispondente d.d.p. continua (che oltre i 15 – 20 MV è tecnicamente irrealizzabile). Questa idea di *acceleratore ciclico* ha aperto la strada alle grandi macchine moderne che, seppure con diverse strutture magnetiche e di radiofrequenza, si servono sempre della tecnica di cessione multipla, in fase con la particella, di piccole quantità di energia.

9.23. ***Per ottenere fasci di ioni pesanti con elevata energia cinetica è stato progettato, ed è in corso di realizzazione in un laboratorio dell'INFN a Milano, un ciclotrone con un magnete superconduttore (CS) di raggio R = 80 cm, campo magnetico utile B = 4.2 T, avente una struttura a tre cavità (3 D). Il progetto prevede che si utilizzi un Tandem (vedi problema 9.3) per produrre fasci di ioni da iniettare al centro del ciclotrone per una ulteriore accelerazione. Descrivere le caratteristiche dei fasci di ioni ottenibili con il sistema Tandem-CS, discutendo le implicazioni degli effetti relativistici sul moto degli ioni in campo magnetico e indicando l'intervallo dei valori tra cui deve operare la radiofrequenza acceleratrice.***

Partendo dai risultati del problema 9.22 determiniamo innanzitutto la relazione che lega l'energia cinetica massima ottenibile con i parametri del CS:

$$T_M = \frac{1}{2} m v_M^2 = \frac{q^2 R^2 B^2}{2m} \quad .$$

Se scriviamo la carica $q = Ze$, la massa $m = Am_p$, e dividiamo per A

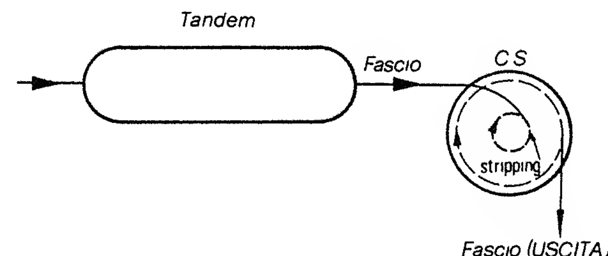
$$\frac{T_M}{A} = \frac{e^2}{2m_p} (RB)^2 \left(\frac{Z}{A}\right)^2 = K \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \quad , \tag{a}$$

avendo indicato con

$$K = \frac{e^2}{2m_p} (RB)^2 \tag{b}$$

un parametro caratteristico del ciclotrone, avente le dimensioni di un'energia. Le (a) e (b) indicano chiaramente che per ottenere energie elevate occorre che la macchina abbia un K, e quindi un RB, grande e che la sorgente fornisca ioni con (Z/A) grande. Se si misura l'energia cinetica in MeV ($= 1.6 \cdot 10^{-13}$ J) la (b) diviene

$$K = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-13}} \frac{e^2}{2m_p} (RB)^2 = 47.9\ (RB)^2 \text{ MeV} \quad . \tag{c}$$



Nel sistema a due stadi che vogliamo discutere, schematizzato nella figura, il fascio proveniente da un Tandem viene iniettato dall'esterno nel CS dove, nella zona centrale, subisce un processo di *stripping* (perdita di elettroni) in un bersaglio sottile. Lo scopo è di aumentare lo stato di carica Z/A per consentire, secondo la (a), energie sufficientemente elevate. I valori di Z/A ottenibili sono compresi tra 0.5, caso dello stripping totale di tutti gli elettroni per ioni leggeri, e 0.15 ÷ 0.20 per ioni pesanti quali l'oro e l'uranio.

Il ciclotrone superconduttore offre un metodo per ottenere un K elevato con una macchina di dimensioni contenute. Infatti, con un raggio $R = 80$ cm e un campo $B = 4.2$ T, $RB = 3.36$ Tm, $K = 540$ MeV e la (a) diviene

$$\frac{T_M}{A} = 540 \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \frac{\text{MeV}}{\text{nucleone}} \quad . \tag{d}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL. ONDE ELETTROMAGNETICHE

10a. Le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo, valide per fenomeni variabili nel tempo con legge qualsiasi, sono fornite in forma differenziale dalle equazioni di Mawxell

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0 \quad (10.1) \quad , \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad (10.2)$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.3) \quad , \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \quad (10.4)$$

Rispetto a quanto visto finora c'è un'aggiunta essenziale nella (10.4), costituita dal termine con il campo elettrico, su cui torneremo più avanti.

La densità di carica comprende sia le cariche libere che quelle di polarizzazione e si scrive

$$\varrho = \varrho_{\mathrm{lib}} + \varrho_{\mathrm{pol}} = \varrho_{\mathrm{lib}} - \mathrm{div}\,\mathbf{P} \quad ; \quad (10.5)$$

la densità di corrente a sua volta comprende la densità di corrente di conduzione, la densità di corrente amperiana (o di magnetizzazione) e la densità di corrente dovuta a spostamenti di cariche di polarizzazione, che si dimostra valere $\partial \mathbf{P}/\partial t$; pertanto

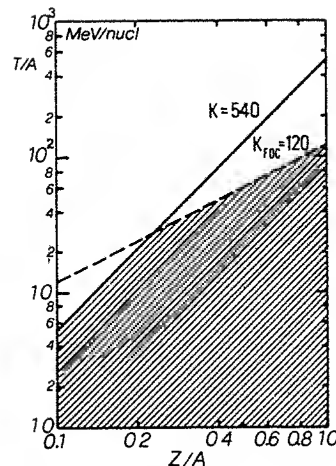
$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_{\mathrm{amp}} + \mathbf{j}_{\mathrm{pol}} = \mathbf{j}_c + \mathrm{rot}\,\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad . \quad (10.6)$$

Nelle equazioni di Maxwell compaiono perciò anche i vettori **P** e **M** che rappresentano macroscopicamente l'influenza dei corpi materiali; di conseguenza occorre conoscere le appropriate equazioni di stato che, a seconda del mezzo, legano **P** a **E** e **M** a **B** (come, per esempio, $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ o anche $\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}$). Spesso, con l'introduzione dei vettori $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$, le equazioni di Maxwell vengono scritte in maniera apparentemente più semplice in quanto compaiono esplicitamente solo ϱ_{lib} e $\mathbf{j}_c$; ma il problema è solo spostato poiché bisogna pur sempre conoscere i legami tra **D** e **E** e tra **H** e **B**.

Nello spazio vuoto, in assenza di cariche e correnti, $\mathbf{P} = \mathbf{M} = 0$ e le equazioni di Maxwell diventano

$$\mathrm{div}\ \mathbf{E} = 0 \quad (10.7) \quad , \quad \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \quad (10.8)$$

La (d) è riportata in figura: si vede che si possono ottenere fasci di ioni pesanti con $10 \div 20$ MeV/nucleone mentre per gli ioni leggeri si può arrivare fino a 135 MeV/nucleone. In quest'ultimo caso esistono tuttavia altri limiti al raggiungimento di energie elevate, imposti soprattutto dalla focalizzazione del fascio e dalla frequenza ν_{RF} della radiofrequenza acceleratrice.



Per quanto riguarda il primo punto ricordiamo che deve essere soddisfatta la condizione di isocronismo tra ν_{RF} e la frequenza ν di rivoluzione delle particelle, pari a $qB/2\pi m$. All'iniezione, se il campo magnetico agente localmente sulla particella vale B_0, $\nu = qB_0/2\pi m = qB_0/2\pi A m_p$, essendo m la massa a riposo dello ione. In un istante generico, quando la particella compie l'orbita di raggio r, con velocità $v \simeq \omega_0 r = qB_0 r/m$, se in quel punto il campo magnetico vale $B(r)$ la frequenza è

$$\nu = \frac{qB(r)}{2\pi m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{qB(r)}{2\pi m}\left[1-\left(\frac{r}{r_\infty}\right)^2\right]^{1/2} ,$$

avendo fatto uso di (9.7) e avendo posto $r_\infty = Am_pc/qB_0$. Se si vuole che ν rimanga costante e pari al valore iniziale, il campo magnetico deve variare col raggio secondo la legge

$$B(r) = B_0\Big/\left[1-\left(\frac{r}{r_\infty}\right)^2\right]^{1/2} .$$

Senza entrare nei particolari di come si realizzi questa condizione diciamo solo che la disuniformità di **B** influisce sulla focalizzazione del fascio e pone un limite sull'energia cinetica esprimibile come

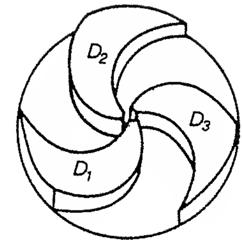
$$\frac{T_M}{A} \leqslant K_{\text{foc}}\left(\frac{Z}{A}\right)^2 = 120\left(\frac{Z}{A}\right)^2 \frac{\text{MeV}}{\text{nucleone}} . \qquad \text{(e)}$$

Anche la (e) è riportata nella figura vista per la (d); la zona tratteggiata è quella accessibile in base ai limiti finora discussi.

Esaminiamo ora il limite dovuto alla radiofrequenza. Come detto nell'enunciato del problema e come mostrato schematicamente in figura, la struttura del *CS* è a tre cavità. Se vogliamo fornire agli ioni la massima energia per giro dobbiamo accelerarli ad ogni passaggio da una *D* alla successiva, cioè tre volte per giro; ν_{RF} può essere pertanto solo la terza, sesta, nona, ... armonica della frequenza di rivoluzione, cioè

$$\nu_{RF} = n\nu \qquad n = 3,\ 6,\ 9,\ \dots .$$

Da $T_M = \frac{1}{2} A m_p v_M^2$ e da $v_M = \omega R = 2\pi\nu R$ otteniamo

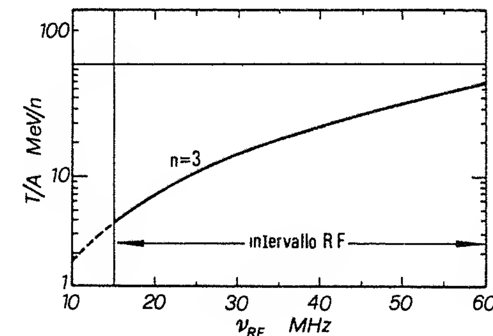


$$\nu = \frac{1}{\pi R (2m_p)^{1/2}}\left(\frac{T_M}{A}\right)^{1/2} = 2.75 \cdot 10^6 \left(\frac{T_M}{A}\right)^{1/2} \text{ Hz},$$

se T_M è espresso in MeV. Per la terza armonica

$$\nu_{RF} = 3\nu = 8.25 \cdot 10^6 \left(\frac{T_M}{A}\right)^{1/2} \text{ Hz} . \qquad \text{(f)}$$

La (f) è mostrata in figura; limiti di varia natura impongono per l'intervallo di variabilità della radiofrequenza gli estremi 15 e 60 MHz per cui l'energia massima per nucleone risulta dell'ordine di 60 MeV/nucl. Dal confronto con i dati della tabella del problema 9.3 è evidente che le prestazioni più interessanti si ottengono con gli ioni pesanti. Infatti, mentre con ioni tipo He, C, O si passa da $7 \div 10$ MeV/nucl. a $50 - 60$ MeV/nucl., nel caso di Au o U si passa da $1 \div 2$ MeV/nucl. a 20 MeV/nucl.

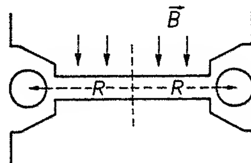


Vogliamo mettere in evidenza un ultimo fatto. Come si è già visto nel problema 9.14 l'energia cinetica e la quantità di moto ottenibili con un acceleratore che, come il ciclotrone, utilizza il campo magnetico per far compiere alla particella una traiettoria circolare di raggio R, dipendono sempre dal prodotto RB. Se si vogliono energie elevate e non si vogliono portare le dimensioni dell'acceleratore a valori in pratica irrealizzabili, bisogna disporre di campi magnetici **B** elevati. Per questo motivo i grandi acceleratori dell'ultima generazione, in costruzione o in progetto, siano essi del tipo ciclotrone per accelerare ioni pesanti o del tipo sincrotrone per protoni o elettroni, prevedono l'impiego della tecnologia della superconduzione per la realizzazione di conduttori capaci di sopportare correnti elevate: i campi magnetici così prodotti sono molto più intensi di quelli ottenibili con tecniche tradizionali.

9.24. *Nella figura sono riportate in sezione le espansioni polari di un magnete per betatrone: esso genera un campo magnetico* **B** *non uniforme, ma simmetrico rispetto ad un asse normale alle espansioni polari, nel senso che il modulo di* **B** *dipende solo dalla distanza r da questo asse. Coassiale all'asse di simmetria c'è una cavità toroidale in cui è praticato un vuoto spinto e in cui vengono iniettati elettroni. Il campo* **B** *viene fatto variare rapidamente e il campo elettrico indotto così generato serve ad accelerare gli elettroni. Calcolare quale relazione deve sussistere tra la variazione di* **B** *nei punti dell'orbita e quella media sul piano dell'orbita affinché questa sia stabile, cioè conservi lo stesso raggio R. Assumendo inoltre che sia $R = 80$ cm e che il flusso attraverso l'orbita vari con la legge $\Phi = 5 \cdot 10^2 t$ weber ($0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-3}$ s) calcolare quanta energia viene guadagnata ad ogni giro, quanti giri sono necessari per arrivare a 100 MeV, ammesso che l'energia di iniezione sia 50 KeV, e quanto vale l'energia massima raggiungibile.*

Per ragioni di simmetria si può prevedere che le linee di **E** siano circonferenze con centro sull'asse di simmetria, ad esso ortogonali, e che lungo di queste il modulo di **E** sia costante. Secondo la legge di Faraday e tralasciando il segno

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R E = \frac{d\Phi}{dt} \quad ,$$



così che il modulo del campo elettrico sull'orbita di raggio R è

$$E = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{R}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad ,$$

dove si é introdotto il valor medio di **B** nel piano dell'orbita scrivendo il flusso come $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \pi R^2 B_m$.

Un elettrone che percorra l'orbita di raggio R trova pertanto il campo **E** che lo accelera (basta che senso di variazione di **B** e verso di percorrenza siano opportunamente combinati); la quantità di moto dell'elettrone varia secondo la legge

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{e}{e\pi R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{eR}{2} \frac{dB_m}{dt} \quad .$$

In un intervallo finito di tempo

$$\Delta p = \frac{e}{2\pi R} \Delta\Phi = \frac{eR}{2} \Delta B_m \quad : \qquad \text{(a)}$$

la variazione di quantità di moto è proporzionale alla variazione di flusso ovvero alla variazione del valor medio di **B**. D'altra parte un aumento della quantità di moto, a parità di valore di **B**, implicherebbe un aumento del raggio

di curvatura, secondo la (a) del problema 9.14; se si vuole che il raggio resti costante deve crescere il valore di **B** sull'orbita in accordo con

$$\Delta p = eR\Delta B_R \quad . \qquad \text{(b)}$$

La condizione di stabilità è raggiunta eguagliando (a) e (b):

$$\Delta B_m = 2\Delta B_R \quad .$$

La variazione del campo magnetico medio sul piano dell'orbita deve essere doppia della variazione del campo nei punti dell'orbita; si vede come sia necessario un campo non uniforme (minore sull'orbita che al centro). Si noti che la trattazione è relativisticamente corretta: sono state infatti usate le formule $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ e $R = p/qB$, vere in ogni caso.

Passando ai numeri, la f.em. indotta $d\Phi/dt$ vale 500 V; ad ogni giro gli elettroni guadagnano 500 eV e per arrivare a 100 MeV da 50 KeV devono compiere un numero di giri pari a $n \simeq 2 \cdot 10^5$. La massima quantità di moto raggiunta dagli elettroni vale, secondo la (c) del problema 9.14,

$$p_M = 300\, B_{R,M} R\, \frac{\text{MeV}}{c} \quad .$$

Il valor massimo di B_R è la metà del valor massimo di B_m, pari a $\Phi_M/\pi R^2 = 1.25$ T per cui

$$B_{R,M} = 0.625 \text{ T} \quad \Rightarrow \quad p_M = 150 \frac{\text{MeV}}{c} \quad .$$

Da (9.9-9.10) si constata che, in valore numerico, $W \simeq T \simeq p = 150$, in quanto il termine contenente la massa a riposo dell'elettrone si può trascurare; l'energia massima vale pertanto 150 MeV.

Con il betatrone è stato possibile raggiungere energie dell'ordine di 300 MeV; i limiti sono posti dalle perdite di energia per irraggiamento e dalle difficoltà tecniche legate al raggiungimento con tecniche tradizionali dei valori elevati di **B** richiesti.

La proposta di accelerare particelle per mezzo di campi elettrici indotti è stata formulata da D.W. Kerst nel 1941.

* * *

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.9) \quad , \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \quad (10.10)$$

A parte il caso banale $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$, una soluzione di queste equazioni è necessariamente variabile nel tempo.

10b. La soluzione generale delle equazioni di Maxwell presenta notevoli difficoltà matematiche che esulano dai limiti di questo libro. Ci interessa invece porre in evidenza due fatti fondamentali, legati all'introduzione del termine $c^{-2}\partial \mathbf{E}/\partial t$ nella (10.4). Esso permette innanzitutto di stabilire la conservazione della carica elettrica in condizioni non stazionarie (e fu per questo introdotto da Maxwell); infatti, applicando l'operatore divergenza alla (10.4), utilizzando (10.1) e il fatto che div rot $\mathbf{B} = 0$ (vedi appendice A.5), si ottiene *l'equazione di continuità*

$$\text{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad , \quad (10.11)$$

che è l'espressione differenziale della conservazione della carica.

In secondo luogo il nuovo aspetto della (10.4) dice che un campo magnetico viene generato oltre che da correnti anche da un campo elettrico variabile nel tempo, viene così stabilita una simmetria tra gli effetti dei campi elettrici e magnetici variabili, che è alla base della propagazione delle onde elettromagnetiche. Si vede anche come in condizioni non stazionarie l'esistenza di $\mathbf{E}$ implichi quella di $\mathbf{B}$ e viceversa; i due concetti si unificano in quello di *campo elettromagnetico*.

Limitandoci per ora allo spazio vuoto è facile provare che dalle (10.9-10.10) utilizzando la (A.19) dell'appendice si ricava

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (10.12)$$

Il campo elettrico e il campo magnetico soddisfano alla stessa equazione, nota come *equazione delle onde* in quanto la sua soluzione più generale rappresenta una funzione che si propaga, con velocità c nel caso (10.12).

In particolare, se si considerano solo fenomeni unidimensionali, cioè campi che dipendono da una sola coordinata, si ha la cosiddetta *propagazione per onde piane* che gode delle seguenti proprietà.

1) I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione; questa, e il verso associato, sono individuati da $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$; se la propagazione avviene lungo l'asse x, le espressioni dei campi sono

$$\mathbf{E} = E_y\mathbf{u}_y + E_z\mathbf{u}_z \quad , \quad \mathbf{B} = B_y\mathbf{u}_y + B_z\mathbf{u}_z \quad . \quad (10.13)$$

2) Le componenti E_y, E_z, B_y, B_z sono funzioni di x (ciascuna ha lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale a x) e del tempo; la relazione funzionale può essere qualunque, però l'argomento è necessariamente del tipo $x \pm ct$ o $t \pm x/c$: cioè $E_y = E_y(x \pm ct)$ e analogamente per le altre componenti. Questa speciale dipendenza deriva dal carattere propagatorio della soluzione: e infatti la funzione $\mathbf{E}(x, t)$ assume lo stesso valore, che può essere scritto $\mathbf{E}(x_1 - ct_1)$ o $\mathbf{E}(x_2 - ct_2)$, nel punto x_1 al tempo t_1 e nel punto x_2 al tempo t_2 se questi valori sono legati dalla relazione $x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2$ ovvero $x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$; ciò vuol dire che il campo si propaga da x_1 a x_2 con velocità c.

3) I moduli dei campi sono legati dalla relazione

$$E = cB \quad . \quad (10.14)$$

Lo studio della soluzione tipo *onda piana* è importante perché, in base al principio di sovrapposizione, la soluzione più generale dell'equazione delle onde in tre dimensioni è data dalla somma di onde piane che si propagano in tutte le direzioni.

Occorre precisare che nelle (10.4-10.10) il coefficiente del termine $\partial \mathbf{E}/\partial t$ sarebbe $\varepsilon_0\mu_0$ e così anche nelle (10.12) questo sarebbe il coefficiente di $\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ e di $\partial^2\mathbf{B}/\partial t^2$. Maxwell fu condotto all'ipotesi che la propagazione della luce fosse un fenomeno elettromagnetico proprio dal fatto che nell'equazione delle onde $\nabla^2\mathbf{E} = b^{-2}\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$ il coefficiente b, che dimensionalmente è una velocità ed esprime appunto la velocità di propagazione dell'onda, coincidesse numericamente con la velocità della luce nel vuoto. La relazione

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \quad (10.15)$$

è di importanza fondamentale; è stato proposto di usarla, noto c^2 e fissato μ_0, per definire ε_0 e quindi via via tutte le altre grandezze elettriche e magnetiche, senza introdurre una quarta unità fondamentale.

In un mezzo omogeneo e isotropo, con costante dielettrica relativa $\varkappa_e$ e permeabilità magnetica relativa $\varkappa_m$, la (10.15) diviene

$$v^2 = \frac{1}{\varkappa_e\varkappa_m\varepsilon_0\mu_0} = \frac{c^2}{\varkappa_e\varkappa_m} \quad (10.16)$$

e v esprime la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel mezzo; in un'onda piana i moduli dei campi sono legati da

$$E = vB \quad . \quad (10.17)$$

10c. La propagazione di un'onda elettromagnetica, cioè di un campo elettrico e di un campo magnetico variabili nel tempo, è accompagnata da una propagazione di energia che avviene con la stessa velocità. La quantità di energia che per unità di tempo attraversa l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione è data dal modulo del vettore

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad , \quad (10.18)$$

detto *vettore di Poynting*; in un mezzo omogeneo e isotropo va aggiunta $\varkappa_m$

al denominatore. Il flusso di S attraverso una superficie $\int_\Sigma \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma$ dà il flusso di potenza; integrando rispetto al tempo si ottiene il flusso di energia elettromagnetica.

Oltre a questo fenomeno c'è un trasporto di quantità di moto: precisamente nell'unità di volume è contenuta la quantità di moto

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad . \tag{10.19}$$

Il calcolo dell'energia per unità di volume si esegue, nel vuoto, a partire dalla densità di energia

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad ; \tag{10.20}$$

in un mezzo omogeneo e isotropo si fanno le solite sostituzioni.

10d. Le dimensioni del vettore di Poynting, in accordo con la definizione, sono $J/m^2s = W/m^2$. Quelle della densità di quantità di moto da (10.19) risultano $Ws^2/m^4 = Js/m^4$. Ricordiamo i valori delle costanti in (10.15):

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad , \quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \quad , \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Il valore preciso della velocità della luce nel vuoto è $c = 299792458$ m/s (± 1 m/s). Nel 1983, assumendo valido per definizione questo valore di c, è stato ridefinito il metro come distanza percorsa dalla luce nel vuoto nel tempo $1/c \cong 3.336 \cdot 10^{-9}$ s.

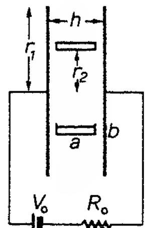
* * *

10.1. *Un condensatore piano ha le armature circolari di raggio $r_1 = 50$ cm, distanti tra loro $h = 5$ cm; nello spazio tra le armature, coassiale all'asse di simmetria e ortogonale a questo, c'è un avvolgimento toroidale di $N = 10^4$ spire, a sezione rettangolare di lati $a = 4$ cm, $b = 2.5$ mm, il cui raggio medio è $r_2 = 20$ cm (vedi figura). L'avvolgimento è chiuso su un galvanometro balistico e la resistenza totale del circuito è $R = 20\ \Omega$. All'istante $t = 0$ si comincia a caricare il condensatore connettendolo a un generatore ($V_0 = 100$ V, $R_0 = 5\ \Omega$). Calcolare il rapporto tra la carica q registrata dal galvanometro e la carica Q finale sulle armature del condensatore, nei due casi in cui il dielettrico sia il vuoto o un mezzo omogeneo e isotropo ($\varkappa_e = 5$, $\varkappa_m = 1$).*

Nell'avvolgimento c'è un passaggio di carica, la cui entità è determinabile con la legge di Felici (6.7) in quanto esso è interessato da una variazione di

flusso magnetico. Il campo **B** variabile è generato dal campo **E** variabile che esiste tra le armature del condensatore durante il periodo di carica. Occorre dunque applicare la (10.4), in cui questa volta gli effetti magnetici sono dovuti a un campo elettrico variabile e non a un moto di cariche ($j = 0$). Formalmente però, secondo (10.4-10.15), tutto avviene come se il condensatore fosse attraversato da una densità di corrente, uniforme sulla sezione,

$$j_s = \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad . \tag{a}$$



Sappiamo dal problema 5.14 che una tale corrente genera un campo magnetico le cui linee sono circonferenze ortogonali all'asse; su di queste il modulo di **B** è costante e vale

$$B(r) = \mu_0 \frac{r}{2} j_s = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r}{2} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{r}{2c^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{b}$$

Nel caso specifico $r = r_2$; assumendo inoltre **B** costante sulla sezione dell'avvolgimento (visto che $b \ll r_2$), il flusso magnetico vale

$$\Phi = NabB(r_2) = \frac{Nabr_2}{2c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad .$$

Detti Φ_i e Φ_f i flussi iniziali e finali, la carica elettrica che circola nell'avvolgimento durante il processo è data da

$$q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R} = \frac{Nabr_2}{2c^2 R} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_i - \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_f \right] \quad .$$

Il campo elettrico si calcola a partire dalla d.d.p. ai capi del condensatore, che dal problema 4.24 sappiamo essere $V(t) = V_0(1 - e^{-t/R_0C})$: $E(t) = V(t)/h$ e $(\partial E/\partial t)_i = V_0/R_0Ch$, $(\partial E/\partial t)_f = 0$. La carica finale sulle armature del condensatore è $Q = CV_0$ e si conclude

$$\frac{q}{Q} = \frac{Nabr_2}{2c^2 RR_0 C^2 h} \quad . \tag{c}$$

La capacità del condensatore nel vuoto è $C = \varepsilon_0 \Sigma/h = \varepsilon_0 \pi r_1^2/h = 1.39 \cdot 10^{-10}$ F e così $q/Q = 11.5$.

Quando tra le armature del condensatore c'è un mezzo con $\varkappa_e \neq 1$, bisogna sostituire $\varkappa_e \varepsilon_0$ al posto di ε_0 nella (a). Infatti nella (10.4) compare ora anche il termine $\mathbf{j}_{pol} = \partial \mathbf{P}/\partial t$ e la densità di corrente diventa $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t + \partial \mathbf{P}/\partial t = \partial \mathbf{D}/\partial t$; siccome $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varkappa_e \mathbf{E}$ nel caso di un dielettrico omogeneo e isotropo, la densità di corrente vale $\varkappa_e \varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$ e si vede come basti la sostituzione di $\varkappa_e \varepsilon_0$ al posto di ε_0. Ripercorrendo il problema risultano moltiplicati per $\varkappa_e$ il campo magnetico e il relativo flusso; va però moltiplicata per $\varkappa_e$ anche la capacità del condensatore che nella (c) compare al quadrato al denominatore e alla fine risulta

$$\left(\frac{q}{Q} \right)' = \frac{1}{\varkappa_e} \left(\frac{q}{Q} \right) = 2.3 \quad .$$

Nella terminologia usuale ai due termini

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad , \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad ,$$

validi rispettivamente nel vuoto e in un mezzo non ferromagnetico, si dà il nome di *densità di corrente di spostamento*. Deve essere ben chiaro che per quanto riguarda il termine col campo elettrico la denominazione è impropria, in quanto esso non corrisponde ad alcuna corrente, intesa come movimento di cariche elettriche.

Notiamo marginalmente che la costante di tempo di carica del condensatore, $\tau = R_0 C$, è assai breve, dell'ordine di 10^{-9} s: il tempo in cui avviene effettivamente passaggio di carica nell'avvolgimento è trascurabile rispetto al tempo necessario affinché l'equipaggio mobile del galvanometro entri in movimento; come è noto, questa è la condizione alla base del funzionamento di un galvanometro balistico.

10.2. ***Un'onda piana elettromagnetica si propaga nel vuoto lungo l'asse x; il modulo del campo elettrico è funzione della posizione e del tempo secondo la relazione $E = E_0 \cos\omega(t - x/c)$ e un'analoga espressione vale per il campo magnetico; supponiamo inoltre che E sia sempre parallelo all'asse y e B all'asse z. Verificare innanzitutto che campi di questo tipo sono soluzioni dell'equazione delle onde (10.12). Se l'intensità risulta pari a $53.12 \cdot 10^{-4}$ W/m² calcolare i valori di E_0 e B_0 e della densità media della quantità di moto trasportata dall'onda.***

Le componenti cartesiane dei campi sono $E_x = E_z = B_x = B_y = 0$, $E_y = E_0 \cos\omega(t - x/c)$, $B_z = B_0 \cos\omega(t - x/c)$. Le (10.12) si riducono pertanto a

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad .$$

Calcolando le derivate si constata subito che queste condizioni sono soddisfatte.

Un'onda come quella trattata si dice *monocromatica*, in quanto ha un ben determinato valore della frequenza, e *polarizzata rettilineamente*, in quanto sono fisse le direzioni lungo cui oscillano i campi **E** e **B**.

L'intesità dell'onda è il valor medio del modulo del vettore di Poynting (10.18)

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S_{\text{med}} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) dt = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \quad ;$$

l'integrale vale $T/2$, come si è visto nel capitolo ottavo Utilizzando (10 14-10.15)

$$S_{\text{med}} = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{cB_0^2}{2\mu_0} \quad , \qquad \text{(a)}$$

da cui si calcola $E_0 = 2$ V/m, $B_0 = 0.67 \cdot 10^{-8}$ T. Per il valor medio della densità di quantità di moto si ha poi, secondo (10.19),

$$Q_{\text{med}} = \frac{S_{\text{med}}}{c^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2c} = 5.9 \cdot 10^{-20} \frac{\text{W s}^2}{\text{m}^4} \quad .$$

Alla (a) si può arrivare anche così: da (10.20-10.14) si ottiene per la densità di energia $w = \varepsilon_0 E^2$ ovvero per il valor medio $w_{\text{med}} = \varepsilon_0 E_0^2/2$ variando E in modo sinusoidale. In un secondo attraverso l'area unitaria Σ passa tutta l'energia contenuta in un volume di base Σ e altezza c (spazio percorso in un secondo dall'onda); l'intensità media dell'onda piana è dunque $c\varepsilon_0 E_0^2/2$. È anche interessante notare come Q_{med} non sia altro che w_{med}/c: in un'onda piana elettromagnetica la densità di quantità di moto è eguale alla densità di energia divisa per la velocità di propagazione.

10.3. ***La radiazione solare cede alla superficie terrestre 2.2 calorie per centimetro quadrato e per minuto. In base a questo dato, la cosiddetta costante solare, e supponendo che l'energia sia portata da un'onda piana incidente normalmente alla superficie terrestre, calcolare i valori massimi del campo elettrico e del campo magnetico dell'onda e la pressione esercitata sulla superficie.***

Passando alle unità *MKS* la costante solare vale

$$I = S_{\text{med}} = 15.33 \cdot 10^2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad .$$

Con lo stesso procedimento visto nel problema 10.2 troviamo

$$E_0 = \left(\frac{2S_{\text{med}}}{c\varepsilon_0}\right)^{1/2} = 10.75 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.58 \cdot 10^{-6} \text{ T} \quad .$$

Il valore S_{med} rappresenta, come si è detto, la potenza per unità di superficie. Ma la potenza è $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, dove v coincide con c; la forza per unità di superficie, cioè la pressione, vale quindi

$$p_{\text{med}} = \frac{S_{\text{med}}}{c} = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0{}^2 = 5.11 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 5.04 \cdot 10^{-11} \text{ atm.}$$

Notiamo ancora una volta come la pressione sia eguale alla densità di energia. Lo stesso risultato si ottiene considerando la quantità di moto trasportata in un secondo dall'onda attraverso l'unità di superficie, che da una parte è eguale al-

valore medio della forza per unità di superficie, cioè alla pressione, dall'altra è pari a $cQ_{med} = w_{med}$.

Il risultato ottenuto è vero se si suppone che la superficie terrestre sia completamente assorbente. Nell'altro caso limite in cui la superficie colpita sia totalmente riflettente la pressione è maggiore di un fattore 2.

10.4. ***Una distribuzione di cariche è in moto entro un campo elettrico* E *e un campo magnetico* B *ai cui valori contribuisce anch'essa. La forza per unità di volume esercitata dai campi sulle cariche è* $\mathbf{F}_\tau = \varrho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ *e pertanto viene spesa per unità di volume la potenza* $P_\tau = \mathbf{F}_\tau \cdot \mathbf{v} = \varrho\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$. *In base all'equazione di Maxwell* (10.4) *trovare un'espressione equivalente a* P_τ *ed esprimere la conservazione dell'energia in una forma differenziale che ricordi l'equazione di continuità* (10.11) *e nella corrispondente forma integrale.***

Dalla (10.4) ricaviamo un'espressione esplicita per la densità di corrente legata al movimento di cariche:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad .$$

Il prodotto scalare $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ diventa così

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad .$$

L'ultimo termine può essere scritto

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)$$

e vediamo che compare nell'espressione di $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ la densità di energia del campo elettrico. Cominciamo a renderci conto del risultato che otterremo: da una parte c'è la potenza spesa, dall'altra la variazione nel tempo di una densità di energia. Per far quadrare il bilancio ci aspettiamo, in una formulazione del tutto generale, sia un termine con la densità di energia magnetica che un termine con un flusso di energia legato al vettore di Poynting. Dall'appendice (A.18) ricaviamo

$$\mathrm{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{B}$$

da cui deduciamo, attraverso (10.3) e (10.18),

$$\mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\,\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathrm{div}\,\mathbf{S} \quad .$$

Ma $\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$ analogamente a quanto visto prima per il campo elettrico e arriviamo alla formula conclusiva

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) - \mathrm{div}\,\mathbf{S}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \mathrm{div}\,\mathbf{S} \quad :$$

una variazione di energia è sempre bilanciata da un lavoro speso per mantenere le correnti e da un flusso di energia raggiante. L'espressione integrale si ricava da (a) integrando su un volume τ racchiuso dalla superficie Σ e applicando il teorema della divergenza (appendice A.4):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\,d\tau - \oint \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n\,d\Sigma \quad .$$

L'interesse delle formulazioni (a) e (b) della conservazione dell'energia risiede nella dimostrazione di come l'aggiunta del termine $c^{-2}\partial\mathbf{E}/\partial t$ nella (10.4) porti con sé la necessità di un flusso di energia; per questa via il vettore di Poynting viene introdotto in maniera naturale e spontanea.

Anche nel caso in cui l'energia totale entro il volume τ resti costante, $\partial W/\partial t = 0$, le espressioni precedenti conservano significato: è un flusso di energia del campo elettromagnetico la sorgente del lavoro necessario a mantenere le correnti. Tipico è il caso del filo conduttore percorso da corrente costante; lasciamo come esercizio il verificare che dall'esterno all'interno del filo c'è un flusso di energia che eguaglia il lavoro speso per effetto Joule. Vedremo altri esempi nei problemi seguenti.

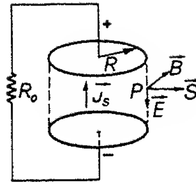
10.5. ***Un condensatore piano con armature circolari*** ($\Sigma = 5 \cdot 10^{-2}$ m^2, $h = 1$ cm), ***caricato alla d.d.p.*** $V_0 = 10^4$ V, ***viene lasciato scaricare attraverso un resistore di resistenza*** $R_0 = 10^6\ \Omega$. ***Calcolare il flusso totale di energia dall'interno all'esterno del condensatore durante la scarica.***

Dobbiamo calcolare i campi E e B e da questi il vettore di Poynting S durante il processo di scarica. Il modulo del campo elettrico è $E(t) = V(t)/h$; la direzione è ortogonale alle armature, il verso è dall'armatura positiva a quella negativa. La variazione di E dà origine a una densità di corrente di spostamento e quindi a un campo magnetico le cui linee sono circonferenze con centro sull'asse del sistema e ortogonali a questo. Dalla (b) del problema 10.1 ricaviamo per il modulo di B

$$B = \frac{R}{2c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R}{2}\frac{\partial E}{\partial t} \quad ,$$

in un punto P della superficie cilindrica Σ' di raggio R che delimita lateralmente il volume del condensatore $\tau = \Sigma h = \pi R^2 h$. Il verso di B è indicato in

figura; esso è tale in quanto $\partial \mathbf{E}/\partial t$ punta dall'armatura negativa a quella positiva ($\mathbf{E}$ decresce, la derivata è negativa ovvero vettorialmente opposta a $\mathbf{E}$). Viste le direzioni e i versi dei campi, il vettore di Poynting $\mathbf{S}$ nel punto P ha modulo



$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 R}{2} E \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0 R}{4} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

e punta verso l'esterno, ortoganalmente a Σ'; se poi assumiamo positivo il flusso uscente, occorre aggiungere un segno meno nella formula che dà S poiché $\partial E^2/\partial t$ è negativa. La potenza uscente da Σ' è

$$P = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma' = S\Sigma' = 2\pi RhS = -\frac{\varepsilon_0 h \pi R^2}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0 \tau}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

e coincide con quella totale uscente dal condensatore perché attraverso le armature non c'è flusso di energia ($\mathbf{S}$ è parallelo alle armature). Integrando sulla durata del processo si ottiene l'energia emessa:

$$W = \int_0^{\infty} P\,dt = -\frac{\varepsilon_0 \tau}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial E^2}{\partial t}\,dt = -\frac{\varepsilon_0 \tau}{2} [E^2(\infty) - E^2(0)] \quad .$$

Alla fine del processo il condensatore è scarico e $E(\infty) = 0$; all'inizio $E(0) = E_0 = V_0/h$ e quindi $W = \tau \varepsilon_0 E_0^2/2$, che è esattamente l'energia immagazzinata nel condensatore all'istante iniziale. Sappiamo d'altra parte che durante il processo viene sviluppata nel resistore una certa quantità di calore. Normalmente si è abituati a pensare che l'energia passi dal condensatore al resistore attraverso i fili di collegamento, portata dalla cariche; qui vediamo un'altra interpretazione altrettanto legittima, il cui il passaggio di energia avviene tramite il campo elettromagnetico esistente nello spazio circostante il circuito.

Per il calcolo numerico, dal problema 4.22 abbiamo $V(t) = V_0 e^{-t/R_0 C}$; ricordiamo che $E(t) = V(t)/h$ e quindi:

$$S = -\frac{\varepsilon_0 R}{4} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_0^2}{h^2} e^{-2t/R_0 C} \right) = \frac{\varepsilon_0 R V_0^2}{2h^2 R_0 C} e^{-2t/R_0 C} \quad ;$$

$$R_0 C = \frac{R_0 \varepsilon_0 \Sigma}{h} = 4.43 \cdot 10^{-5}\ \text{s} \quad , \quad R = \left(\frac{\Sigma}{\pi} \right)^{1/2} = 0.126\ \text{m} \quad ,$$

$$S = 12.6 \cdot 10^3\ e^{-4.5 \cdot 10^4 t}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad , \quad W = 2.2 \cdot 10^{-3}\ \text{J} \quad .$$

10.6. ***Un cavo coassiale è costituito da due superficie metalliche cilindriche, una di raggio R_1 e l'altra di raggio R_2. Ad una estremità il cavo è connesso ad un generatore di f.em. costante V_0 e all'altra estremità ad un resistore di resistenza R. Calcolare il flusso di energia attraverso una generica sezione ortogonale del cavo.***

Il campo elettrico all'interno del cavo è eguale a quello già calcolato per un condensatore cilindrico (vedi problemi 3.8 o 9.10) e vale

$$E(r) = \frac{V_0}{r \log(R_2/R_1)} \quad ;$$

la direzione è radiale, il verso dall'interno all'esterno se il conduttore centrale è positivo, come in figura. Il campo magnetico è stato calcolato nel problema 5.14:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 V_0}{2\pi r R} \quad ;$$

la direzione è tangenziale, il verso è legato a quello della corrente nel conduttore centrale dalla solita convenzione destrogira. Sia $\mathbf{B}$ che $\mathbf{E}$ sono nulli per $r < R_1$; $\mathbf{B}$ è nullo anche per $r > R_2$. Il vettore di Poynting, mostrato in figura, ha il modulo

$$S(r) = \frac{E(r)\ B(r)}{\mu_0} = \frac{V_0^2}{2\pi R \log(R_2/R_1)} \frac{1}{r^2} \quad .$$

L'energia che attraversa la sezione Σ del cavo nell'unità di tempo, cioè la potenza, vale

$$P = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{V_0^2}{2\pi R \log(R_2/R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r\,dr}{r^2} = \frac{V_0^2}{R} \quad ;$$

si constata l'identità col valore della potenza trasmessa dal generatore al resistore e su questo dissipata.

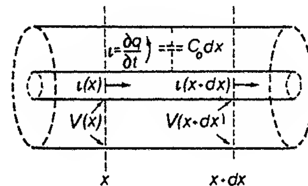
Il risultato ottenuto è interessante, ma va preso con cautela; si deve dire subito che nel cavo non ci sono certamente onde elettromagnetiche poiché i campi sono stazionari (a parte l'istante iniziale di chiusura del circuito); tutta l'intercapedine è uniformemente riempita di energia elettrica e magnetica. Nella (a) del problema 10.4 il primo termine è nullo perché la densità di energia è costante nel tempo, il secondo è nullo perché non c'è, nell'intercapedine, moto di cariche ($\mathbf{j} = 0$) e quindi deve essere nullo anche il terzo termine; il vettore di Poynting risulta solenoidale: il suo flusso è lo stesso attraverso qualsiasi sezione Σ del cavo. Il passaggio di energia dal generatore al resistore è così descritto per mezzo di un flusso statico di energia, in contrasto con l'intuizione comune che assegna al moto delle cariche elettriche il trasporto di energia (si veda la nota alla fine del capitolo).

Ad ogni modo la considerazione del vettore di Poynting nei casi statici non ci dice nulla di nuovo, ci fa solo vedere sotto una luce diversa fatti noti. È invece nei casi non stazionari che la nozione di flusso di energia elettromagnetica acquista importanza fondamentale.

10.7. ***Ad un capo di un cavo coassiale (R_1, R_2) viene applicata tra i due conduttori una tensione $V = V_0 \cos \omega t$. Trovare le equazioni differenziali cui obbediscono la tensione tra i conduttori e la corrente lungo di essi in un punto generico del cavo e discutere il risultato.***

Indichiamo con L_0 e C_0 il coefficiente di autoinduzione e la capacità per unità di lunghezza del cavo (vedi problema 8.10). Prendiamo un tratto generico dx di cavo, compreso tra i punti di coordinate x e $x + dx$. La corrente, che in x vale $i(x)$, in $x + dx$ non ha lo stesso valore perché tra i due conduttori c'è una capacità distribuita; il bilancio delle correnti porta a

$$i(x) = i(x + dx) + C_0 dx \frac{\partial V}{\partial t}$$



essendosi scritta come $C_0 dx V$ la carica sull'elemento dx e come $\partial q/\partial t$ la corrente che passa attraverso il condensatore. Analogamente $V(x)$ e $V(x + dx)$ non possono essere eguali a causa dell'induttanza distribuita e si scrive

$$V(x) = V(x + dx) + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} \quad .$$

Sviluppiamo in serie di Taylor limitandoci al primo termine:

$$i(x + dx) = i(x) + \frac{\partial i}{\partial x} dx \quad , \quad V(x + dx) = V(x) + \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad .$$

Le due equazioni precedenti diventano

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - C_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = - L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad .$$

Deriviamo rispetto al tempo la prima equazione, moltiplicata per L_0, e rispetto a x la seconda e sommiamo; si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad .$$

Procedendo in modo analogo l'equazione della corrente risulta

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad .$$

In conclusione, quando si applica ad una estremità del cavo una tensione variabile tra i due conduttori, ha origine la propagazione di un'onda di tensione e di un'onda di corrente lungo il cavo, con velocità $v = (L_0 C_0)^{-1/2}$. Dal problema 8.10

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log(R_2/R_1)} \quad , \quad L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{R_2}{R_1} \quad ,$$

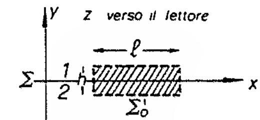
per cui $L_0 C_0 = \varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$: la velocità di propagazione coincide con quella della luce nel vuoto. Il risultato si estende a qualunque coppia di conduttori rettilinei e paralleli. Se lo spazio non è vuoto, ma è riempito da un dielettrico omogeneo e isotropo, per la velocità di propagazione vale la (10.16).

Sempre secondo il problema 8.10 il cavo coassiale in esame presenta l'impedenza reale $Z_0 = (L_0/C_0)^{1/2}$; in un punto generico x del cavo, dopo un tempo x/c dall'istante in cui viene applicato il segnale sinusoidale, la tensione tra i conduttori e la corrente valgono

$$V = V_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad , \quad i = \frac{V_0}{Z_0} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad ;$$

il segnale è sempre sinusoidale, ma c'è uno sfasamento proporzionale alla distanza dall'origine. Quanto detto vale fino a che le onde non raggiungono la fine del cavo; per i fenomeni successivi (riflessioni, onde stazionarie) rimandiamo ai vari trattati sull'argomento.

10.8. ***Un'onda piana elettromagnetica incide sulla superficie piana Σ che separa due diversi mezzi dielettrici, omogenei e isotropi, entrambi con $\varkappa_m = 1$. Usando le equazioni di Maxwell trovare quali sono le relazioni di discontinuità dei campi elettrico e magnetico su Σ; si supponga che siano diverse da zero, agli effetti pratici, solo le derivate rispetto alla coordinata lungo cui c'è la discontinuità del mezzo.***



Per comodità prendiamo in figura come piano xy il piano in cui giace il campo elettrico nel punto di incidenza ad un certo istante; il campo magnetico ha allora la direzione dell'asse z e le componenti non nulle dei campi sono E_x, E_y, B_z.

Se le proprietà magnetiche dei due mezzi sono eguali il campo magnetico non può subire alcuna discontinuità passando da un mezzo all'altro; quindi $\partial B_z/\partial y = 0$ ovvero $B_z^{(1)} = B_z^{(2)}$.

La situazione per **E** è diversa e occorre far uso delle equazioni (10.1-10.3) Nella prima la densità di carica è solo quella di polarizzazione, cioè $\varrho = -\operatorname{div}\mathbf{P}$, e quindi si ottiene $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0$. Siccome il dielettrico è omogeneo e isotropo $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$, $\operatorname{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}) = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \varkappa_e \mathbf{E}) = 0$. Ricordando la definizione di divergenza e il fatto che vanno considerate solo le derivate rispetto a y abbiamo $\partial/\partial y\ (\varepsilon_0 \varkappa_e E_y) = 0$ ovvero la quantità $\varepsilon_0 \varkappa_e E_y$ resta costante nel passaggio attraverso Σ. Questo fatto si traduce nell'eguaglianza

$$\varkappa_e^{(1)} E_y^{(1)} = \varkappa_e^{(2)} E_y^{(2)} \quad : \qquad \text{(a)}$$

la componente del campo elettrico normale alla superficie di separazione è discontinua.

Passiamo a (10.3), tenuto conto di nuovo solo delle componenti non nulle e della rilevanza delle sole derivate rispetto a y nonché della definizione di

rotore (appendice A.5), la (10.3) diventa $\partial E_x/\partial y = \partial B_z/\partial t$; ma $\partial B_z/\partial t$ si può scrivere $(\partial B_z/\partial y)\,(\partial y/\partial t)$ ed è quindi nulla; in conclusione $\partial E_x/\partial y = 0$ ovvero

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)} \qquad : \qquad \text{(b)}$$

la componente del campo elettrico tangenziale alla superficie di separazione è continua.

Se E_y è discontinua e E_x è continua il campo elettrico nell'attraversamento resta nel piano xy (in quanto **B** resta ortogonale a tale piano), ma cambia direzione; dovendo **E** essere a sua volta ortogonale alla direzione di propagazione, vuol dire che questa cambia nell'attraversare Σ (fenomeno della rifrazione).

Le relazioni (a) e (b), ottenute dalle equazioni differenziali del campo elettromagnetico, possono essere raggiunte anche partendo dalle corrispondenti equazioni integrali. Per esempio, consideriamo il rettangolo in figura, la cui altezza h può essere ridotta quanto si vuole; diciamo C il suo perimetro e Σ_0 la sua superficie; la relazione integrale corrispondente a (10.3) è

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma_0} \mathrm{rot}\,\mathbf{E}\cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_0 = -\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_0 = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_0} \mathbf{B}\cdot \mathbf{u}_n d\Sigma_0 \quad ,$$

l'ultimo passaggio è lecito perché Σ_0 non dipende dal tempo. Se h può essere ridotto a piacere Σ_0 diventa infinitesima e il flusso di **B** attraverso Σ_0 si annulla. Ne segue che nulla è la circuitazione di **E** lungo C e trascurando il contributo dei lati infinitesimi si arriva alla (b) nella forma $E_x^{(1)} dl - E_x^{(2)} dl = 0$.

Sempre nella figura la zona tratteggiata rappresenta la traccia di una superficie cilindrica di altezza h, avente una base di area Σ_0' nel primo mezzo e l'altra base nel secondo mezzo (entrambe parallele a Σ); la superficie laterale diventa infinitesima al diminuire di h. In assenza di cariche libere il teorema di Gauss per il vettore induzione dielettrica $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varkappa_e \mathbf{E}$, secondo (3.6), dà

$$\oint \mathbf{D}\cdot \mathbf{u}_n d\Sigma' = 0 \quad ,$$

se Σ' è la superficie cilindrica chiusa; ma il flusso è solo quello di D_y attraverso le basi per cui $D_y^{(1)}\Sigma_0' - D_y^{(2)}\Sigma_0' = 0$ ovvero $(D_y^{(1)} - D_y^{(2)})\ \Sigma_0' = \varepsilon_0(\varkappa_e^{(1)} E_y^{(1)} - \varkappa_e^{(2)} E_y^{(2)})\ \Sigma_0' = 0$ e si ritrova la (a).

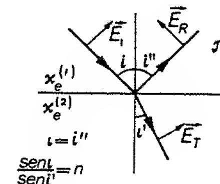
10.9. ***Quando un'onda piana elettromagnetica investe la superficie Σ di separazione tra due diversi mezzi dielettrici, una parte di essa viene riflessa e una parte trasmessa (rifratta); applicando le relazioni di discontinuità dimostrate nel problema 10.8 trovare la relazione che sussiste tra le ampiezze del campo elettrico incidente $\mathbf{E}_i$, del campo elettrico riflesso $\mathbf{E}_R$ e del campo elettrico trasmesso $\mathbf{E}_T$. Si assuma che la superficie Σ sia piana, che $\mathbf{E}_i$***

giaccia nel piano Π (piano di incidenza) della figura e che $\varkappa_m^{(1)} = \varkappa_m^{(2)} = 1$; si assumano inoltre note le leggi dell'ottica geometrica $i = i''$ e $\mathrm{sen}\,i/\mathrm{sen}\,i' = n$.

Nel punto in cui l'onda incidente si scinde nelle parti riflessa e trasmessa il campo elettrico nel mezzo uno è la somma di $\mathbf{E}_i$ e di $\mathbf{E}_R$ mentre nel mezzo due è eguale a $\mathbf{E}_T$. Le (a) e (b) del problema 10.8 divengono

$$\varkappa_e^{(1)}\ (E_i \mathrm{sen}\,i + E_R \mathrm{sen}\,i) = \varkappa_e^{(2)}\ E_T \mathrm{sen}\,i' \quad ,$$

$$E_i \cos i - E_R \cos i = E_T \cos i' \quad .$$



Introducendo l'*indice di rifrazione* $n_i = c/v_i$, rapporto tra le velocità della onda nel vuoto e nel mezzo, abbiamo da (10.16) con $\varkappa_m = 1$

$$\frac{\varkappa_e^{(2)}}{\varkappa_e^{(1)}} = \left(\frac{c/v_2}{c/v_1}\right)^2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = n^2 = \left(\frac{\mathrm{sen}\,i}{\mathrm{sen}\,i'}\right)^2$$

dove n, indice di rifrazione *relativo* del mezzo due rispetto al mezzo uno, coincide col secondo membro della legge di Snell sulla rifrazione $\mathrm{sen}\,i/\mathrm{sen}\,i' = n$. Il sistema di equazioni si può perciò riscrivere nella maniera seguente.

$$\left(\frac{\mathrm{sen}\,i}{\mathrm{sen}\,i'}\right)^2 E_T \mathrm{sen}\,i' - E_R \mathrm{sen}\,i = E_i \mathrm{sen}\,i$$

$$E_T \cos i' + E_R \cos i = E_i \cos i$$

ed ha la soluzione

$$E_R = \frac{\mathrm{sen}\,i\ \cos i - \mathrm{sen}\,i'\ \cos i'}{\mathrm{sen}\,i\ \cos i + \mathrm{sen}\,i'\ \cos i'}\ E_i = \frac{\mathrm{sen}(i - i')\ \cos(i + i')}{\mathrm{sen}(i + i')\ \cos(i - i')}\ E_i =$$

$$\frac{\mathrm{tg}(i - i')}{\mathrm{tg}(i + i')}\ E_i \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$E_T = \frac{2\,\mathrm{sen}\,i' \cos i}{\mathrm{sen}\,i\ \cos i + \mathrm{sen}\,i'\ \cos i'}\ E_i = \frac{2\,\mathrm{sen}\,i'\ \cos i}{\mathrm{sen}(i + i')\ \cos(i - i')}\ E_i \quad . \qquad \text{(b)}$$

Notiamo alcuni fatti importanti che abbiamo implicitamente accolto, ma che occorre spiegare per esteso.

1) Se $\mathbf{E}_i$ giace su Π, anche $\mathbf{E}_R$ e $\mathbf{E}_T$ giacciono su Π: ciò è dovuto alla continuità di **B** attraverso Σ e alla trasversalità delle onde. Infatti nell'onda incidente $\mathbf{B}_i$ è ortogonale a Π e diretto verso il lettore, dovendo $\mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i$ avere direzione e verso eguali a quelli dell'asse di propagazione; inoltre nel punto di incidenza **B** è continuo, cioè $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}^{(2)}$, con $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_R$ e $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}_T$. Ne segue che se per esempio $\mathbf{B}_R$ acquistasse una componente parallela al piano Π

(pur restando ortogonale all'asse di propagazione dell'onda riflessa), $\mathbf{B}_T$ dovrebbe acquistarne una eguale con il che non risulterebbe più ortogonale all'asse di propagazione dell'onda trasmessa (si provi a fare una verifica grafica). In conclusione anche $\mathbf{B}_R$ e $\mathbf{B}_T$ sono ortogonali a Π e quindi $\mathbf{E}_R$ e $\mathbf{E}_T$ giacciono su Π come $\mathbf{E}_i$.

2) Se il verso di $\mathbf{E}_i$ è quello indicato in figura, $\mathbf{E}_T$ è proprio quello mostrato e non, per esempio, quello con la stessa direzione e verso opposto. Ciò si deduce dalla (b) in quanto E_T/E_i non può assumere mai valori negativi quali che siano gli angoli (ricordiamo che i e i' sono ciascuno $\leq 90°$ e $i + i' \leq 180°$); come conseguenza $\mathbf{B}_T$ è diretto verso il lettore, analogamente a $\mathbf{B}_i$.

3) Nell'onda riflessa invece $\mathbf{E}_R$ può assumere sia il verso indicato che quello opposto in quanto nella (a) E_R/E_i può essere positivo o negativo; pertanto $\mathbf{B}_R$ può essere rivolto verso il lettore o verso la pagina; il risultato dipende dal valore dell'angolo di incidenza i.

10.10. ***Studiare numericamente, nei due casi di passaggio aria-vetro e vetro-aria come variano i rapporti E_R/E_i e E_T/E_i al variare dell'angolo di incidenza, sempre limitandosi a considerare campi elettrici contenuti nel piano di incidenza; in particolare, ricavare le formule valevoli per incidenza normale ($i = i' = 0$). Si prenda per l'aria $n_1 = 1$, per il vetro $n_2 = 1.5$.***

Utilizziamo le (a) e (b) del problema 10.9 che riscriviamo in modo diverso per mezzo degli indici di rifrazione, precisamente, dividendo i secondi membri di quelle relazioni per $\operatorname{sen} i'$ sia a numeratore che a denominatore, si ottiene

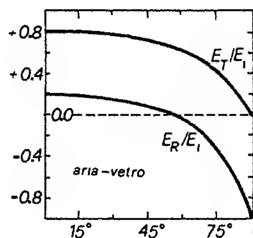
$$\frac{E_R}{E_i} = \frac{n \cos i - \cos i'}{n \cos i + \cos i'} \quad , \quad \frac{E_T}{E_i} = \frac{2 \cos i}{n \cos i + \cos i'} \quad .$$

Per $i = i' = 0$ queste diventano

$$\left(\frac{E_R}{E_i}\right)_{i=0} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad , \quad \left(\frac{E_T}{E_i}\right)_{i=0} = \frac{2}{n+1} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad . \qquad \text{(a)}$$

Riportiamo in tabella i valori dei rapporti, calcolati per alcuni valori di i, nel caso aria-vetro in cui $n = 1.5$; i grafici corrispondenti sono mostrati in figura.

	i	i'	E_R/E_i	E_T/E_i
	0°	0°	0.20	0.80
	15°	9.94°	0.19	0.79
	30°	19.47°	0.16	0.77
	45°	28.13°	0.11	0.71
*	56.31°	33.69°	0.00	0.67
	60°	35.26°	− 0.04	0.64
	75°	40.09°	− 0.33	0.41
	90°	41.81°	− 1.00	0.00



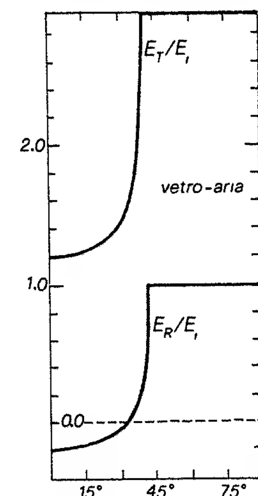
Per il campo trasmesso non c'è molto da dire; esso decresce monotonamente dal valore massimo per $i = 0°$ a zero per $i = 90°$. Il campo riflesso ha il valore massimo per $i = 0°$; poi decresce e passa per zero quando $i + i' = 90°$ in quanto allora, in base alla (a) del problema 10.9, $\operatorname{tg}(i + i') = \infty$; successivamente il rapporto diviene negativo e infine a 90° il campo riflesso è eguale a quello incidente, ma con segno opposto (questo è un caso limite in cui in realtà non esiste più il fenomeno di riflessione e trasmissione). L'angolo di incidenza per cui $E_R = 0$ obbedisce alla

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i'} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}(90° - i)} = \frac{\operatorname{sen} i}{\cos i} = \operatorname{tg} i = n$$

e viene detto *angolo di Brewster*. È fondamentale ricordare che *questa particolare condizione di soppressione del campo riflesso è caratteristica esclusiva di onde col campo elettrico giacente nel piano di incidenza Π.*

Passiamo al caso vetro-aria, $n = 0.667$. Anche ora riportiamo alcuni valori in tabella e i grafici corrispondenti in figura. Per i tale che $\operatorname{tg} i = n$ (un asterisco) c'è soppressione dell'onda riflessa. Accade poi un altro fatto fondamentale: da $\operatorname{sen} i/\operatorname{sen} i' = n$ si ricava che i è minore di i' se n è minore di uno; quando i cresce, i' cresce con maggiore rapidità e raggiunge 90° in corrispondenza a $\operatorname{sen} i = \operatorname{sen} i_0 = n$; per $i > i_0$ $\operatorname{sen} i > n$ e dovrebbe essere $\operatorname{sen} i' > 1$. Ciò vuol dire che per $i > i_0$ non è possibile avere trasmissione attraverso la superficie e l'onda incidente viene riflessa *totalmente*; condizione perché avvenga questo fenomeno è che *l'indice di rifrazione del mezzo uno, in cui si trova l'onda incidente, sia maggiore dell'indice di rifrazione del mezzo due* (quindi vetro-acqua, acqua-aria, vetro-aria, sì; aria-acqua, aria-vetro, acqua-vetro, no, tanto per fare alcuni esempi). La *riflessione totale* è un fatto generale, che si ricava direttamente dalla legge della rifrazione e non dipende dalla particolare giacitura del campo elettrico.

	i	i'	E_R/E_i	E_T/E_i
	0°	0°	− 0.20	1.20
	15°	22.83°	− 0.18	1.22
	30°	48.56°	− 0.07	1.41
*	33.69°	56.31°	0.00	1.50
**	41.81°	90°	1.00	3.00
	45°	—	1 00	—
	60°	—	1.00	—
	75°	—	1.00	—
	90°	—	1.00	—

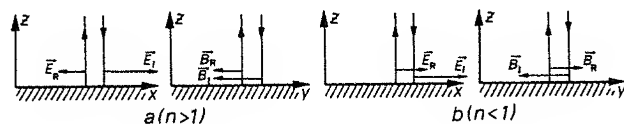


In conclusione, il campo riflesso parte da un valore minimo negativo, passa attraverso zero all'angolo di Brewster e cresce fino a diventare eguale al campo incidente quando $i = i_0$; in corrispondenza il campo trasmesso cresce

monotonamente fino ad assumere il suo valore massimo per $\iota = i_0$; oltre questo limite non c'è più onda trasmessa, ma nei punti del mezzo due infinitamente vicini alla superficie di separazione le relazioni di discontinuità richiedono un valore del campo diverso da zero. Si dimostra che penetrando nel mezzo due il valore del campo elettrico decresce con legge esponenziale annullandosi in pratica a una profondità dell'ordine della lunghezza d'onda della radiazione incidente.

Ritornando, per finire, alle condizioni di incidenza normale, vediamo che nei due casi $n > 1$ e $n < 1$ si ha un comportamento diverso del campo riflesso.

1) $n > 1$, aria-vetro: $E_R/E_\iota > 0$, il campo riflesso conserva la stessa posizione rispetto al versore di propagazione; si ha la situazione mostrata nella parte a della figura e si può dire che nel punto di incidenza il campo elettrico subisce una rotazione di 180°; il campo magnetico riflesso deve allora conservare il verso di quello incidente.

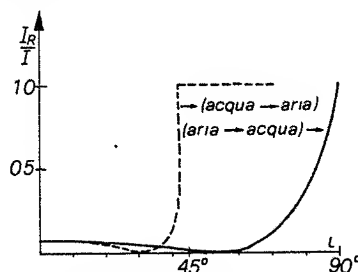


2) $n < 1$, vetro-aria: $E_R/E_\iota < 0$, la posizione di E_R rispetto all'asse di propagazione muta; si ha la situazione della parte (b) della figura e dunque il campo elettrico non ruota, ruota invece di 180° il campo magnetico.

Esamineremo le conseguenze di tali fatti nel capitolo sui fenomeni di interferenza

Oltre ai rapporti dei moduli dei campi, che abbiamo qui considerato, è molto importante il quadrato del rapporto dei moduli. Nel problema 10.2 abbiamo trovato che l'intensità di un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del campo elettrico. La quantità

$$R_p = \frac{I_R}{I_\iota} = \left(\frac{E_R}{E_\iota}\right)^2$$



rappresenta, come vedremo nel capitolo undicesimo, la percentuale di energia riflessa. In figura è riportato R_p in funzione di ι per i due casi discussi, prendendo i dati dalle tabelle.

10.11. ***In un dipolo elettrico oscillante il moto della carica q, che supponiamo avvenga sull'asse z con ampiezza di oscillazione z_0, è descritto tramite un momento di dipolo elettrico $p = p_0 \operatorname{sen}\omega t$ con $p_0 = qz_0$. Si dimostra che il campo elettrico a distanze $r \gg z_0$ vale in modulo***

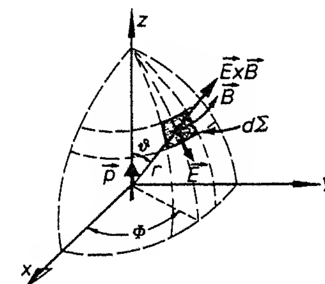
$$E = \frac{p_0 \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \operatorname{sen}(kr - \omega t) \quad ; \qquad (a)$$

esso è sempre contenuto nel piano azimutale definito dall'asse del dipolo e dalla direzione di propagazione ed è normale a quest'ultima. Dare l'espressione del campo magnetico associato al campo elettrico del dipolo oscillante e calcolare l'intensità $I(\theta)$ e la potenza totale P_0 (¹). Dedurre da P_0 l'espressione della potenza irradiata da una carica in moto con accelerazione a.

Riscriviamo la (a) per mettere meglio in evidenza la dipendenza del campo elettrico dalla distanza r e dall'angolo di emissione θ:

$$E(r, \theta) = \frac{E_0}{r} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(kr - \omega t) \quad , \qquad (b)$$

$$E_0 = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad . \qquad (c)$$



Ricordiamo che il fattore k, misurato in rad/m e inserito per riportare l'argomento del seno alle corrette dimensioni, vale ω/c.

La perturbazione elettromagnetica rappresentata dalla (b), che vale a grandi distanze dal dipolo, ha un andamento quasi sferico: questo perchè accanto alla dipendenza $1/r$ c'è il fattore $\operatorname{sen}\theta$ e pertanto, a parità di r, il campo non è costante in modulo. Se si considera una piccola porzione del fronte d'onda, come ad esempio l'elemento di superficie $d\Sigma$ della figura, l'onda si comporta da onda piana; in base alla (10.14) il campo magnetico vale, in modulo,

$$B = \frac{E}{c} = \frac{E_0}{cr} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(kr - \omega t) \quad ;$$

esso è ortogonale a **E** con verso tale che il vettore di Poynting **S** dia la direzione di propagazione dell'onda. Il modulo di **S** si scrive

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{E^2}{c\mu_0} = \varepsilon_0 c E^2 = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2(kr - \omega t)$$

e l'intensità, cioè l'energia che passa in media nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie, vale

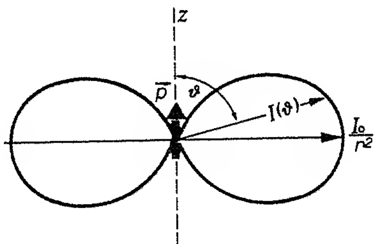
$$I(r, \theta) = \frac{1}{T}\int_0^T S\,dt = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta = \frac{I_0}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta \quad , \qquad (d)$$

(¹) Per una trattazione del campo generato da un dipolo elettrico oscillante si veda A. Rostagni, Fisica Generale, UTET, Vol. II, pg. 459.

$$I_0 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \quad , \tag{e}$$

essendosi usata l'espressione (c).

In figura è rappresentato un *diagramma polare* della funzione $I(\theta)$: con r costante per ogni valore di θ si riporta dal centro del dipolo un segmento di lunghezza proporzionale a $I(\theta)$. Il diagramma mette bene in evidenza le caratteristiche principali dell'emissione del dipolo elettrico oscillante: l'intensità è nulla per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, cioè lungo l'asse del dipolo, ed è massima per $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$ (la figura è valida in qualunque piano passante per z).



La potenza media $dP_0(\theta, \phi)$ che passa attraverso un elemento di superficie $d\Sigma = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi$ (espresso in coordinate polari, secondo la nota B del primo capitolo) normale a S. è data da

$$dP_0(\theta, \phi) = \frac{I_0}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta d\Sigma = -I_0 \operatorname{sen}^2\theta d\cos\theta d\phi \quad ;$$

la potenza media totale irradiata dal dipolo si ottiene integrando su una superficie sferica:

$$P_0 = -I_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}^2\theta d\cos\theta = \frac{8\pi}{3} I_0 \tag{f}$$

ovvero, utilizzando la (e),

$$P_0 = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \quad . \tag{g}$$

La dipendenza da r scompare in quanto la potenza irradiata è la stessa attraverso tutte le superficie sferiche concentriche al dipolo (conservazione dell'energia)

Ritorniamo alla carica q che oscilla con legge oraria $z = z_0 \operatorname{sen}\omega t$; la sua accelerazione è $d^2z/dt^2 = -\omega^2 z_0 \operatorname{sen}\omega t$ e l'accelerazione quadratica media vale

$$a^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d^2 z}{dt^2}\, dt = \frac{\omega^4 z_0^2}{2} \quad ;$$

da questa e da $p_0 = qz_0$ ricaviamo $p_0^2\omega^4 = 2q^2a^2$ e sostituendo nella (g)

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = 0.22 \cdot 10^{-15}\, q^2 a^2 \quad \text{W} \quad .$$

Abbiamo ritrovato la formula di Larmor (9.6), che ha validità generale e si applica a tutti i casi non relativistici in cui una carica q si muove con accelerazione a.

10.12. ***Un'antenna radio lunga $z_0 = 30$ m trasmette su una frequenza $\nu = 5 \cdot 10^5$ Hz ed invia a un apparecchio radio, posto a distanza $r = 10$ Km in direzione ortogonale rispetto all'antenna, un segnale di ampiezza $E = 0.1$ V/m. Calcolare la potenza irradiata dall'antenna e il valore massimo della corrente che la percorre.***

Trattiamo l'antenna come un dipolo oscillante e utilizziamo le relazioni trovate nel problema 10.11; nella (b) $E_0 \operatorname{sen}\theta / r = 0.1$ V/m con $r = 10^4$ m e $\theta = \pi/2$ per cui $E_0 = 10^3$ V/m. Dalle (e) e (f)

$$I_0 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 = 1.33 \cdot 10^3 \,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad , \quad P_0 = 11.1 \cdot 10^3 \text{ W} = 11\ 1 \text{ KW}$$

Nell'antenna il moto oscillatorio della carica $q = q_0 \operatorname{sen}\omega t$ dà origine alla corrente $I = dq/dt = q_0\omega_0 \cos\omega t$ per cui

$$I_{\max} = q_0 \omega \quad , \quad p_0 = q_0 z_0 = \frac{I_{\max} z_0}{\omega} \quad .$$

Sostituendo nella (g) del problema 10.11

$$P_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{z_0^2 \omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \right) I_{\max}^2 = \frac{1}{2} R_a I_{\max}^2 \quad . \tag{a}$$

Per la grandezza R_a si ottiene l'espressione

$$R_a = \frac{z_0^2 \omega^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{z_0}{\lambda} \right)^2 = 789.2 \left(\frac{z_0}{\lambda} \right)^2 \quad , \tag{b}$$

avendo usato la (10.15), la $\omega = 2\pi\nu$ e la relazione $\lambda\nu = c$ tra lunghezza d'onda, frequenza e velocità di propagazione. R_a ha le dimensioni di una resistenza e si chiama *resistenza di radiazione*; essa caratterizza il processo di emissione di energia elettromagnetica qui descritto. Naturalmente R_a non è la resistenza ohmica dell'antenna e la (a) non rappresenta la potenza dissipata per effetto Joule in seguito al passaggio della corrente. La (a) rappresenta invece la potenza che bisogna fornire all'antenna per produrre un segnale radio di ampiezza $E = 0.1$ V/m a 10 Km di distanza.

Con i dati del problema $R_a = 1\ 97\ \Omega$ e dal valore noto di P_0 ricaviamo

$I_{max} = 106.2$ A. Per inciso, notiamo che $\lambda = c/\nu = 600$ m, cioè che $z_0 \ll \lambda$: troviamo che è soddisfatta una delle condizioni fondamentali per la teoria dell'emissione del dipolo elettrico oscillante.

* * *

NOTA

Nel problema 10.4 si è visto come la conservazione dell'energia nella sua forma più generale, cioè per campi variabili comunque nel tempo, richiedesse l'introduzione del flusso di energia attraverso il vettore di Poynting. Già nei casi più semplici, come il condensatore che si carica o scarica, la considerazione del flusso di energia porta a risultati che sembrano in contrasto con l'intuizione; lo scambio di energia avverrebbe tramite il campo elettromagnetico che circonda il circuito e non lungo i fili che portano la corrente. Nei fenomeni statici il contrasto è ancora più evidente, per quanto occorra notare che un campo magnetico, anche se costante, è sempre prodotto da un moto di cariche. In realtà questa problematica è legata da una parte alla difficoltà di localizzare l'energia elettromagnetica, per cui non ha molto significato il chiedersi che strada faccia l'energia, dall'altra al fatto che un campo elettromagnetico porta anche momento angolare, oltre ad energia e quantità di moto, ed è proprio la conservazione di questo che richiede un flusso di energia e quantità di moto anche nei fenomeni statici. Si veda allo scopo il capitolo 27 del II Volume della Fisica di Feynman.

* * *

CAPITOLO 11

POLARIZZAZIONE

11a. In un'onda elettromagnetica piana che si propaga lungo l'asse x le componenti y e z del campo elettrico **E**, espresso in modo del tutto generale da (10.13), variano di norma in maniera indipendente; pertanto **E** ha una direzione e un modulo che non sono costanti nel tempo: esso *gira* e varia in lunghezza casualmente man mano che si propaga lungo l'asse x, pur restando sempre *trasversale*, cioè ortogonale a x. Il campo magnetico **B** ha lo stesso comportamento in quanto il suo modulo è proporzionale a quello di **E** (10.14-10.17) e la sua direzione è sempre ortogonale ad **E**; per tale ragione nel seguito ci riferiremo esclusivamente al campo elettrico. Questa situazione viene riassunta dicendo che *l'onda piana elettromagnetica non è polarizzata*.

Di particolare interesse sono i casi in cui **E** non varia casualmente, ma con legge regolare. Consideriamo per semplicità un'onda piana sinusoidale monocromatica, le cui componenti variano con la legge

$$E_y = E_{0y} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v}\right) \quad , \quad E_z = E_{0z} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \phi\right) \qquad (11.1)$$

Il luogo dei punti descritti dall'estremo del vettore **E** si ottiene eliminando il tempo e risulta essere

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 - \frac{2E_yE_z}{E_{0y}E_{0z}} \cos\phi = \operatorname{sen}^2\phi \quad . \qquad (11.2)$$

Se ϕ rimane costante nel tempo, l'estremo di **E** percorre un'elica ellittica, avente come asse la direzione di propagazione e con proiezione sul piano yz rappresentata da (11.2), ruotando con velocità angolare ω. L'onda piana si dice *polarizzata ellitticamente*.

Sono notevoli i seguenti casi particolari.

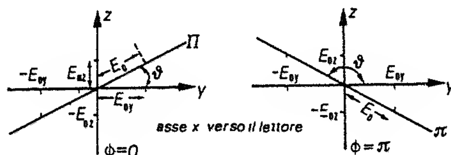
A. *Polarizzazione rettilinea*, $\phi = 0$ oppure $\phi = \pi$.

Le equazioni (11.1-11.2) diventano

$$E_y = E_{0y} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \quad , \quad E_z = \pm E_{0z} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \quad ,$$

$$\frac{E_z}{E_{0z}} = \pm \frac{E_y}{E_{0y}} \quad . \qquad (11.3)$$

L'estremo del vettore E giace sempre nel piano Π passante per l'asse x e intersecante il piano yz lungo la retta che forma con l'asse y l'angolo θ tale che $\operatorname{tg}\theta = \pm E_{0z}/E_{0y}$ (vedi figura). Mentre E si propaga il suo modulo varia con legge armonica assumendo i valori compresi tra zero e $E_0 = (E_{0y}^2 + E_{0z}^2)^{1/2}$. In pratica l'ellisse è degenerata in una retta e l'onda piana si dice appunto *polarizzata rettilineamente* o *linearmente*. Il piano Π, in



cui avviene la vibrazione e che ha giacitura fissa, viene chiamato *piano di polarizzazione*.

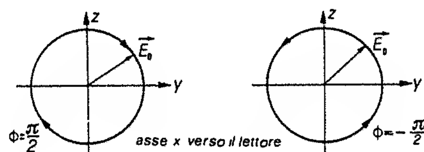
B. *Polarizzazione circolare*, $\phi = \pm\pi/2$, $E_{0y} = E_{0z} = E_0$.

Le (11.1-11.2) si scrivono:

$$E_y = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad , \quad E_z = \pm E_0 \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad ,$$

$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2 \quad . \tag{11.4}$$

Durante la propagazione E ruota con velocità angolare ω, il suo modulo resta costante, il suo estremo descrive nello spazio un'elica cilindrica di passo costante, avente come proiezione sul piano yz una circonferenza di raggio E_0. I versi di rotazione sono mostrati in figura: guardando dal verso positivo all'asse



x se si vede E ruotare in senso orario si dice che l'onda piana è *polarizzata circolarmente in senso levogiro*, in caso contrario è *polarizzata circolarmente in senso destrogiro*.

11b. L'energia elettromagnetica che passa nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie è data dal modulo del vettore di Poynting (vedi paragrafo 10c.); in un'onda piana $B = E/v$ e quindi

$$S = \frac{E^2}{\varkappa_m \mu_0 v} = c\varepsilon_0 \left(\frac{\varkappa_e}{\varkappa_m}\right)^{1/2} E^2 = \eta E^2 \quad , \tag{11.5}$$

avendo posto $\eta = c\varepsilon_0(\varkappa_e/\varkappa_m)^{1/2}$. Se poi valgono le (11.1) abbiamo

$$S = \eta\left[E_{0y}^2 \cos^2\left(\omega t - \omega\frac{x}{v}\right) + E_{0z}^2 \cos^2\left(\omega t - \omega\frac{x}{v} + \phi\right)\right] \quad . \tag{11.6}$$

Ha importanza nella pratica conoscere non tanto i valori istantanei di S quanto il suo *valor medio nel tempo*, dato che gli strumenti di rivelazione sono sensibili a tale quantità. Il valor medio I di S è definito come

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt$$

e si chiama *intensità* dell'onda. Introducendo (11.6) si ottiene

$$I = \eta\frac{E_{0y}^2}{2} + \eta\frac{E_{0z}^2}{2} = I_y + I_z \quad , \tag{11.7}$$

indipendentemente dal valore di ϕ; l'intensità è data quindi dalla somma di due termini, ciascuno connesso a una delle due componenti di E e tra loro indipendenti.

Per un'onda polarizzata ellitticamente la (11.7) conserva la sua forma, con $I_y \neq I_z$. Se invece l'onda è polarizzata rettilineamente possiamo dire, con riferimento alla relativa figura, che $E_{0y} = E_0\cos\theta$, $E_{0z} = E_0\operatorname{sen}\theta$ e la (11.7) diviene

$$I = \eta\frac{E_0^2\cos^2\theta}{2} + \eta\frac{E_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{2} = I_y + I_z = \eta\frac{E_0^2}{2} \quad , \tag{11.8}$$

concludiamo che *un'onda piana polarizzata linearmente* in un piano che forma un angolo θ con una direzione y prefissata *si può pensare come sovrapposizione di due onde piane polarizzate linearmente* nei piani xy e xz, tra loro ortogonali; queste onde componenti sono *in fase o in opposizione di fase* e hanno le intensità $I_y = I\cos^2\theta$, $I_z = I\operatorname{sen}^2\theta$.

Nel caso di polarizzazione circolare $E_{0y} = E_{0z} = E_0$ e la (11.7) si scrive

$$I = \eta E_0^2 \quad ; \tag{11.9}$$

anche questa volta possiamo pensare l'*onda piana polarizzata circolarmente* come *sovrapposizione di due onde piane polarizzate linearmente* in piani perpendicolari, *in quadratura di fase* e con intensità eguali, ciascuna pari a $I/2$.

A questo punto riconsideriamo l'*onda piana polarizzata ellitticamente* e concludiamo che anch'essa si può pensare come *sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente* in piani ortogonali, le quali presentano una *differenza di fase generica, ma costante nel tempo*, e ampiezze generalmente diverse (si veda il paragrafo 12a).

Quando l'onda piana non è polarizzata la direzione di vibrazione di E varia in maniera completamente casuale, come puntualizzato nel paragrafo 11a. Formalmente però, si può ancora scrivere istante per istante $\mathbf{E} = \mathbf{E}_y + \mathbf{E}_z$ e quindi $I = I_y + I_z$, secondo quanto visto in (11.8); con l'avvertenza che $\cos^2\theta$ e $\operatorname{sen}^2\theta$ variano nel tempo casualmente assumendo tutti i valori compresi tra zero e uno, con valor medio 1/2. Ciò vuol dire che

$$I_y = I_z = \frac{1}{2} I \quad : \tag{11.10}$$

un'*onda non polarizzata*, di intensità I, si può rappresentare come *sovrapposizione di due onde incoerenti polarizzate linearmente* in due piani ortogonali, ciascuna di intensità $I/2$. Col termine incoerenti si indica che non c'è una definita relazione di fase tra le onde componenti. nota l'ampiezza di una in un certo istante, nulla si può dedurre per l'ampiezza dell'altra. Ritorneremo su questo punto alla fine del problema 11.14.

11c. Nell'attraversare un mezzo materiale un'onda subisce un processo di assorbimento· ad uno spessore ds corrisponde una diminuzione di intensità $dI = -\alpha I ds$ (1), proporzionale allo spessore e all'intensità incidente secondo la costante α, dipendente dal mezzo e dalla lunghezza d'onda della radiazione. Integrando su uno spessore finito s si ottiene l'intensità che viene trasmessa dal materiale:

$$I = I_0 e^{-\alpha s} = I_0 e^{-s/\mu} \quad ; \tag{11.11}$$

I_0 è l'intensità primaria incidente. Tale legge è indipendente dallo stato di polarizzazione dell'onda.

La costante α prende il nome di *coefficiente di assorbimento* (o potere assorbente) mentre $\mu = 1/\alpha$ è detto *cammino libero medio per assorbimento* Attraversando lo spessore μ l'intensità dell'onda viene ridotta di un fattore $1/e = 0.368$.

11d. Nel seguito ci occuperemo esclusivamente della radiazione elettromagnetica visibile. Un fascio di raggi paralleli di luce ordinaria costituisce un esempio di onda piana non polarizzata. Tra i vari sistemi per ottenere da questa un'onda polarizzata esaminiamo per primo il metodo della *polarizzazione per riflessione*, limitandoci a mezzi trasparenti con $\varkappa_m = 1$, le cui proprietà ottiche sono esprimibili in funzione dell'indice di rifrazione $n = c/v = (\varkappa_e)^{1/2}$, rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e nel mezzo (2). Rimandiamo ad ogni modo alle figure successive e al problema 10.9 per la definizione dei simboli e delle terminologie usate in questo paragrafo; ripetiamo solo che la relazione tra angolo di incidenza e angolo di trasmissione è dato dalla legge di Snell

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} i'} = \frac{n_2}{n_1} \quad . \tag{11.12}$$

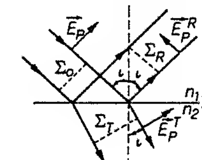
(1) Per la trattazione di questo punto si veda il problema 16.12

(2) Si veda la nota alla fine del capitolo per una discussione sulla relazione tra indice di rifrazione e costante dielettrica relativa

Cominciamo col considerare un'onda piana polarizzata nel piano Π definito dalla direzione di incidenza e dalla normale alla superficie di separazione, chiamato *piano di incidenza* (vedi figura). Sottosegnamo con un indice p le grandezze relative a questo caso (polarizzazione *parallela* a Π). Sia l'onda riflessa che quella trasmessa sono polarizzate nel piano Π (problema 10.9) e le ampiezze delle onde incidente, riflessa e trasmessa sono legate dalle relazioni

$$E_p^R = \frac{\operatorname{tg}(i - i')}{\operatorname{tg}(i + i')} E_p = r_p E_p \quad , \tag{11.13}$$

$$E_p^T = \frac{2 \operatorname{sen} i' \cos i}{\operatorname{sen}(i + i') \cos(i - i')} E_p = t_p E_p \quad . \tag{11.14}$$



Ai vettori rappresentativi dei campi elettrici si attribuiscono come versi positivi quelli mostrati in figura. Ricordando la definizione di intensità, la (11.5) con $\varkappa_m = 1$ e detta I_p l'intensità dell'onda incidente, abbiamo per l'intensità dell'onda riflessa

$$I_p^R = c\varepsilon_0 n_1 \frac{1}{T} \int_0^T (E_p^R)^2 dt = c\varepsilon_0 n_1 r_p^2 \frac{1}{T} \int_0^T (E_p)^2 dt = r_p^2 I_p \quad .$$

Dette $W_p = I_p \Sigma_0$ la potenza dell'onda incidente e $W_p^R = I_p^R \Sigma_R$ la potenza dell'onda riflessa, la percentuale di energia riflessa è

$$R_p = \frac{W_p^R}{W_p} = \frac{I_p^R \Sigma_R}{I_p \Sigma_0} = \frac{I_p^R}{I_p} = r_p^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(i - i')}{\operatorname{tg}^2(i + i')} \quad ; \tag{11.15}$$

dalla figura si vede infatti che $\Sigma_R = \Sigma_0$: nella riflessione non cambia la sezione del fascio. Per l'onda trasmessa

$$I_p^T = c\varepsilon_0 n_2 \frac{1}{T} \int_0^T (E_p^T)^2 = c\varepsilon_0 n_2 t_p^2 \frac{1}{T} \int_0^T (E_p)^2 dt = \frac{n_2}{n_1} t_p^2 I_p \quad ;$$

passando alla potenza, la percentuale di energia trasmessa è

$$T_p = \frac{W_p^T}{W_p} = \frac{I_p^T \Sigma_T}{I_p \Sigma_0} = \frac{n_2 \cos i'}{n_1 \cos i} t_p^2 = \frac{\operatorname{sen} 2i \operatorname{sen} 2i'}{\operatorname{sen}^2(i + i') \cos^2(i - i')} \quad ; \tag{11.16}$$

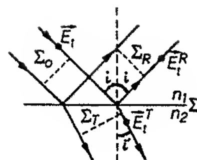
infatti la sezione del fascio trasmesso è legata a quella del fascio incidente dalla relazione $\Sigma_0 / \cos i = \Sigma_T / \cos i'$. In accordo col principio di conservazione dell'energia si verifica che

$$R_p + T_p = 1 \quad \Rightarrow \quad r_p^2 + \frac{n_2 \cos i'}{n_1 \cos i} t_p^2 = 1 \quad .$$

Se invece l'onda incidente è polarizzata in un piano σ normale a Π (indice t per significare polarizzazione *trasversale* rispetto al piano di incidenza), come è mostrato nella figura dove con un punto è indicato un vettore normale al disegno e uscente, allora sia l'onda riflessa che quella trasmessa sono polarizzate ortogonalmente a Π e le ampiezze sono legate dalle relazioni

$$E_t^R = -\frac{\operatorname{sen}(i-i')}{\operatorname{sen}(i+i')}\,E_t = r_t E_t \quad , \qquad (11.17)$$

$$E_t^T = \frac{2\operatorname{sen}i'\cos i}{\operatorname{sen}(i+i')}\,E_t = t_t E_t \quad , \qquad (11.18)$$



che si ricavano in modo analogo a quanto visto nel problema 10.9. Procedendo come nel caso precedente, si ha per le percentuali di energia riflessa e trasmessa

$$R_t = \frac{W_t^R}{W_t} = \frac{I_t^R}{I_t} = r_t^2 = \frac{\operatorname{sen}^2(i-i')}{\operatorname{sen}^2(i+i')} \quad , \qquad (11.19)$$

$$T_t = \frac{W_t^T}{W_t} = \frac{I_t^T\Sigma_T}{I_t\Sigma_0} = \frac{n_2\cos i'}{n_2\cos i}\; t_t^2 = \frac{\operatorname{sen}2i\operatorname{sen}2i'}{\operatorname{sen}^2(i+i')} \quad . \qquad (11.20)$$

Anche ora si verifica

$$R_t + T_t = 1 \quad \Rightarrow \quad r_t^2 + \frac{n_2\cos i'}{n_1\cos i}\, t_t^2 = 1 \quad .$$

Infine, se l'onda incidente è polarizzata in un piano che forma un angolo θ con Π diverso da zero e da $\pi/2$, l'onda riflessa e l'onda trasmessa sono ancora polarizzate, ma i loro piani di polarizzazione formano con Π angoli diversi da θ Vedremo questo fatto nel problema 11.3 dove calcoleremo, in funzione di θ e dell'angolo di incidenza, questa *rotazione del piano di polarizzazione* e le percentuali di energia riflessa e trasmessa.

Nel caso di un'onda piana non polarizzata di intensità I sappiamo, per quanto mostrato nel paragrafo 11b., che si può rappresentarla come sovrapposizione di due onde incoerenti polarizzate in piani ortogonali con intensità $I_p = I_t = I/2$. Quindi

$$\left.\begin{aligned} I_p^R &= R_p I_p = \frac{1}{2}\,R_p I \\ I_t^R &= R_t I_t = \frac{1}{2}\,R_t I \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad I^R = I_p^R + I_t^R = \frac{1}{2}\,(R_p + R_t)\,I \quad ,$$

$$R = \frac{I^R}{I} = \frac{1}{2}\,(R_p + R_t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{tg}^2(i-i')}{\operatorname{tg}^2(i+i')} + \frac{\operatorname{sen}^2(i-i')}{\operatorname{sen}^2(i+i')}\right]. \qquad (11.21)$$

R dà la percentuale di energia riflessa; in modo analogo si calcola la percentuale di energia trasmessa $T = 1/2\ (T_p + T_t)$, oppure si ricorre a $T = 1 - R$. Le grandezze R e T si chiamano, rispettivamente, *coefficiente di riflessione* e *coefficiente di trasmissione*.

Da (11.15) si vede che $R_p = 0$ se $i + i' = \pi/2$: in queste condizioni, **E** giace nel piano Π, non si ha riflessione (problema 10.10). Per un fascio di luce non polarizzata, che incide su Σ con un angolo i_B soddisfacente alla $i_B + i_B' = \pi/2$, si può concludere che viene riflessa solo una certa percentuale, con il vettore **E** che giace in un piano ortogonale a Π: pertanto *il fascio riflesso è polarizzato rettilineamente.* Si dimostra (vedi ancora il problema 10.10) che

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} = n; \qquad (11.22)$$

i_B è detto *angolo di Brewster*. Dal confronto tra (11.15) e (11.19) si vede che è sempre $R_t \geq R_p$; quindi si ha nel fascio riflesso $I_t^R \geq I_p^R$. Si dice allora che la luce riflessa è *parzialmente polarizzata* e si definisce come *grado di polarizzazione* la quantità

$$P_R = \frac{I_t^R - I_p^R}{I_t^R + I_p^R} = \frac{R_t - R_p}{R_t + R_p} \quad . \qquad (11.23)$$

Si tratta di un caso particolare della definizione generale di grado di polarizzazione di un fascio

$$P = \frac{I_t - I_p}{I_t + I_p} = \frac{W_t - W_p}{W_t + W_p} \quad ; \qquad (11\ 24)$$

esso può assumere i valori compresi tra zero ($I_p = I_t$), fascio non polarizzato, e uno (p.e. $I_p = 0$), fascio totalmente polarizzato.

Quando l'angolo di incidenza assume valori vicini a zero (incidenza normale), si possono confondere il coseno con l'unità e il seno e la tangente con l'angolo. Dalla relazione (a) del problema 10.10 abbiamo

$$E^R = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\,E \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad , \qquad (11.25)$$

$$E^T = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}\,E \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \quad . \qquad (11.26)$$

In tal caso infatti perde significato la definizione di piano di incidenza e quindi la distinzione tra E_p e E_t. Si ha così un unico coefficiente di riflessione e di trasmissione:

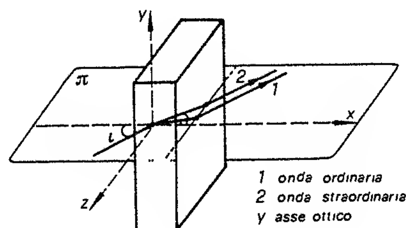
$$R = \frac{I^R}{I} = r^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 \quad , \qquad (11.27)$$

$$T = \frac{I^T}{I} = \frac{n_2}{n_1}\,t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \quad . \qquad (11.28)$$

Nel caso della trasmissione il rapporto delle intensità è eguale al rapporto delle potenze perché $\Sigma_T = \Sigma_0$ in incidenza normale.

11e. Ricordiamo alcuni dei risultati più importanti relativi a un'onda piana elettromagnetica che incide su una *lamina di cristallo uniassico*, dotato cioè di un solo asse ottico; la maggior parte dei cristalli adoperati per gli strumenti ottici sono di questo tipo (quarzo, calcite, tormalina, spato).

Consideriamo una lamina di cristallo uniassico con le superficie di taglio parallele all'asse ottico; il piano di incidenza Π, individuato dalla direzione dell'onda incidente e dalla perpendicolare x alla lamina, sia normale all'asse ottico e l'angolo di incidenza sia ι (vedi figura). Nella rifrazione hanno origine due onde trasmesse (donde il nome di lamine birifrangenti) con le seguenti caratteristiche:



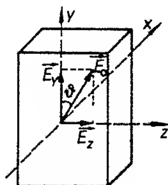
a) hanno la direzione di propagazione contenuta nel piano di incidenza;

b) sono polarizzate una nel piano Π (onda ordinaria) e l'altra in un piano passante per la direzione di propagazione e per l'asse ottico (onda straordinaria); i due piani di polarizzazione sono quindi ortogonali;

c) si propagano nel cristallo con velocità diversa ovvero vedono il cristallo con due indici di rifrazione diversi, n_o per l'ordinaria, n_s per la straordinaria ([1]); di conseguenza, valendo per entrambe la (11.12), le due onde si propagano dentro la lamina in direzioni diverse per poi proseguire parallelamente quando escono da essa;

d) la potenza delle due onde trasmesse è la stessa ed è metà della potenza dell'onda incidente se quest'ultima è un'onda piana non polarizzata.

Quando l'onda piana incidente è del tipo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\omega(t - x/v)$, si propaga lungo l'asse x ($\iota = 0$) ed è polarizzata rettilineamente in un piano che forma un angolo θ con l'asse ottico della lamina (asse y), all'entrata della lamina abbiamo (paragrafo 11b.) due onde piane



$$\mathbf{E}_y = E_0 \cos\theta \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{E}_z = E_0 \operatorname{sen}\theta \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

che nella lamina si propagano sovrapposte lungo l'asse x. A causa della diversa velocità di propagazione si introduce uno *sfasamento tra l'onda ordinaria* $\mathbf{E}_z$ *e l'onda straordinaria* $\mathbf{E}_y$ *legato allo spessore* s *attraversato:*

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_s)s \quad , \qquad (11.29)$$

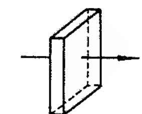
([1]) Se $n_s < n_o$ il cristallo si dice negativo, se è vero il contrario si dice positivo

con λ lunghezza d'onda della luce incidente. All'uscita della lamina la risultante delle due onde sfasate

$$\mathbf{E}_y = E_0 \cos\theta \cos\left(\omega t - \omega\,\frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{E}_z = E_0 \operatorname{sen}\theta \cos\left(\omega t - \omega\,\frac{x}{v} + \phi\right)\mathbf{u}_z \quad ,$$

è un'onda piana polarizzata ellitticamente (paragrafo 11a.) Tali *lamine*, dette *di ritardo*, servono quindi a produrre fasci di luce polarizzata ellitticamente.

Passiamo adesso al caso di una lamina con superficie di taglio normali all'asse ottico; in figura l'asse x dà la direzione di propagazione dell'onda incidente e dell'asse ottico. In questa situazione non avviene doppia rifrazione: l'onda piana attraversa senza scindersi la lamina e non subisce deviazioni.



Infine, se la lamina è tagliata con le superficie che formano un angolo arbitrario con l'asse ottico, avvengono gli stessi tipi di fenomeni descritti nel primo caso trattato Riassumere il comportamento della lamina non è però semplice e non tratteremo mai tale caso nei problemi che seguono.

Ritornando al primo caso, che è quello più importante, notiamo che alcuni cristalli, come la tormalina, hanno la proprietà di assorbire maggiormente una delle due onde polarizzate che si propagano dentro la lamina; il fenomeno si dice *dicroismo*. Se si dispone di un opportuno spessore si ha l'estinzione completa di una delle due componenti, mentre l'altra è parzialmente trasmessa; si ha così in uscita un fascio di luce polarizzato rettilineamente.

11f. Quando un'onda polarizzata rettilineamente attraversa certe sostanze, dette *otticamente attive*, il piano di polarizzazione ruota di un angolo α, determinato dallo spessore h attraversato secondo la legge

$$\alpha = Kh \quad , \qquad (11.30)$$

dove K è una costante caratteristica del materiale, detta *potere rotatorio specifico*. In particolare per le soluzioni vale la legge di Biot

$$\alpha = kch \quad ; \qquad (11.31)$$

per esse cioè $K = kc$, con c concentrazione del soluto; anche a k viene dato il nome di *potere rotatorio specifico*. Il potere rotatorio dipende in generale dalla temperatura e dalla frequenza d'onda della luce incidente.

L'analisi del fenomeno è ricondotta ad una sorta di birifrangenza circolare, nel senso che una luce polarizzata rettilineamente può pensarsi scomposta in due componenti, ciascuna polarizzata circolarmente, una destrogira e una levogira, le quali si propagano in una sostanza otticamente attiva con velocità diverse. Per la trattazione matematica rimandiamo al problema 11.20.

Un fenomeno analogo avviene quando un'onda polarizzata rettilineamente si propaga in una sostanza a cui è applicato un campo magnetico (e che, in assenza di campo, non è otticamente attiva); il fenomeno è detto *effetto Faraday* e vale per esso la legge di Verdet:

$$\alpha = VBh\cos\theta_B \quad , \tag{11.32}$$

con V costante caratteristica della sostanza e θ_B angolo tra direzione di propagazione e **B**. Mentre nell'attività ottica normale il verso della rotazione dipende dal verso di propagazione, nell'effetto Faraday ne è indipendente.

11g. Ricordiamo che l'intensità si misura in W/m^2 e che l'indice di rifrazione e i coefficienti di riflessione e di trasmissione sono adimensionali. Il potere rotatorio specifico si misura in gradi/m e la costante di Verdet in gradi/Tm.

La lunghezza d'onda λ si misura in metri; sono però usati comunemente i sottomultipli micrometro o micron ($\mu m = 10^{-6}$ m) e nanometro ($nm = 10^{-9}$ m). Lo spettro delle lunghezze d'onda della luce visibile nel vuoto è:

$$\begin{array}{l} 0.4\ \mu m \leq \lambda \leq 0.7\ \mu m \\ 400\ nm \leq \lambda \leq 700\ nm \end{array} \Rightarrow \quad 0.75 \cdot 10^{15}\ Hz \geq \nu \geq 0.43 \cdot 10^{15}\ Hz \quad .$$

Nelle diseguaglianze il primo numero corrisponde al violetto, il secondo al rosso.

Riassumiamo infine brevemente le varie maniere usate per scrivere l'argomento di una funzione sinusoidale che si propaga lungo l'asse x con pulsazione ω e velocità v:

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi(\nu t - Nx) = \omega t - kx \quad ,$$

$T = 2\pi/\omega$ è il periodo, $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ la frequenza, $\lambda = vT = v/\nu = 2\pi v/\omega$ la lunghezza d'onda, $N = 1/\lambda$ il numero d'onde (comprese nell'intervallo unitario di lunghezza), $k = 2\pi N = 2\pi/\lambda = \omega/v$ il modulo del vettore di propagazione **k**, che dà la direzione e il verso di propagazione.

* * *

11.1. ***Un fascio di luce naturale incide con un angolo di 60° sulla superficie piana di un blocco di vetro. L'esame della luce riflessa mostra che essa è polarizzata rettilineamente. Determinare l'indice di rifrazione n del vetro, la percentuale della luce incidente che viene riflessa, specificandone il piano di polarizzazione, il grado di polarizzazione della luce trasmessa.***

Se l'onda riflessa è totalmente polarizzata vuol dire che l'angolo di incidenza è quello di Brewster (11.22) per il vetro che costituisce il blocco; quindi, assumendo che il mezzo uno sia aria, $n = \text{tg}60° = 1.73$. Poiché in queste condizioni l'angolo di incidenza e l'angolo di trasmissione sono complementari, quest'ultimo vale 30°. La percentuale di luce che viene riflessa è data da (11.21) con $R_p = 0$:

$$R = \frac{W^R}{W_0} = \frac{W_t^R}{W_0} = \frac{1}{2}R_t = \frac{1}{2}\,\text{sen}^2(60° - 30°) = 0.125 \quad .$$

Soltanto il 12.5% della luce viene riflesso; il campo elettrico dell'onda piana riflessa vibra in un piano normale al piano di incidenza.

Visto che il 12.5% dell'energia è riflesso, il restante 87.5% deve essere trasmesso. Ricorrendo alla scomposizione dell'onda piana incidente in due onde incoerenti polarizzate nel piano di incidenza e in un piano a questo ortogonale, la potenza incidente è $W_0 = W_p + W_t$ con $W_p = W_t = 0.5\ W_0$, secondo il paragrafo 11.d. Ma W_p non può che essere tutta trasmessa e quindi $W_p^T = 0.5\ W_0$; invece $W_t^T = W_t - W_t^R = 0.5\ W_0 - 0.125\ W_0 = 0.375\ W_0$. Ne risulta, in base a (11.24), un grado di polarizzazione della luce trasmessa

$$P_T = \frac{W_p^T - W_t^T}{W_p^T + W_t^T} = \frac{0.500 - 0.375}{0.500 + 0.375} = 0.143 \quad .$$

11.2. ***Un fascio di luce naturale, di intensità $I_0 = 1$ W/cm^2 e sezione $\Sigma_0 = 1$ cm^2, incide con un angolo di 70° sulla superficie di una lastra di vetro con indice di rifrazione $n = 1.5$. Determinare l'intensità e la potenza dei fasci di luce riflesso e trasmesso e il loro grado di polarizzazione.***

L'angolo di Brewster (11.22) della lastra è determinato da $\text{tg}\,\iota_B = n = 1.5$, cioè $\iota_B = 56.31°$; l'angolo di incidenza è diverso da ι_B e quindi l'onda riflessa non è totalmente polarizzata. L'angolo di trasmissione si calcola da (11.12):

$$\text{sen}\,\iota' = \frac{\text{sen}\,70°}{1.5} \quad \Rightarrow \quad \iota' = 38.79° \quad .$$

Della luce incidente viene riflessa, secondo (11.21), una percentuale

$$\frac{I_p^R}{I_0} = \frac{1}{2}R_p = \frac{1}{2}\,\frac{\text{tg}^2(70° - 38.79°)}{\text{tg}^2(70° + 38.79°)} = 0.021$$

con il vettore elettrico contenuto nel piano di incidenza Π e una percentuale

$$\frac{I_t^R}{I_0} = \frac{1}{2}R_t = \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}^2(70° - 38.79°)}{\text{sen}^2(70° + 38.79°)} = 0.150$$

con il vettore elettrico contenuto in un piano normale a Π. In totale

$$R = \frac{1}{2}(R_p + R_t) = 0.171 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} I^R = RI_0 = 0.171\ \dfrac{W}{cm^2} \quad , \\ W^R = I^R\Sigma_0 = 0.171\ W \quad . \end{array}$$

Il grado di polarizzazione del fascio riflesso è

$$P_R = \frac{I_t^R - I_p^R}{I_t^R + I_p^R} = 0.754 \quad .$$

L'onda trasmessa, di potenza $W^T = W_0 - W^R = 0.829$ W, è costituita dalla solita sovrapposizione di due onde incoerenti, di potenza W_p^T e W_t^T:

$$W_p^T = W_p - W_p^R = \frac{1}{2}(1 - R_p)\ W_0 = 0.479 \text{ W} \quad ,$$

$$W_t^T = W_t - W_t^R = \frac{1}{2}(1 - R_t)\ W_0 = 0.350 \text{ W} \quad ,$$

essendo $W_p = W_t = W_0/2$. L'intensità dell'onda trasmessa è

$$I^T = \frac{W^T}{\Sigma_T} = \frac{\cos\imath}{\cos\imath'}\ \frac{W^T}{\Sigma_0} = 0.364\ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \quad ,$$

suddivisa nelle parti $I_p^T = W_p^T/\Sigma_T = 0.210$ W/cm^2 e $I_t^T = W_t^T/\Sigma_T = 0.154$ W/cm^2. L'onda trasmessa ha un grado di polarizzazione

$$P_T = \frac{I_p^T - I_t^T}{I_p^T + I_t^T} = 0.156 \quad .$$

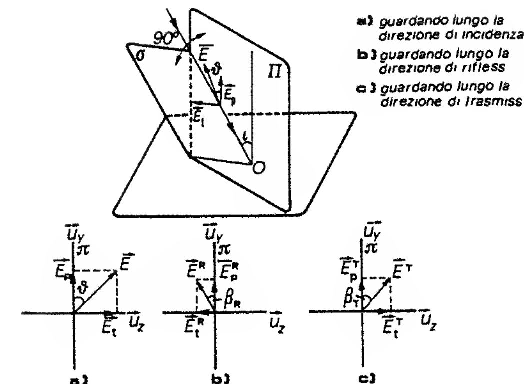
I risultati visti qui e nel problema 11.1 portano alla seguente osservazione, che ha carattere generale: disponendo di un fascio di luce di data intensità, se lo si fa incidere su una superficie piana di un materiale trasparente si ottengono due fasci: uno riflesso, di bassa intensità, ma con alto grado di polarizzazione (fino a uno quando l'angolo di incidenza è quello di Brewster), e uno trasmesso, di alta intensità, ma con basso grado di polarizzazione.

11.3. ***Un fascio di luce di potenza W_0 e sezione Σ_0, polarizzata in un piano che forma un angolo θ con il piano di incidenza, incide con angolo i sulla superficie di un mezzo trasparente con indice di rifrazione n. Dimostrare che i fasci riflesso e trasmesso sono polarizzati rettilineamente in piani che sono in generale ruotati rispetto al piano di polarizzazione della luce incidente di un angolo che dipende da θ e da i; dare inoltre la legge con cui variano le potenze e le intensità dei fasci suddetti al variare di θ e i. Si eseguano i calcoli per $W_0 = 8$ W, $\Sigma_0 = 1$ cm^2, $i = i_B = 56.31°$, $\theta = 45°$.***

A norma di quanto visto nel paragrafo 11b, l'onda piana polarizzata di ampiezza E_0 e intensità I_0 si può scomporre in due onde piane: la prima, con $\mathbf{E}$ contenuto in Π, ha ampiezza $E_p = E_0\cos\theta$ e intensità $I_p = I_0\cos^2\theta$, la seconda, con E contenuto in un piano σ ortogonale a Π, ha ampiezza $E_t = E_0\operatorname{sen}\theta$ e intensità $I_t = I_0\operatorname{sen}^2\theta$ (vedi figura).

Da (11.13-11.17) si ricava per il campo riflesso

$$\mathbf{E}^R = \mathbf{E}_p^R + \mathbf{E}_t^R = \frac{\operatorname{tg}(\imath - \imath')}{\operatorname{tg}(\imath + \imath')}\ E_0\cos\theta\mathbf{u}_y - \frac{\operatorname{sen}(\imath - \imath')}{\operatorname{sen}(\imath + i')}\ E_0\operatorname{sen}\theta\mathbf{u}_z \quad , \qquad \text{(a)}$$



mentre da (11.14-11.18) si ha per il campo trasmesso

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E}_p^T + \mathbf{E}_t^T =$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\imath'\cos\imath}{\operatorname{sen}(\imath + i')\ \cos(\imath - \imath')}\ E_0\cos\theta\mathbf{u}_y + \frac{2\operatorname{sen}i'\ \cos\imath}{\operatorname{sen}(\imath + \imath')}\ E_0\operatorname{sen}\theta\mathbf{u}_z \quad . \qquad \text{(b)}$$

Le (a) e (b) mostrano che le onde riflessa e trasmessa sono polarizzate ciascuna in un piano che forma con Π un angolo (β_R e β_T rispettivamente) diverso da θ. Infatti, rappresentando l'onda riflessa come

$$\mathbf{E}^R = \mathbf{E}_p^R + \mathbf{E}_t^R = E^R\ \cos\beta_R\ \mathbf{u}_y + E^R\ \operatorname{sen}\beta_R\ \mathbf{u}_z \quad ,$$

dal confronto di questa con (a) si ottiene

$$\operatorname{tg}\beta_R = \frac{E_t^R}{E_p^R} = -\operatorname{tg}\theta\ \frac{\cos(i - i')}{\cos(i + \imath')} \qquad \text{(c)}$$

Procedendo in maniera analoga per l'onda trasmessa si ha

$$\operatorname{tg}\beta_T = \frac{E_t^T}{E_p^T} = \operatorname{tg}\theta\cos(\imath - i') \quad . \qquad \text{(d)}$$

Per le percentuali di energia riflessa scriviamo:

$$R_p = \frac{I_p^R}{I_p} = \frac{I_p^R}{I_0\cos^2\theta} \quad , \quad R_t = \frac{I_t^R}{I_t} = \frac{I_t^R}{I_0\operatorname{sen}^2\theta} \quad ,$$

$$R = \frac{I^R}{I_0} = \frac{I_p^R + I_t^R}{I_0} = R_p\cos^2\theta + R_t\operatorname{sen}^2\theta =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2(\imath - i')}{\operatorname{tg}^2(\imath + \imath')}\ \cos^2\theta + \frac{\operatorname{sen}^2(\imath - \imath')}{\operatorname{sen}^2(i + \imath')}\ \operatorname{sen}^2\theta \quad .$$

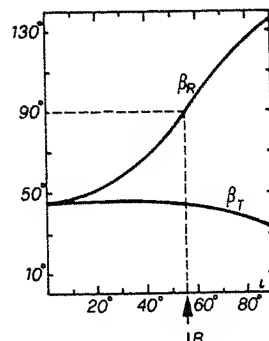
Noti R, W_0, Σ_0 si calcolano subito $W^R = RW_0$ e $I^R = RW_0/\Sigma_0$. Nel fascio trasmesso $W^T = W_0 - W^R$, $T = W^T/W_0 = 1 - R$ e

$$I^T = \frac{W_T}{\Sigma_T} = \frac{\cos i}{\cos i'} \frac{(1-R)W_0}{\Sigma_0} = \frac{\cos i}{\cos i'}(1-R)\, I_0 \quad .$$

Nella figura è rappresentato l'andamento di β_R e β_T in funzione di i per $\theta = 45°$ e $n = 1.5$. In particolare, quando i coincide con l'angolo di Brewster, $i + i' = 90°$ e, per la (c), $\beta_R = 90°$: l'onda riflessa è polarizzata normalmente a Π. Questo è il nostro caso e $i' = 33.69°$. Il coefficiente di riflessione si riduce a

$$R = \text{sen}^2(i - i')\ \text{sen}^2\theta = 7.4 \cdot 10^{-2} \quad :$$

dell'onda incidente viene riflesso il 7.4%, cioè $W^R = 0.59\,\text{W}$, $I^R = 0.59\,\text{W/cm}^2$; il rimanente 92.6% viene trasmesso, cioè $W^T = 7.41\,\text{W}$ e $I^T = W^T/\Sigma_T = 4.94\ \text{W/cm}^2$. Infine $\beta_T = 42.71°$, come si ricava dalla (d).



11.4. ***Un fascio di luce polarizzata circolarmente, di intensità $I_0 = 10$ W/cm^2 e sezione $\Sigma_0 = 0.5$ cm^2, incide con un angolo i sulla superficie di un mezzo trasparente avente indice di rifrazione $n = 1.5$. Determinare come variano con i lo stato di polarizzazione e l'intensità dei fasci riflesso e trasmesso. Studiare in particolare il caso in cui i coincide con l'angolo di Brewster***

Sappiamo dal paragrafo 11a che l'onda incidente può essere rappresentata come sovrapposizione delle onde piane

$$\mathbf{E}_p = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{E}_t = E_0 \text{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_z \quad ,$$

la prima polarizzata nel piano di incidenza Π, la seconda in un piano σ ortogonale a Π. Facendo uso delle (11.13-11.17) per l'onda riflessa e delle (11.14-11.18) per l'onda trasmessa scriviamo

$$\mathbf{E}_p^R = \frac{\text{tg}(i - i')}{\text{tg}(i + i')} E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{E}_t^R = -\frac{\text{sen}(i - i')}{\text{sen}(i + i')} E_0 \text{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\mathbf{E}_p^T = \frac{2\,\text{sen}\,i' \cos i}{\text{sen}(i + i')\cos(i - i')} E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{E}_t^T = \frac{2\,\text{sen}\,i' \cos i}{\text{sen}(i + i')} E_0 \text{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_z \quad .$$

In queste formule x rappresenta una coordinata misurata lungo la direzione di incidenza, di riflessione e di trasmissione (non abbiamo usato simboli diversi per non appesantire la notazione) e $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ sono i versori dei corrispondenti assi mutuamente ortogonali che formano un sistema cartesiano con $\mathbf{u}_x$.

Ricordando la (11.1) vediamo che le onde piane riflessa e trasmessa sono polarizzate ellitticamente; il rapporto tra gli assi dell'ellisse descritta dall'estremo del vettore $\mathbf{E}^R$ e quello relativo a $\mathbf{E}^T$ valgono

$$\varepsilon_R = \left|\frac{E_t^R}{E_p^R}\right| = \left|\frac{\text{sen}(i - i')}{\text{sen}(i + i')} \cdot \frac{\text{tg}(i + i')}{\text{tg}(i - i')}\right| = \left|\frac{\cos(i - i')}{\cos(i + i')}\right| \quad ,$$

$$\varepsilon_T = \left|\frac{E_t^T}{E_p^T}\right| = \left|\frac{2\,\text{sen}\,i' \cos i}{\text{sen}(i + i')} \cdot \frac{\text{sen}(i + i')\cos(i - i')}{2\,\text{sen}\,i' \cos i}\right| = \left|\cos(i - i')\right| \quad .$$

Con incidenza normale ($i = i' = 0$) $\varepsilon_R = \varepsilon_T = 1$: entrambe le onde sono polarizzate circolarmente; quando $i = \pi/2$ non c'è onda trasmessa e l'onda riflessa, eguale a quella incidente, è ovviamente circolare, per $i = i_B$ $i + i' = \pi/2$, $\varepsilon_R = \infty$: all'angolo di Brewster l'onda riflessa è polarizzata rettilineamente in un piano ortogonale a Π, come del resto abbiamo visto più volte (E_p^R va a zero, E_t^R resta finito). In tutti gli altri casi $\varepsilon_R > 1$ e l'onda riflessa è polarizzata ellitticamente. Per l'onda trasmessa non ci sono tante possibilità; a parte il caso dell'incidenza normale, ε_T è sempre minore di uno, ma non si annulla mai e quindi c'è sempre polarizzazione ellittica.

Il coefficiente di riflessione è dato da (11.21), per $i = i_B$ $R = 0.5\ \text{sen}^2(i - i')$ con $i = 56.31°$ e $i' = 33.69°$, cioè $R = 7.4 \cdot 10^{-2}$. Pertanto $I^R = RI_0 = 0.74\ \text{W/cm}^2$ e $W^R = I^R\Sigma_0 = 0.37\ \text{W}$. La potenza incidente vale $I_0\Sigma_0 = 5$ W e quella trasmessa risulta $W^T = W_0 - W^R = 4.63$ W, di qui

$$I^T = \frac{W^T}{\Sigma_T} = \frac{W^T}{\Sigma_0}\frac{\cos i'}{\cos i} = 6.17\ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \quad .$$

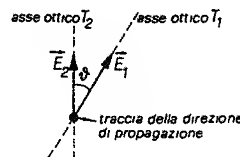
Il rapporto tra gli assi dell'ellisse nell'onda trasmessa è $\varepsilon_T = 0.923$.

11.5. ***Un fascio di luce naturale di intensità I_0 incide normalmente su un sistema di due lamine di tormalina T_1 e T_2, tagliate con le superficie parallele all'asse ottico e poste addossate. Descrivere lo stato di polarizzazione del fascio trasmesso da questo sistema e la sua intensità al variare dell'angolo θ tra gli assi ottici di T_1 e T_2.***

Come abbiamo visto più volte l'onda piana non polarizzata può essere pensata come sovrapposizione incoerente di un'onda piana di intensità $I_1 = I_0/2$, con il vettore $\mathbf{E}$ che vibra nel piano Π determinato dall'asse ottico di T_1 e dalla direzione di propagazione, e di un'altra egualmente intensa con il vettore $\mathbf{E}$ che vibra in un piano normale a Π. La tormalina è un cristallo dicroico (paragrafo 11e.) e, se lo spessore della lamina è sufficiente, lascia

passare solo l'onda che vibra nel piano Π; pertanto, all'uscita della prima lamina abbiamo un fascio polarizzato rettilineamente di intensità I_1, supponendo di poter trascurare l'assorbimento della tormalina per la componente trasmessa.

Il fascio polarizzato incidente su T_2 si può a sua volta pensare come sovrapposizione di due onde piane polarizzate (paragrafo 11b.): una in un piano passante per l'asse ottico della seconda lamina T_2, di intensità $I_2 = I_1 \cos^2\theta$, e l'altra polarizzata in un piano normale a questo, di intensità $I_3 = I_1 \mathrm{sen}^2\theta$. T_2 lascia passare solo la prima onda e quindi, all'uscita, abbiamo un fascio polarizzato di intensità



$$I_2 = \frac{1}{2}\, I_0 \cos^2\theta \quad .$$

La luce trasmessa dal sistema ha intensità che varia da zero ($\theta = \pi/2$, tormaline incrociate) a $I_1 = I_0/2$ ($\theta = 0$, tormaline parallele). La dipendenza dell'intensità trasmessa da $\cos^2\theta$ è nota come *legge di Malus* (1809).

Cristalli dicroici di uso comune sono i *polaroidi*, che hanno il pregio di ottenere gli stessi effetti con spessori molto piccoli, dell'ordine del decimo di millimetro. Ad ogni modo comune è la caratteristica di polarizzare la luce parallelamente all'asse attico e di assorbire il 50% dell'intensità di un fascio di luce ordinaria.

11.6. ***Un fascio di luce bianca incide sulla superficie di un liquido il cui indice di rifrazione varia con la lunghezza d'onda secondo la formula empirica*** $n = A + B/\lambda^2$ ***con*** $A = 1.5137$ ***e*** $B = 4.6085 \cdot 10^3$ nm^2. ***Osservando attraverso un polaroide la luce riflessa si nota che in determinate condizioni è completamente mancante la luce di lunghezza d'onda*** $\lambda_0 = 656$ nm. ***Precisare le condizioni per cui ciò avviene.***

Affinché una certa lunghezza d'onda possa essere eliminata in seguito a riflessione e ad attraversamento del polaroide è necessario che siano verificate due condizioni:

1) per quella lunghezza d'onda la luce riflessa deve essere polarizzata rettilineamente; ciò avviene all'angolo di Brewster (11.22):

$$\mathrm{tg}\, i_B = n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} = 1.5244 \quad \Rightarrow \quad i_B = 56.74° \quad ;$$

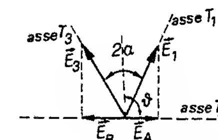
l'angolo di incidenza deve dunque valere i_B;

2) poiché in tali condizioni l'onda riflessa ha il vettore **E** che vibra in un piano normale al piano di incidenza Π, per avere estinzione l'asse del polaroide deve essere paralleleo a Π.

Sostanzialmente analogo è il principio di funzionamento degli occhiali da sole Polaroid. Per esempio, la luce riflessa da una distesa d'acqua è parzialmente polarizzata, con preponderanza della componente trasversale (cioè orizzontale) rispetto al piano di incidenza; guardandola attraverso un polaroide con l'asse ottico parallelo al piano di incidenza (cioè verticale) si ha assorbimento di questa componente.

11.7. ***Un fascio di luce naturale, di potenza*** $W_0 = 1$ W, ***incide normalmente su un sistema di due tormaline*** T_1 ***e*** T_2 ***del tipo descritto nel problema 11.5. Tra le due tormaline ne viene inserita una terza in modo tale che essa è attraversata solamente da metà del fascio trasmesso da*** T_1***; tutti e tre gli assi ottici giacciono in piani paralleli. L'angolo tra gli assi ottici di*** T_1 ***e di*** T_3 ***è*** $2\alpha = 2°$. ***Descrivere come varia la potenza del fascio trasmesso dall'intero sistema ruotando*** T_2 ***attorno all'asse x di propagazione.***

L'onda trasmessa da T_1 è polarizzata rettilineamente in un piano passante per l'asse ottico e la direzione di propagazione e ha la potenza $W_1 = 0.5$ W. Metà di questo fascio attraversa la lamina T_3; all'uscita di T_3 la luce è polarizzata parallelamente all'asse ottico di T_3 e trasporta una potenza $W_2 = 0.5\, W_1 \cos^2 2\alpha$ ovvero, essendo 2α molto piccolo, $W_2 = 0.5\, W_1$. Sulla seconda tormalina incidono quindi due fasci adiacenti che trasportano ognuno $W_2 = 0.25$ W, polarizzati in due piani che formano un angolo 2α; la situazione è mostrata in figura, con 2α ingrandito per comodità. Detto θ l'angolo formato dalla bisettrice dell'angolo di apertura 2α con la direzione dell'asse ottico di T_2, avremo all'uscita di questa due fasci adiacenti di potenza



$$W_A = W_2 \cos^2(\theta - \alpha) = 0.25 \cos^2(\theta - \alpha) \quad \mathrm{W} \quad ,$$

$$W_B = W_2 \cos^2(\pi - \theta - \alpha) = 0.25 \cos^2(\theta + \alpha) \quad \mathrm{W} \quad .$$

Non esiste alcun angolo θ per cui si riesca ad annullare contemporaneamente W_A e W_B. Quando $\theta = \pi/2$

$$\frac{W_A}{W_2} = \frac{W_B}{W_2} = \mathrm{sen}^2\alpha = 3 \cdot 10^{-4} \quad :$$

i due fasci hanno la stessa intensità e solo una piccola percentuale viene trasmessa. Se ruotiamo T_2 di un piccolo angolo $\Delta\theta$ nell'intorno di $\theta = \pi/2$ la variazione relativa di potenza dei due fasci è

$$\frac{\Delta W_A}{W_A} = \frac{1}{W_A}\left(\frac{\partial W_A}{\partial \theta}\right)_{\theta = \pi/2} \Delta\theta = -\frac{2\Delta\theta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -\frac{2\Delta\theta}{\alpha} \quad ,$$

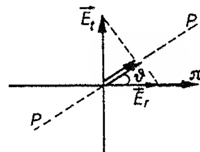
$$\frac{\Delta W_B}{W_B} = \frac{1}{W_B}\left(\frac{\partial W_B}{\partial \theta}\right)_{\pi = \pi/2} \Delta\theta = \frac{2\Delta\theta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2\Delta\theta}{\alpha} \quad .$$

Per esempio, se $\Delta\theta = 1'$ e $\alpha = 1°$, $\Delta W_A / W_A = -3.3 \cdot 10^{-2}$. $\Delta W_B / W_B = 3.3 \cdot 10^{-2}$: la potenza dei due fasci differisce del 6 6%, quantità ben rilevabile sperimentalmente anche con l'occhio.

Il sistema ora descritto si presta per determinare, con una notevole precisione, la posizione di incrocio degli assi ottici di due tormaline (T_1 e T_2 nel nostro caso); esso è usato in molti strumenti, quali i polarimetri. La posizione di eguale intensità è assunta come quella di incrocio ed è detta, per ovvi motivi, di *equipenombra*.

11.8. ***Un fascio di luce naturale di intensità 1 W/cm² incide con un angolo di 70° sulla superficie di una lastra di vetro con indice di rifrazione $n = 1.5$. Sul fascio riflesso viene posto un polaroide P. Determinare la legge con cui varia l'intensità da questo trasmessa al variare dell'angolo θ tra il suo asse ottico e il piano di incidenza.***

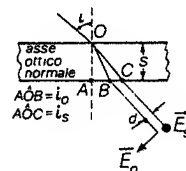
Nel problema 11.2 abbiamo ricavato che l'onda riflessa è parzialmente polarizzata, con grado di polarizzazione $P_R = 0.754$; precisamente essa è una sovrapposizione di due onde piane incoerenti polarizzate, una con **E** contenuto nel piano di incidenza Π e intensità $I_p = 0.021$ W/cm², l'altra con **E** normale a Π e intensità $I_t = 0.150$ W/cm². Quando l'asse ottico del polaroide P è parallelo a Π viene trasmessa solo I_p, mentre quando è ortogonale a Π passa solo I_t. In una posizione intermedia caratterizzata dall'angolo θ tra l'asse ottico PP del polaroide e Π, vengono trasmesse le intensità $I_p' = I_p \cos^2\theta$ e $I_t' = I_t \text{sen}^2\theta$. All'uscita del polaroide si ha un'onda polarizzata rettilineamente di intensità



$$I = I_p' + I_t' = I_p \cos^2\theta + I_t \text{sen}^2\theta = 0.021 \cos^2\theta + 0.150 \text{sen}^2\theta \quad \text{W/cm}^2 \quad .$$

11.9. ***Una lamina di calcite, spessa $s = 2$ cm, è tagliata con le due facce parallele all'asse ottico. Un fascio di luce ordinaria gialla incide sulla lamina secondo un angolo $i = 45°$, col piano di incidenza perpendicolare all'asse ottico (vedi figura). Sapendo che per tale luce gli indici di rifrazione della calcite sono $n_o = 1.6583$ e $n_s = 1.4864$, calcolare la separazione tra i due fasci all'uscita della lamina. Descrivere come varia l'intensità luminosa dei due fasci se si pone un polarizzatore sul fascio incidente e lo si ruota.***

Siamo nelle condizioni descritte nel paragrafo 11e: le onde ordinaria e straordinaria si propagano nel piano di incidenza e i rispettivi angoli di trasmissione risultano

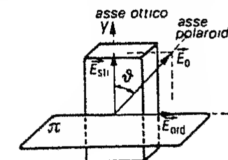


$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, i_0} = n_o \Rightarrow i_0 = 25.24°, \frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, i_s} = n_s \Rightarrow i_s = 28.41° .$$

La distanza tra le direzioni di propagazione all'uscita della lamina vale

$$d = s(\text{tg}\, i_s - \text{tg}\, i_0) \cos i = 982 \ \mu\text{m} \approx 1 \text{ mm} \quad .$$

L'onda ordinaria ha il vettore elettrico che vibra nel piano di incidenza Π mentre per quella straordinaria la vibrazione è normale a Π, cioè parallela all'asse ottico della lamina.



Se si pone un polarizzatore sul fascio incidente con l'asse nel piano Π viene trasmessa dalla lamina solo l'onda ordinaria; se invece l'asse del polarizzatore è normale a Π, ovvero parallelo all'asse ottico della lamina, viene trasmessa solo l'onda straordinaria. Infine, nel caso generale mostrato in figura, sulla lamina incide un'onda polarizzata rettilineamente di intensità I_0 pari alla metà dell'intensità iniziale; dalla lamina escono un'onda ordinaria e una straordinaria con le intensità rispettive $I_{ord} = I_0 \text{sen}^2\theta$, $I_{str} = I_0 \cos^2\theta$ (nell'ipotesi usuale di trascurare l'assorbimento della lamina).

11.10. ***Un'onda piana di luce ordinaria monocromatica ($\lambda_0 = 589$ nm) con intensità 5 W/cm² incide normalmente su un sistema ottico composto da un cristallo dicroico e da una lamina di quarzo, tagliata parallelamente al-l'asse ottico. Gli assi ottici dei due cristalli giacciono su piani paralleli e l'angolo θ tra di essi può essere variato. Gli indici di rifrazione del quarzo per la data λ_0 sono $n_o = 1.544$ e $n_s = 1.553$. Determinare lo spessore minimo s della lamina necessario per ottenere una differenza di fase $\phi = \pi/2$ tra le due onde ordinaria e straordinaria emergenti dal sistema, lo stato di polarizzazione dell'onda uscente e la sua intensità al variare di θ; trattare in particolare il caso $\theta = \pi/4$.***

Dal cristallo dicroico esce un'onda polarizzata di intensità $I = 2.5$ W/cm² che incide normalmente sulla lamina di quarzo. Da essa hanno origine un'onda ordinaria e una straordinaria che si propagano ancora lungo la direzione di incidenza e sono polarizzate una ortogonalmente e una parallelamente all'asse ottico, rispettivamente con le ampiezze

$$\mathbf{E}_{ord} = E_0 \text{sen}\,\theta \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \ , \ \mathbf{E}_{str} = E_0 \cos\theta \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \quad .$$

All'uscita della lamina tali onde sono sfasate di un angolo ϕ dato da (11.29). dovendo essere $\phi = \pi/2$ lo spessore s risulta pari a

$$s = \frac{\lambda_0}{4(n_s - n_o)} = 16.4 \ \mu\text{m} \quad ;$$

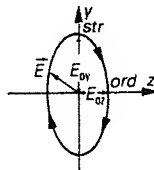
questo è lo spessore minimo per produrre l'effetto voluto; i suoi multipli interi dispari danno uno sfasamento $(2K + 1)\ \pi/2$ con $K = 1, 2, 3, \ldots$.

Quando è soddisfatta tale condizione si parla di *lamina quarto d'onda* con riferimento alla particolare lunghezza d'onda λ_0. All'uscita della lamina

$$\mathbf{E}_{ord} = E_0 \text{sen}\,\theta \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \ ,$$

$$\mathbf{E}_{str} = E_0 \cos\theta \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u}_y = -E_0 \cos\theta \,\mathrm{sen}\, \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \quad .$$

L'onda straordinaria è ritardata di $\pi/2$ rispetto all'ordinaria, più veloce entro il cristallo positivo. Come visto nei paragrafi 11a e 11e. l'onda risultante è polarizzata ellitticamente; i semiassi dell'ellisse percorsa dall'estremo del vettore $\mathbf{E}$ sono paralleli agli assi coordinati e valgono $E_{0y} = E_0 \cos\theta$, $E_{0z} = E_0 \,\mathrm{sen}\, \theta$. Secondo le convenzioni l'onda è destrorsa (l'asse x nella figura entra nel foglio).



L'intensità dell'onda ellittica è data da (11.7) che, viste le espressioni di E_{0y} e E_{0z}, coincide con (11.8): cioè, l'intensità dell'onda ellittica trasmessa è eguale all'intensità dell'onda rettilinea incidente sulla lamina, come del resto è ovvio se si possono trascurare le perdite per assorbimento In questo caso $I = 2.5\ \mathrm{W/cm^2}$.

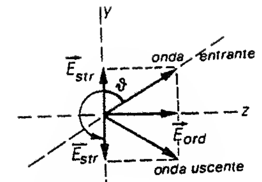
Se in particolare $\theta = \pi/2$, l'ellisse degenera in una circonferenza ($E_{0y} = E_{0z}$). Riassumendo allora i risultati, esclusi i casi banali $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ in cui è come se non ci fosse la lamina, una lamina quarto d'onda trasforma un'onda monocromatica polarizzata linearmente in una di eguale intensità polarizzata ellitticamente e, in particolare, circolarmente se il piano di polarizzazione forma un angolo di 45° con l'asse ottico della lamina. Al variare di θ da 0 a $\pi/2$ varia la forma dell'ellisse che si schiaccia lungo y e si allunga lungo z; a metà processo, per $\theta = \pi/4$, si ha una circonferenza. Da θ dipende cioè solo la forma della curva descritta dall'estremo di $\mathbf{E}$, mentre lo stato di polarizzazione dipende esclusivamente da ϕ e quindi da s

11.11. ***Per il sistema ottico del problema* 11.10 *calcolare lo spessore minimo della lamina di quarzo necessario per ottenere una differenza di fase di π tra le onde ordinaria e straordinaria. Determinare inoltre lo stato di polarizzazione dell'onda uscente e la sua intensità al variare di θ; trattare in particolare il caso $\theta = \pi/4$.***

Valgono ancora tutte le considerazioni fatte nel problema 11.10 sull'onda trasmessa dal polarizzatore e incidente sulla lamina. Lo spessore minimo per avere $\phi = \pi$ è determinato da (11.29):

$$s = \frac{\lambda_0}{2(n_s - n_o)} = 32.7\ \mu\mathrm{m} \quad .$$

Vanno altrettanto bene tutti gli spessori che sono multipli interi dispari di questo valore. Una tale lamina si chiama *mezz'onda* con riferimento alla lunghezza d'onda λ_0. Per quel che riguarda lo stato di polarizzazione, in uscita si ha



$$\mathbf{E}_{ord} = E_0 \,\mathrm{sen}\, \theta \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

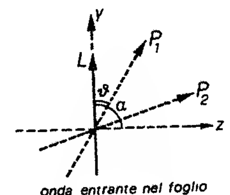
$$\mathbf{E}_{str} = E_0 \cos\theta \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \pi\right) \mathbf{u}_y = -E_0 \cos\theta \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \quad .$$

Le due vibrazioni ortogonali sono in opposizione di fase e pertanto la somma è polarizzata rettilineamente in un piano che forma un angolo $-\theta$ con l'asse ottico della lamina (asse y della figura). L'intensità dell'onda uscente è eguale a quella dell'onda entrante nella lamina, indipendentemente da θ. In conclusione una lamina mezz'onda ruota di un angolo 2θ il piano di polarizzazione di un'onda che incide su di essa, polarizzata in un piano che forma l'angolo θ con l'asse ottico della lamina. In particolare, quando $\theta = 45°$ la rotazione è di 90°.

11.12. ***Col metodo del problema* 11.10 *si ottiene da un'onda non polarizzata un'onda polarizzata ellitticamente. Se dopo la lamina viene posto un secondo polizzatore si nota che l'intensità trasmessa varia al ruotare di questo rispetto all'asse x di propagazione (tutti e tre gli assi ottici giaciono in piani paralleli). Detto θ l'angolo tra l'asse ottico del primo polizzatore e quello della lamina e α l'angolo tra l'asse ottico della lamina e quello del secondo polizzatore, determinare la legge con cui varia l'intensità trasmessa al variare di α; discutere in particolare il caso $\theta = \pi/4$.***

Ragioniamo rapidamente in base alla figura: detta I_0 l'intensità trasmessa dal primo polarizzatore P_I (che è metà di quella della luce ordinaria incidente), dalla lamina L esce ancora l'intensità I_0, suddivisa tra l'onda ordinaria $\mathbf{E}_z$ di intensità $I_{ord} = I_0 \,\mathrm{sen}^2 \theta$ e l'onda straordinaria $\mathbf{E}_y$ di intensità $I_{str} = I_0 \cos^2\theta$. In base alla legge di Malus il secondo polarizzatore P_2 trasmette $I_{ord} \cos^2(\pi/2 - \alpha) = I_{ord} \,\mathrm{sen}^2\alpha$ e $I_{str}\cos^2\alpha$, cioe in totale l'intensità trasmessa vale

$$I = I_0 \cos^2\theta \cos^2\alpha + I_0 \,\mathrm{sen}^2\theta \,\mathrm{sen}^2\alpha \quad . \tag{a}$$



Confrontando col risultato del problema 11.8 deduciamo che si ottiene la stessa legge se su P_2 arriva un'onda della stessa intensità di quella ellittica parzialmente polarizzata con grado di polarizzazione

$$P = \frac{I_0 \cos^2\theta - I_0 \,\mathrm{sen}^2\theta}{I_0 \cos^2\theta + I_0 \,\mathrm{sen}^2\theta} = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta \quad .$$

Non è quindi possibile stabilire sperimentalmente, con l'analisi della luce trasmessa da un polarizzatore, se un'onda è polarizzata parzialmente o ellitticamente.

Per $\theta = \pi/4$ sappiamo dal problema 11.10 che l'onda incidente su P_2 è polarizzata circolarmente; dalla (a), essendo $\cos^2\theta = \mathrm{sen}^2\theta = 1/2$, $I = I_0/2$, indipendentemente dal valore di α. P_2 trasforma quindi un'onda polarizzata circolarmente in una con metà intensità polarizzata rettilineamente. Abbiamo visto nel problema 11.5 che una tormalina o un polaroide trasformano un'onda non polarizzata in una polarizzata rettilineamente con metà intensità. Si conclude che con un polarizzatore non è possibile decidere se un'onda non è polarizzata oppure è polarizzata circolarmente.

11.13. ***Dall'analisi di un fascio monocromatico di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 600$ nm fatta con un polarizzatore si ricava che l'intensità da questo trasmessa varia con la legge $I = (0.4\cos^2\alpha + 0.2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha)$ W/cm^2, se si indica con α l'angolo formato dall'asse ottico del polarizzatore con una certa direzione prefissata y contenuta in un piano normale alla direzione di propagazione. Progettare un sistema ottico per determinare lo stato di polarizzazione del fascio.***

Se l'intensità trasmessa varia con quella data legge deduciamo, per quanto visto nel problema 11.12, che ci sono due alternative.

1) l'onda è polarizzata ellitticamente secondo le equazioni

$$\mathbf{E}_y = E_{0y}\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{E}_z = E_{0z}\mathrm{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_z$$

con $I_y = 0.4$ W/cm^2 e $I_z = 0.2$ W/cm^2;

2) l'onda è parzialmente polarizzata con un grado di polarizzazione

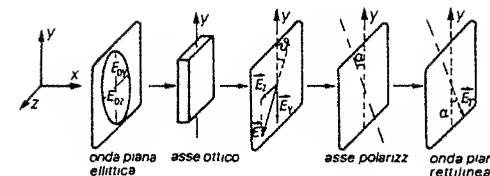
$$P = \frac{0.4 - 0.2}{0.4 + 0.2} = 0.33 \quad .$$

Per decidere tra i due casi poniamo sul fascio un sistema ottico composto da una lamina quarto d'onda per la luce in esame e da un polaroide (inseriamo cioè la lamina prima del polarizzatore di cui parla il testo) Si può usare una lamina di quarzo di spessore $s = \lambda_0/4(n_s - n_0) = 16.7$ µm oppure di spessore $(2K+1)s$ con K intero, ricordando i risultati del problema 11.10. Come asse y scegliamo la direzione lungo cui I è massima. Nell'ipotesi che l'onda piana incidente sia ellittica all'uscita della lamina quarto d'onda avremo un'onda di equazione

$$\mathbf{E}_y = E_{0y}\cos\left(\omega t - \omega\frac{x}{v} + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{u}_y = -E_{0y}\,\mathrm{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{E}_z = E_{0z}\,\mathrm{sen}\,\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_z \quad ,$$

cioè polarizzata rettilineamente in un piano che forma l'angolo θ con l'asse ottico della lamina; si ha $\mathrm{tg}\,\theta = -E_{0z}/E_{0y} = -(I_z/I_y)^{1/2} = -0.707$, $\theta = -35.26°$.



L'intensità vale $I = I_y + I_z = 0.6$ W/cm^2. Detto α l'angolo tra gli assi ottici della lamina e del polarizzatore, questo trasmette un fascio di intensità

$$I_T = I\cos^2(\theta - \alpha) = 0.6\cos^2(\theta - \alpha) \quad \mathrm{W/cm^2} \quad . \qquad \text{(a)}$$

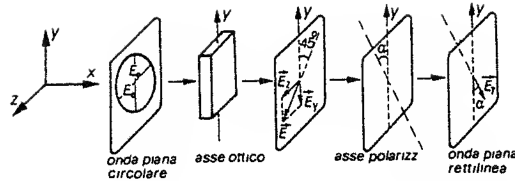
Supponendo invece che l'onda incidente sia parzialmente polarizzata, la si può pensare come sovrapposizione di due onde rettilinee incoerenti, con i campi elettrici che giacciono su due piani ortogonali, di intensità rispettive $I_y = 0.4$ W/cm^2, $I_z = 0.2$ W/cm^2. Queste passano imperturbate attraverso la lamina quarto d'onda (non essendoci una relazione di fase definita, l'aggiunta di $\pi/2$ non cambia nulla) e l'intensità trasmessa dal polarizzatore, secondo il problema 11.8, è

$$I_T = (0.4\cos^2\alpha + 0.2\,\mathrm{sen}^2\alpha) \quad \mathrm{W/cm^2} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Confrontiamo le relazioni (a) e (b): se l'onda è parzialmente polarizzata l'introduzione della lamina quarto d'onda non deve produrre alcun effetto sull'intensità trasmessa dal polarizzatore; se invece la polarizzazione è ellittica è possibile trovare due posizioni angolari, a 180° tra loro, per le quali I_T si annulla: in tali posizioni l'asse del polarizzatore è ortogonale al piano di polarizzazione dell'onda uscente dalla lamina. Se $\theta = -35.26°$, da $\theta - \alpha = 90°$ o $\theta - \alpha = 270°$ ricaviamo $\alpha = -125.26°$ o $\alpha = -305.26° = 54.74°$.

11.14. ***Interponendo un polarizzatore su un fascio parallelo di luce monocromatica ($\lambda_0 = 600$ nm) si osserva che l'intensità trasmessa non varia al ruotare del polarizzatore attorno alla direzione di propagazione. Progettare un sistema ottico per determinare lo stato di polarizzazione del fascio.***

Le possibilità sono due: o l'onda incidente non è polarizzata oppure è polarizzata circolarmente La procedura da seguire è identica a quella vista nel problema 11 13: si inserisce nel fascio una lamina quarto d'onda per la lunghezza d'onda λ_0; se scegliamo quarzo occorre uno spessore eguale a (o multiplo dispari di) $s = 16.7$ µm. Nel caso di luce non polarizzata la lamina non modifica per nulla il fascio e ruotando il polarizzatore non si nota alcuna variazione nell'intensità trasmessa Se invece la luce è polarizzata circolarmente la lamina quarto d'onda, introducendo uno sfasamento di $\pi/2$ tra l'onda ordinaria e l'onda straordinaria, cambia la polarizzazione da circolare in rettilinea, la situazione è schematizzata in figura, dove y rappresenta l'asse ottico della lamina.



Analiticamente, all'ingresso e all'uscita della lamina birifrangente possiamo scrivere

$$\mathbf{E}_y = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{E}_z = E_0 \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\mathbf{E}_y = E_0 \cos\left(\omega t - \omega\frac{x}{v} + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{u}_y = -E_0 \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{E}_z = E_0 \operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}_z \quad .$$

L'onda uscente è appunto un'onda polarizzata rettilineamente con il campo elettrico che giace in un piano a $-45°$ con l'asse y ($\operatorname{tg}\theta = E_z/E_y = -1$). Esistono quindi due posizioni, a 180° una rispetto all'altra, nelle quali il fascio viene estinto dal polarizzatore: esse sono individuate da $\alpha = 45°$ e $\alpha = 225°$, usando lo stesso simbolo del problema 11.13.

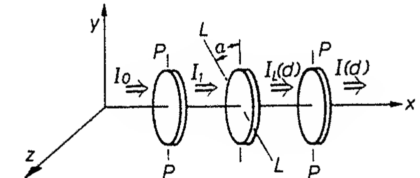
Raccogliendo i risultati visti ora e nel problema 11.13 possiamo concludere quanto segue: con un polarizzatore si può stabilire solo se un fascio è o non è polarizzato rettilineamente, interponendo una lamina quarto d'onda (per la lunghezza d'onda del fascio, supporto monocromatico), da misure solamente angolari fatte ruotando il polarizzatore si può stabilire se la luce è polarizzata circolamente (estinzione a $\pi/4$ e $\pi/4 + \pi$ rispetto all'asse ottico della lamina) oppure ellitticamente (estinzione ad un angolo θ e $\theta + \pi$). Se non si ha mai estinzione la luce è naturale o parzialmente polarizzata; per distinguere questi due casi bisogna fare una misura dell'intensità, costante nel primo caso e variabile nel secondo al ruotare del polarizzatore.

Ritorniamo su un punto importante: abbiamo affermato che l'effetto di una lamina quarto d'onda (o mezz'onda) è nullo sia per la luce naturale che per quella parzialmente polarizzata. Infatti, pur potendosi pensare che la luce naturale, o parzialmente polarizzata, sia la sovrapposizione di onde polarizzate rettilineamente in piani ortogonali, occorre specificare che la sovrapposizione è incoerente, nel senso che la differenza di fase tra le onde componenti non è costante, ma varia nel tempo; non ha perciò significato parlare di un certo sfasamento introdotto dalla lamina tra le due componenti y e z, in quanto ciò non modifica l'incoerenza. Una lamina di ritardo, come sono in generale chiamate le quarto d'onda e le mezz'onda, può agire solo se il rapporto di fase è costante nel tempo, cioè solo se la luce è polarizzata.

La scomposizione ha comunque significato agli effetti energetici, come si è già visto in vari problemi; il fatto è che questi sono mediati nel tempo e pertanto la fase scompare. Gli strumenti di misura infatti sono sensibili non al valore istantaneo dell'energia, ma al suo valor medio e nel calcolo di questo si perde l'informazione su ϕ; per esempio

$$I = c\varepsilon_0 \frac{1}{T}\int_0^T E_0^2 \operatorname{sen}^2\left(\omega t - \omega\frac{x}{v} + \phi\right)dt = \frac{1}{2}\, c\varepsilon_0 E_0^2 \quad .$$

11.15. ***Un'onda piana polarizzata circolarmente, di intensità $I_0 = 50$ W/cm^2 e lunghezza d'onda $\lambda_0 = 500$ nm, incide normalmente su un sistema ottico formato da due polaroidi con gli assi paralleli all'asse y (vedi figura). Tra i polaroidi è inserita una lamina birifrangente ($n_s = 1.51$, $n_o = 1.50$), di spessore d variabile con continuità, il cui asse ottico forma un angolo $\alpha = \pi/4$ con l'asse y. Calcolare l'intensità I(d) trasmessa dall'intero sistema in funzione di d e darne una rappresentazione grafica per $0 \leq d \leq 10\, d_0$ se d_0 vale 12.5 μm. Calcolare inoltre i valori di d per cui l'intensità assume il valore massimo I_M, è nulla, vale $I_M/2$.***



Dal primo polarizzatore emerge un'onda polarizzata rettilineamente di intensità $I_1 = I_0/2 = 25$ W/cm^2, con il campo elettrico parallelo all'asse y e formante pertanto un angolo di 45° con l'asse ottico della lamina. All'ingresso di questa il campo può essere pensato scisso nelle due componenti

$$\mathbf{E}'_y = \frac{E_0}{2^{1/2}}\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}'_y \quad , \quad \mathbf{E}'_z = \frac{E_0}{2^{1/2}}\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\mathbf{u}'_z \quad , \qquad \text{(a)}$$

che danno origine rispettivamente all'onda straordinaria e all'onda ordinaria. Se la lamina non introduce sfasamento trà queste due, ovvero $\phi = 2K\pi$ con K intero, all'uscita il campo elettrico è ancora parallelo all'asse y e il polarizzatore trasmette tutta l'intensità: $I_M = I_1 = 25$ W/cm^2. Gli spessori corrispondenti, secondo (11.29), sono dati dalla condizione (K essendo un numero intero)

$$2K\pi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_s - n_o)d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{K\lambda_0}{n_s - n_0} = K \cdot 50\ \mu\text{m} = 4Kd_0 \quad .$$

Vediamo dunque che $d_0 = \lambda_0/4(n_s - n_o)$ è lo spessore per cui la lamina è quarto d'onda e che, escluso il caso $d = 0$ (assenza della lamina), l'intensità è massima, nell'intervallo indicato, per $d = 4d_0 = 50$ μm e $d = 8d_0 = 100$ μm.

Il secondo caso notevole si ha se $\phi = \pi/2$: sappiamo che in tal caso la lamina trasforma l'onda rettilinea in circolare, con la stessa intensità, e che il secondo polarizzatore trasmette il 50% dell'intensità, cioè $I_M/2$ ovvero 12.5 W/cm^2. Ciò avviene se

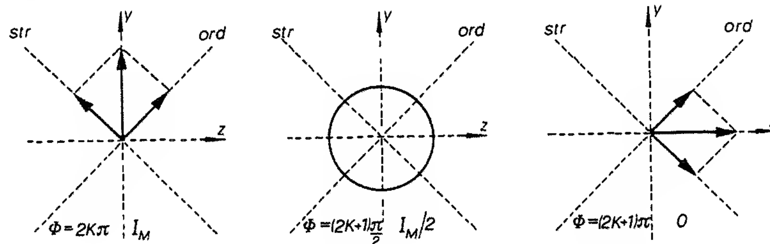
$$(2K+1)\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_s - n_o)d \quad \Rightarrow \quad d = (2K+1)d_0 \quad ,$$

$$d = 12.5 \quad , \quad 37.5 \quad , \quad 62.5 \quad , \quad 87.5 \quad , \quad 112.5 \ \mu\text{m} \ .$$

Infine, se $\phi = \pi$, l'onda rettilinea incidente sulla lamina subisce una rotazione del piano di polarizzazione di $2\alpha = 90°$ e quindi il campo elettrico vibra lungo l'asse z; in tal caso il secondo polarizzatore non trasmette nulla. Gli spessori corrispondenti sono

$$d = 2(2K+1)d_0 \quad \Rightarrow \quad d = 25 \ \mu\text{m} \quad , \quad 75 \ \mu\text{m} \quad , \ 125 \ \mu\text{m} \ .$$

In figura sono disegnati i campi elettrici all'uscita della lamina nei tre casi considerati e indicate le rispettive intensità dopo il secondo polarizzatore.



Nel caso generale in cui ϕ abbia un valore qualunque l'onda emergente dalla lamina è polarizzata ellitticamente e le (a) diventano

$$\mathbf{E}'_y = \frac{E_0}{2^{1/2}} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \phi\right) \mathbf{u}'_y \quad , \quad \mathbf{E}'_z = \frac{E_0}{2^{1/2}} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}'_z \quad ,$$

dove y' è l'asse ottico della lamina e z' un asse a questo ortogonale. Trasformando nel sistema di coordinate y, z e tralasciando la notazione vettoriale si ha

$$\left.\begin{aligned} E_y &= E'_y \cos\theta + E'_z \operatorname{sen}\theta \\ E_z &= -E'_y \operatorname{sen}\theta + E'_z \cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \frac{1}{2^{1/2}} \quad .$$

Attraverso le formule di prostaferesi si arriva al risultato

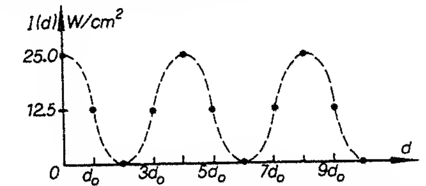
$$E_y = E_0 \cos\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \frac{\phi}{2}\right) \quad ,$$

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \frac{\phi}{2}\right) \quad .$$

Si vede che in effetti l'ellisse descritta dal vettore $\mathbf{E}$ in uscita dalla lamina ha gli assi paralleli a y e z e che $\mathbf{E}_z$ viene assorbito dal secondo polarizzatore mentre $\mathbf{E}_y$ passa interamente, per cui l'intensità trasmessa è

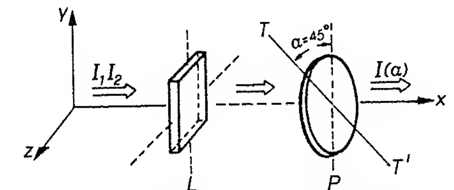
$$I_T = I_M \cos^2\frac{\phi}{2} = I_M \cos^2\frac{\pi}{4}\frac{d}{d_0} = 0.25\cos^2(2\pi \cdot 10^{-2} d) \quad \text{W/cm}^2 \quad \text{(b)}$$

se d è espresso in micron. Questa formula generale contiene evidentemente i casi già studiati; la sua rappresentazione grafica è data in figura.



Riguardando la figura precedente si capisce come al variare dello spessore l'ellisse cambi forma: per $d = 0$ essa è degenerata in un segmento lungo l'asse y, poi ha il semiasse maggiore lungo l'asse y finché per $d = d_0$ diviene una circonferenza; successivamente ha il semiasse maggiore lungo l'asse z e per $d = 2d_0$ degenera di nuovo in un segmento, ma lungo l'asse z; per d che varia da $2d_0$ a $4d_0$ si ripete in senso inverso questo processo. Il periodo è $4d_0$ che corrisponde allo sfasamento 2π.

11.16. *Un'onda piana, composta da due lunghezze d'onda* $\lambda_1 = 720$ nm *e* $\lambda_2 = 576$ nm, *si propaga lungo l'asse x (vedi figura) e attraversa una lamina birifrangente, di spessore* $d = 360$ μm *e indici di rifrazione* $n_s = 1.55$, $n_o = 1.54$. *Le intensità delle due componenti sono* $I_1 = 2$ W/cm² *e* $I_2 = 4$ W/cm². *Analizzando il fascio trasmesso con un polarizzatore si osserva che quando l'asse di questo forma un angolo* $\alpha = \pi/4$ *con l'asse y, che coincide con l'asse ottico della lamina, viene trasmessa solo la componente* λ_1, *mentre quando l'angolo è* $\alpha + \pi/2$ *viene trasmessa solo la componente* λ_2. *Calcolare l'andamento dell'intensità* $I(\alpha)$ *trasmessa dal polarizzatore in funzione di* α *e lo stato di polarizzazione delle due componenti dell'onda piana. Calcolare inoltre le ampiezze dei campi* E_y, E_z, B_y, B_z *dentro il cristallo.*



Dai dati del problema si deduce che le due componenti dell'onda piana all'entrata del polarizzatore sono polarizzate rettilineamente; quella di lunghezza d'onda λ_1 nel piano che forma l'angolo $\alpha = \pi/4$ con l'asse y, quella di lunghezza d'onda λ_2 in un piano ortogonale al precedente. L'intensità trasmessa dal polarizzatore è quindi

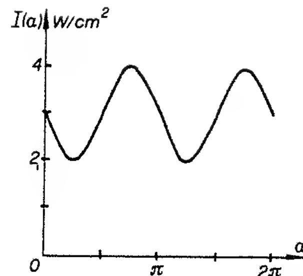
$$I(\alpha) = I_1 \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + I_2 \operatorname{sen}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

ed è riportata in figura per un giro completo del polarizzatore ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$).

Se entrambe le componenti dell'onda sono polarizzate all'uscita della lamina, devono esserlo necessariamente anche all'ingresso: una lamina può cambiare lo stato di polarizzazione di un'onda, ma non polarizzarla. Le possibilità

sono allora che prima della lamina ciascuna componente sia polarizzata rettilineamente o circolarmente, dalla (11.29) ricaviamo

$$\phi_1 = 10\pi \quad , \quad \phi_2 = 12\pi + \frac{\pi}{2} = 25\,\frac{\pi}{2} \quad .$$



Per λ_1 la lamina introduce uno sfasamento multiplo di 2π e quindi è come se non ci fosse: questa componente è polarizzata rettilineamente nel piano che forma l'angolo $\alpha = \pi/4$ con l'asse ottico della lamina Per λ_2 invece la lamina è quarto d'onda e questa componente è polarizzata circolarmente.

Le ampiezze dei campi elettrici nel vuoto si calcolano in base a (11.8) e (11.9) con $\varkappa_e = \varkappa_m = 1$ e risultano eguali:

$$E_1 = \left(\frac{2I_1}{\eta}\right)^{1/2} = \left(\frac{2I_1}{c\varepsilon_0}\right)^{1/2} = 3.88 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad ,$$

$$E_2 = \left(\frac{I_2}{\eta}\right)^{1/2} = \left(\frac{I_2}{c\varepsilon_0}\right)^{1/2} = 3.88 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad .$$

Nell'onda rettilinea $E_{1y} = E_1 \cos\theta \cos\omega(t - x/v)$, $E_{1z} = E_1 \operatorname{sen}\theta \cos\omega(t - x/v)$ e quindi, per $\theta = \pi/4$, le due ampiezze sono eguali a $2.74 \cdot 10^3$ V/m. Nell'onda circolare $E_{2y} = E_2 \cos\omega(t - x/v)$, $E_{2z} = E_2 \operatorname{sen}\omega(t - x/v)$ e l'ampiezza ha il valore E_2.

Dentro la lamina, trascurando la percentuale di luce che viene riflessa nel passaggio aria-vetro (si veda la nota alla fine del capitolo), per l'onda λ_1 abbiamo una suddivisione in parti eguali dell'intensità tra le onde ordinaria e straordinaria e da (11 8) con $\varkappa_m = 1$ ricaviamo:

$$E^L_{1y} = \left(\frac{2I_y}{c\varepsilon_0 \varkappa_e^{1/2}}\right)^{1/2} = \left(\frac{I_1}{c\varepsilon_0 n_s}\right)^{1/2} = 2.20 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad ,$$

$$E^L_{1z} = \left(\frac{2I_z}{c\varepsilon_0 \varkappa_e^{1/2}}\right)^{1/2} = \left(\frac{I_1}{c\varepsilon_0 n_o}\right)^{1/2} = 2\ 21 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad .$$

Un'affermazione analoga si può fare anche per l'onda λ_2 (sostituendo I_2 a I_1) e si trova

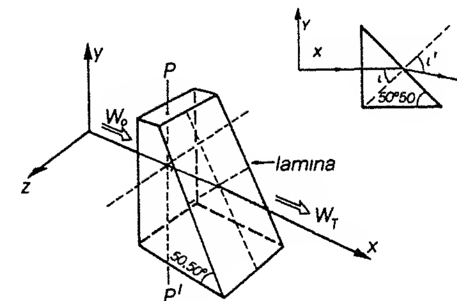
$$E^L_{2y} = 3.11 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad , \quad E^L_{2z} = 3.13 \cdot 10^3\ \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad .$$

Ricordando che in un'onda piana $B_y = -E_z/v = -E_z n/c$, $B_z = E_y/v = E_y n/c$ abbiamo infine:

$$B^L_{1y} = \frac{E^L_{1z} n_s}{c} = 1.14 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \quad , \quad B^L_{1z} = \frac{E^L_{1y} n_o}{c} = 1.13 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \quad ,$$

$$B^L_{2y} = \frac{E^L_{2z} n_s}{c} = 1.61 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \quad , \quad B^L_{2z} = \frac{E^L_{2y} n_o}{c} = 1.61 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \quad .$$

11.17. ***Un'onda piana è composta da tre lunghezze d'onda: λ_1 polarizzata circolarmente, λ_2 polarizzata rettilineamente con il campo E parallelo all'asse y, λ_3 polarizzata rettilineamente con il campo E parallelo all'asse z (vedi figura). L'onda si propaga lungo l'asse x e attraversa una lamina birifrangente con l'asse ottico parallelo all'asse y ($n_s = 1.485$, $n_o = 1.655$). La seconda faccia della lamina è tagliata obliquamente con angolo alla base $\beta = 50.50°$. Determinare lo stato di polarizzazione delle tre componenti dell'onda trasmessa dalla lamina. Supponendo che la potenza incidente sia $W_0 = 9$ W egualmente distribuita tra le tre componenti, calcolare la potenza W_T trasmessa dalla lamina (trascurando la riflessione sulla prima faccia e l'assorbimento).***



Dopo avere attraversato la prima faccia della lamina l'onda piana incide sulla faccia obliqua con un angolo $i = 90° - 50.50° = 39.50°$. L'angolo di trasmissione i' dipende dal piano di vibrazione e risulta

$$\operatorname{sen} i'_{\text{ord}} = n_o \operatorname{sen} i = 1.053 \quad , \quad \operatorname{sen} i'_{\text{str}} = n_s \operatorname{sen} i = 0.945 \quad .$$

L'onda ordinaria, che vibra nel piano xz, viene pertanto riflessa totalmente sulla seconda faccia ($\operatorname{sen} i'_{\text{ord}} > 1$), mentre l'onda straordinaria viene trasmessa e in uscita si ha solo vibrazione parallela all'asse y. Dal momento che ogni onda piana, indipendentemente dal suo stato di polarizzazione, può essere pensata come sovrapposizione di due onde piane che vibrano nei piani xy e xz, si comprende che dalla lamina esce in ogni caso un'onda polarizzata rettilineamente nel piano xy. Il sistema si comporta come un polarizzatore.

Per il calcolo della potenza trasmessa, basta dunque considerare solo la componente che vibra nel piano xy: questa ha una potenza $W_0/3 = 3$ W associata a λ_2 e 0.5 $W_0/3 = 1.5$ W associata a λ_1, cioè in totale 4.5 W. Trascurando la riflessione sulla prima faccia (si veda la nota alla fine del capitolo) e l'assorbimento, sulla seconda faccia la potenza $W_0/2 = 4.5$ W viene in parte riflessa e in parte trasmessa, con gli angoli $i = 39.50°$ e $i'_{\text{str}} = 70.83°$. Il coefficiente di riflessione (11.15) vale $R_p = 0.05$ per cui viene trasmessa la potenza

$$W_T = \frac{W_0}{2}(1 - R_p) = 4.28\,\text{W} \quad .$$

11.18. ***Un fascio di luce bianca, polarizzata rettilineamente, incide perpendicolarmente su una lamina di quarzo tagliata parallelamente all'asse ottico, con cui il piano di polarizzazione forma un angolo di 45°. Lo spessore della lamina è $s = 865$ μm e gli indici di rifrazione valgono $n_o = 1.5442$, $n_s = 1.5533$, praticamente indipendenti dalla lunghezza d'onda nell'intervallo tra 600 e 700 nm. Determinare per quali λ entro questo intervallo la luce emergente dalla lamina risulta ancora polarizzata rettilineamente. Se questa luce viene analizzata mediante un polaroide con l'asse ottico ortogonale al piano di vibrazione della luce incidente dire quali lunghezze d'onda tra quelle polarizzate rettilineamente non risultano trasmesse dal polaroide.***

Dal problema 11.11 sappiamo che un'onda polarizzata rettilineamente esce dalla lamina ancora tale se lo sfasamento (11.29) tra onda ordinaria e straordinaria soddisfa alla condizione (con K intero)

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_o)s = K\pi \quad \Rightarrow \quad K\lambda = 2s(n_s - n_o) = 15.743 \cdot 10^3 \text{ nm} \quad .$$

Nell'intervallo tra 600 e 700 nm i possibili valori di K sono compresi tra gli estremi

$$K_1 = \frac{15.743 \cdot 10^3}{700} = 22.5 \quad , \quad K_2 = \frac{15.743 \cdot 10^3}{600} = 26.2$$

e quindi la luce è polarizzata rettilineamente per i seguenti valori di λ:

K	23	24	25	26
λ(nm)	684.5	656.0	629 7	605.5

Se K è pari l'onda emergente dalla lamina è ancora polarizzata nello stesso piano dell'onda incidente; poiché l'asse ottico del polaroide è posto a 90° rispetto a tale piano le lunghezze d'onda $\lambda = 656.0$ nm e $\lambda = 605.5$ nm vengono estinte. In corrispondenza ai valori dispari di K ($\lambda = 684.5$ nm e $\lambda = 629.7$ nm) la lamina è mezz'onda e ruota il piano di polarizzazione di 2θ, che nel nostro caso vale 90°, per cui si ha trasmissione.

11.19. ***Un fascio di luce di intensità $I_0 = 1.6$ W/cm², in cui sono presenti con eguale intensità tutte le lunghezze d'onda comprese tra $\lambda_1 = 400$ nm e $\lambda_2 = 800$ nm, incide normalmente su un sistema ottico formato da due polaroidi P_1 e P_2 con gli assi paralleli tra i quali si trova una lamina (spessore $s = 20$ μm, $n_s - n_o = 10^{-2}$) con l'asse ottico a 45° rispetto a quello dei polaroidi. Determinare la composizione spettrale della luce uscente da P_2.***

In assenza della lamina L tutte le lunghezze d'onda trasmesse da P_1 sono trasmesse anche da P_2; in uscita la luce è polarizzata rettilineamente, ha la

stessa composizione spettrale di quella incidente e un'intensità $I_1 = 0.8$ W/cm², in quanto P_1 ha eliminato metà del fascio incidente. Visto che il fascio contiene con eguale intensità tutte le lunghezze d'onda da λ_1 a λ_2, l'intensità per intervallo unitario di lunghezza d'onda è costante ovvero

$$\frac{dI}{d\lambda} = \frac{I_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \Rightarrow \quad dI = F(\lambda)d\lambda \quad , \quad F(\lambda) = \frac{I_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{W}}{\text{cm}^3} \quad .$$

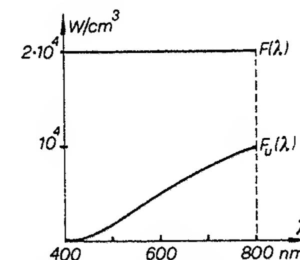
Questa è la composizione spettrale in uscita da P_1 e in ingresso alla lamina.

La lamina introduce lo sfasamento (11.29)

$$\phi(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_o)s = 400\frac{\pi}{\lambda} \quad (\lambda \text{ in nm})$$

e trasforma l'onda incidente da polarizzata rettilineamente a polarizzata ellitticamente. In base alla (b) del problema 11 15 in uscita da P_2 abbiamo per ogni intervallo $d\lambda$

$$dI_u = dI\cos^2\frac{\phi}{2} \quad \Rightarrow \quad F_u(\lambda) = F(\lambda)\cos^2\frac{\phi}{2} = 2 \cdot 10^4 \cos^2\frac{200\pi}{\lambda}\frac{\text{W}}{\text{cm}^3} \quad .$$



In figura sono rappresentate $F(\lambda)$ e $F_u(\lambda)$.

È facile verificare che per $\lambda_1 = 400$ nm la lamina è mezz'onda: di conseguenza il piano di polarizzazione viene ruotato di 90° essendo l'asse della lamina a 45° rispetto agli assi dei polaroidi e la lunghezza d'onda λ_1 non viene trasmessa da P_2. Se è mezz'onda per λ_1 la lamina è quarto d'onda per $\lambda_2 = 2\lambda_1 = 800$ nm: in tal caso l'onda esce da L polarizzata circolarmente e P_2 ne trasmette il 50%: in effetti $F_u(800) = 10^4$ W/cm³ $= 0\ 5\ F(800)$.

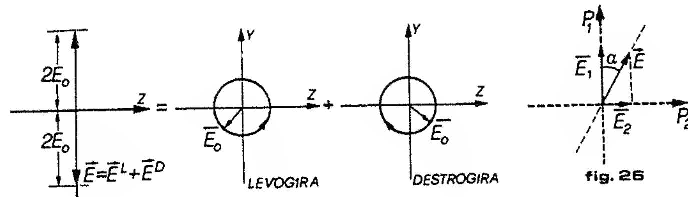
Dalla figura si capisce che nella luce trasmessa predominano le lunghezze d'onda maggiori: in uscita si ha quindi una luce di colore rossastro.

11.20. ***Un fascio di luce polarizzata rettilineamente di lunghezza d'onda $\lambda = 500$ nm passa attraverso una soluzione zuccherina che ruota il piano di polarizzazione di 90° per ogni centimetro di soluzione attraversata. Calcolare la differenza degli indici di rifrazione per le due onde polarizzate circolarmente in sensi opposti che si propagano nella sostanza. Dopo aver attraversato 100 cm di questa soluzione la luce, a causa del diverso coefficiente di assorbimento delle due onde circolari, è divenuta polarizzata ellitticamente e il rapporto tra gli assi dell'ellisse vale $\varepsilon = 3$. Calcolare il valore di ε dopo 200 e dopo 500 cm e studiare il caso limite di spessore infinito.***

Un'onda piana che si propaga lungo l'asse x ed è polarizzata rettilineamente, ad esempio secondo l'asse y, si può sempre pensare come sovrapposizione di due onde piane polarizzate circolarmente in senso opposto:

$$\mathbf{E}_y = 2E_0 \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y =$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_y^L = E_0 \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \\ \mathbf{E}_z^L = -E_0 \operatorname{sen}\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{E}_y^D = E_0 \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \\ \mathbf{E}_z^D = E_0 \operatorname{sen}\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \end{cases}$$



come è rappresentato in figura, dove l'asse x entra nel foglio. In alcune sostanze, come le soluzioni di zucchero, queste due onde circolari si propagano con velocità diversa, ovvero vedono la sostanza con due indici di rifrazione diversi Diciamo n_L e n_D gli indici di rifrazione associati alle due onde, dopo aver attraversato lo spessore h si è prodotto tra di esse lo sfasamento

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_L - n_D)\, h \quad , \tag{a}$$

formalmente eguale a (11.29). Perciò, dopo lo spessore h,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_y^L &= E_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \phi\right) \mathbf{u}_y \,, \quad & \mathbf{E}_y^D &= E_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \,, \\ \mathbf{E}_z^L &= -E_0 \operatorname{sen}\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \phi\right) \mathbf{u}_z \,, \quad & \mathbf{E}_z^D &= E_0 \operatorname{sen}\left(\omega t - \omega \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \,. \end{aligned} \tag{b}$$

La somma di questi vettori (vedi anche problema 11.15) dà

$$\mathbf{E}_y = 2E_0 \cos\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \frac{\phi}{2}\right) \mathbf{u}_y \,,$$

$$\mathbf{E}_z = 2E_0 \operatorname{sen}\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \frac{\phi}{2}\right) \mathbf{u}_z \,,$$

ossia un'onda polarizzata rettilineamente in un piano formante un angolo α col primitivo piano di polarizzazione, tale che

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_z}{E_y} = \operatorname{tg}\frac{\phi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(n_L - n_D)h \quad , \tag{c}$$

essendosi utilizzata la (a). Se $n_L > n_D$ (onda destrogira più veloce) l'angolo α è positivo, cioè la rotazione è destrogira (rispetto al verso di propagazione essa è individuata dalla solita regola della vite destrogira), il viceversa avviene se $n_L < n_D$ (onda levogira più veloce). La (c) fornisce un'espressione esplicita del potere rotatorio specifico, che risulta dipendente da λ anche se non nella forma $1/\lambda$ in quanto n_L e n_D possono essere a loro volta funzioni di λ.

Dai dati del problema $\alpha = \pi/2$ se $h = 1$ cm, quindi da (c)

$$n_L - n_D = \frac{\lambda}{2h} = 2.5 \cdot 10^{-5} \quad ;$$

inoltre da (a) o da (c) vediamo che ϕ aumenta di 2π ogni 2 cm. Il fenomeno descritto si chiama *birifrangenza circolare*.

Dimostriamo ora come, a causa del diverso assorbimento delle onde circolari, la luce da rettilinea diventi ellittica. Secondo (11.11) l'intensità di ciascun'onda decresce con lo spessore nel modo seguente:

$$I_D = \eta E_0^2 \, e^{-2c_D s} \quad , \quad I_L = \eta E_0^2 \, e^{-2c_L s}$$

essendosi usata la (11.9) per l'intensità di un'onda circolare, $\alpha_D = 2c_D$ e $\alpha_L = 2c_L$ sono i coefficienti di assorbimento delle due onde circolari le cui ampiezze decrescono di conseguenza con la legge

$$E_0^D = \left(\frac{I_D}{\eta}\right)^{1/2} = E_0 e^{-c_D s} \quad , \quad E_0^L = \left(\frac{I_L}{\eta}\right)^{1/2} = E_0 e^{-c_L s} \quad .$$

Dopo uno spessore s, tale che lo sfasamento ϕ sia multiplo di 2π (come avviene per gli spessori dati nel testo), la risultante delle due onde polarizzate circolarmente è, in base alle (b),

$$\mathbf{E}_y = E_0 \left(e^{-c_D s} + e^{-c_L s}\right) \cos\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{E}_z = E_0 \left(e^{-c_D s} - e^{-c_L s}\right) \operatorname{sen}\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

cioè un'onda polarizzata ellitticamente. Il rapporto degli assi vale

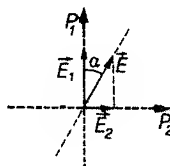
$$\varepsilon = \frac{E_{0y}}{E_{0z}} = \frac{1 + e^{-(c_L - c_D)s}}{1 - e^{-(c_L - c_D)s}} \quad \Rightarrow \quad c_L - c_D = \frac{1}{s} \log \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}$$

e con i dati $\varepsilon = 3$ quando $s = 100$ cm si ricava $c_L - c_D = 6.93 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}. Di qui $\varepsilon(200) = 1.67$, $\varepsilon(500) = 1.06$. Al tendere di s all'infinito ε tenderebbe a uno e la luce diventerebbe circolare; essa però risulterebbe completamente assorbita!

11.21. *Un fascio di luce bianca passa attraverso due polaroidi incrociati, tra i quali è posta una lamina di quarzo di spessore* $s = 44$ **mm**, *tagliata ortogonalmente all'asse ottico: in tal caso un'onda che si propaga nella direzione dell'asse ottico non subisce birifrangenza. Analizzando con uno spettrometro la luce che esce dal sistema si osserva uno spettro a bande, con bande nere in corrispondenza alle seguenti lunghezze d'onda:* **434, 456, 482, 513, 551, 599 nm.** *Dimostrare che tale situazione è consistente con l'ipotesi che il quarzo presenti un potere rotatorio specifico variabile con la frequenza secondo la legge* $K(\lambda) = a + b/\lambda^2$, *a e b essendo costanti. Se per* $\lambda = 589.3$ **nm** *la rotazione del piano di polarizzazione è di* **21.24°** *per ogni millimetro di quarzo attraversato, calcolare lo spessore* s_0 *che produce una rotazione di* **360°** *nella luce di lunghezza d'onda* $\lambda_0 = 500$ **nm.**

L'onda uscente dal primo polaroide è polarizzata rettilineamente col campo elettrico $\mathbf{E}_1$ che vibra nella direzione dell'asse ottico P_1; attraversando lo spessore s di quarzo $\mathbf{E}$ ruota di un angolo α (vedi figura) proporzionale a s: $\alpha = Ks = (a + b/\lambda^2)s$. D'altra parte, affinché una radiazione di lunghezza d'onda λ sia estinta dal secondo polaroide ($\mathbf{E}_2 = 0$ in figura), occorre che sia $\alpha = m\pi$ con m intero. Per ciascuna delle lunghezze d'onda λ_i mancanti dobbiamo quindi avere

$$\left(a + \frac{b}{\lambda_i^2}\right) s = m_i \pi \quad .$$



Non conosciamo a, b e m_i; però per sottrazione tra due qualunque di tali relazioni possiamo eliminare a:

$$(m_i - m_j)\pi = bs \left(\frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_j^2}\right) \quad ;$$

inoltre facendo il rapporto di due qualunque delle (a) eliminiamo anche b:

$$\frac{m_i - m_j}{m_i - m_k} = \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{\lambda_k^2 - \lambda_i^2} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_j^2} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Abbiamo così ottenuto delle relazioni che non contengono le costanti incognite a e b; gli m_i sono un gruppo di interi consecutivi. Se, per esempio, λ_i, λ_j, λ_k sono tre lunghezze d'onda mancanti adiacenti, $m_i - m_j = 1$, $m_i - m_k = 2$ e la (b) diviene

$$\beta = \frac{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}{\lambda_k^2 - \lambda_i^2} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_j^2} = 0.5 \quad .$$

Con la combinazione (λ_1, λ_2, λ_3) abbiamo $\beta = 0.498$, con (λ_4, λ_5, λ_6) $\beta = 0.500$, con (λ_3, λ_4, λ_5) $\beta = 0.499$: i dati sperimentali sono compatibili entro gli errori con la legge $K(\lambda) = a + b/\lambda^2$.

Dalla (a) si può ricavare la costante b prendendo una qualunque coppia di lunghezze d'onda mancanti e si trova $b = 1.416 \cdot 10^{-8}$ rad · cm. Infine dal

fatto che per $\lambda = 589.3$ nm il potere rotatorio specifico vale 21.24°/mm cioè 3.707 rad/cm deduciamo

$$a = \frac{\alpha}{1} - \frac{b}{\lambda^2} = -0.370 \ \frac{\text{rad}}{\text{cm}} \quad ,$$

per cui l'espressione del potere rotatorio specifico del quarzo è

$$K(\lambda) = -0.370 + \frac{1.416 \cdot 10^{-8}}{\lambda^2} \ \frac{\text{rad}}{\text{cm}}$$

se la lunghezza d'onda è misurata in centimetri. Risulta subito che lo spessore necessario per far ruotare di 2π il piano di polarizzazione della luce di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 0.5 \cdot 10^{-4}$ cm è

$$s_0 = \frac{2\pi}{K(\lambda_0)} = 1.19 \text{ cm} \quad .$$

11.22. *Un fascio monocromatico con lunghezza d'onda* $\lambda = 600$ **nm**, *costituito da luce polarizzata ellitticamente, ha un'intensità così distribuita tra le componenti:* $I_y = 75$ **W/cm²**, $I_z = 25$ **W/cm²**. *Esso incide normalmente su una lamina birifrangente positiva, tagliata parallelamente all'asse ottico, la cui direzione coincide con quella dell'asse y; uscita dalla lamina la luce attraversa, parallelamente a* **B**, *l'interferro di un elettromagnete, spesso* $h = 6$ **cm** *e riempito con solfuro di carbonio* ($\varkappa_m = 1$). *Se con un polarizzatore si analizza il fascio, si vede che ci sono due posizioni di estinzione, a* **180°** *tra loro, nelle quali l'asse del polarizzatore è normale all'asse della lamina. Calcolare modulo e verso di* **B** *nell'interferro se la costante di Verdet per il solfuro di carbonio ha il valore* $V = 7.07 \cdot 10^2$ **gradi/mT** *e se è noto da altre misure che il modulo di* **B** *è inferiore a* **1 T.**

Per ottenere estinzione col polarizzatore l'onda che esce dall'interferro deve essere polarizzata rettilineamente; siccome l'azione di **B** nel solfuro di carbonio provoca attività ottica, cioè una rotazione del piano di polarizzazione, la luce deve essere polarizzata rettilineamente già all'uscita dalla lamina birifrangente. Si conclude che quest'ultima è quarto d'onda per la luce in esame, in quanto tramuta l'onda incidente ellittica in onda rettilinea. Se dunque prima della lamina

$$\mathbf{E}_y = E_{0y} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{E}_z = E_{0z} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

dopo la lamina (positiva, cioè con $n_s > n_o$)

$$\mathbf{E}_y = E_{0y} \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u}_y = -E_{0y} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\mathbf{E}_z = E_{0z} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \mathbf{u}_z \quad .$$

Quest'onda, polarizzata rettilineamente, ha il piano di polarizzazione che forma con l'asse y l'angolo θ dato da

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{E_z}{E_y} = -\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = -\left(\frac{I_z}{I_y}\right)^{1/2} = -0.577 \quad \Rightarrow \quad \theta = -35.26° \quad .$$

Dopo l'attraversamento del magnete il piano di polarizzazione è parallelo all'asse y, visto che si ha estinzione con l'asse del polaroide normale a y. Quindi l'angolo α di rotazione magnetica deve valere $-\theta = 35.26°$. Poiché α è positivo si ricava dalla (11.32) che $\cos\theta_B$ vale uno: il campo **B** è parallelo e concorde alla direzione di propagazione. Il suo modulo vale

$$B = \frac{\alpha}{Vh} = 0.83 \text{ T} \quad .$$

Ci sarebbe stata naturalmente la possibilità $\alpha = -144.74°$, ma deve essere esclusa perché richiede un campo maggiore di 1 T; per la stessa ragione vanno escluse le rotazioni $\alpha + K\pi$, con K intero.

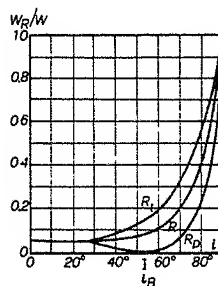
* * *

NOTE

A. In molti problemi proposti in questo capitolo un'onda viene fatta incidere normalmente sulla superficie di un materiale trasparente, con indice di rifrazione vicino a quello del vetro Nel calcolo della potenza trasmessa si è sempre trascurato il fatto che una parte dell'energia viene riflessa a 180° e non passa attraverso il cristallo. Abbiamo visto nel paragrafo 11d., formula (11.27), che la percentuale di energia riflessa vale

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

se $n = n_2/n_1$ è l'indice di rifrazione relativo del mezzo due rispetto al mezzo uno; tutto ciò indipendentemente dallo stato di polarizzazione. Per $n = 1.5$ (tipico di aria-vetro) il coefficiente di riflessione vale $4 \cdot 10^{-2}$; si capisce dunque come si possa trascurare questo effetto, soprattutto se si vuole concentrare l'attenzione sui fenomeni che avvengono nei cristalli uniassici e in quelli dicroici. Però nel prossimo capitolo vedremo molti esempi in cui è importante la considerazione della luce riflessa, anche in incidenza normale. Nella figura sono mostrati, in funzione di i, i coefficienti di riflessione R, R_t, R_p.



B. La costante dielettrica $\varkappa_e$ che compare nella formula $n = (\varkappa_e)^{1/2}$ non ha lo stesso valore di quella che si misura quando si sottopone una sostanza all'azione di un campo elettrico statico e che abbiamo quindi usato nel terzo capitolo.

Sviluppando la teoria atomica della costante dielettrica si dimostra che

$$\varkappa_e = 1 + \chi_e = 1 + n_M(\alpha_e + \alpha_p + \alpha_i) \quad ,$$

dove n_M è il numero di molecole per unità di volume, α_e la polarizzabilità elettronica, α_p la polarizzabilità per orientazione delle molecole dotate di un momento di dipolo intrinseco $\mathbf{p}_0$, α_i la polarizzabilità ionica, presente solo nei cristalli e legata allo spostamento degli ioni di un cristallo sotto l'azione di un campo elettrico.

Quando una sostanza è attraversata da un'onda elettromagnetica visibile, le cui frequenze sono comprese tra $4.3 \cdot 10^{14}$ Hz e $7.5 \cdot 10^{14}$ Hz, il grande momento d'inerzia delle molecole che hanno un momento $\mathbf{p}_0$ non consente loro di seguire istante per istante le rapide variazioni di **E**: ciò equivale a dire che per campi elettrici rapidamente variabili $\alpha_p = 0$. Per lo stesso motivo $\alpha_i = 0$ e pertanto alle frequenze visibili

$$n^2 = 1 + n_M\alpha_e \quad ;$$

l'indice di rifrazione è determinato dal meccanismo di polarizzabilità elettronica.

Possiamo fare due esempi estremi: per l'aria $\varkappa_e = 1.0006$ (misura statica) e $n = 1.0003 = \varkappa_e^{1/2}$; invece per l'acqua $\varkappa_e = 81$ (misura statica) e $n = 1.333$, molto minore di $\varkappa_e^{1/2}$. Sfruttando le formule esposte abbiamo che nell'acqua

$$\frac{\alpha_e + \alpha_p}{\alpha_e} = \frac{\varkappa_e - 1}{n^2 - 1} = \frac{80}{0.78} = 102.6 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_p}{\alpha_e} = 101.6$$

($\alpha_i = 0$). Il confronto tra n e $\varkappa_e$ (statica) permette di valutare il rapporto delle polarizzabilità, cioè l'importanza relativa dei due effetti. Va poi detto che il valore statico di $\varkappa_e$ è valido almeno fino a frequenze dell'ordine di 10^9 Hz.

* * *

INTERFERENZA

12a. Consideriamo due onde piane elettromagnetiche, monocromatiche, polarizzate rettilineamente nel medesimo piano, che si propagano lungo la stessa direzione x e provengono da due sorgenti distinte; le loro equazioni sono

$$\mathbf{E}_1 = E_{01}\cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \phi_1\right)\mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{E}_2 = E_{02}\cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \phi_2\right)\mathbf{u} \quad ,$$

e le fasi ϕ_1 e ϕ_2 dipendono dalle sorgenti che le hanno generate. Sovrapponendo tali onde si ottiene un'onda piana polarizzata nello stesso piano con $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. In base alla definizione di intensità data nel paragrafo 11b. l'intensità risultante vale

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2}\cos(\phi_2 - \phi_1) \tag{12.1}$$

se $I_1 = \eta E_{01}^2/2$ e $I_2 = \eta E_{02}^2/2$ sono le intensità delle onde componenti.

La differenza di fase $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ può variare o rimanere costante nel tempo; in questo secondo caso le due sorgenti si dicono *coerenti* e l'intensità risultante è funzione di $\Delta\phi$. In particolare, se $E_{01} = E_{02}$,

$$I = 2I_1\,(1 + \cos\Delta\phi) = 4I_1\cos^2\frac{\Delta\phi}{2} \quad . \tag{12.2}$$

Si hanno massimi e minimi di intensità:

$$\begin{aligned} I &= 4I_1 \quad \text{se} \quad \Delta\phi = 2K\pi \quad , \\ I &= 0 \quad \text{se} \quad \Delta\phi = (2K+1)\pi \quad , \end{aligned} \tag{12.3}$$

dove K è un numero intero $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Quanto detto per due sorgenti si può estendere a un numero N qualunque di sorgenti che emettono onde piane polarizzate nel medesimo piano; sussiste la

$$I = \sum_1^N{}_i\, I_i + 2\sum_1^N{}_{j\neq k}(I_j I_k)^{1/2}\cos\Delta\phi_{jk} \quad ; \tag{12.4}$$

se tutte le $\Delta\phi_{jk} = \phi_j - \phi_k$ rimangono costanti nel tempo si dice che le N sorgenti costituiscono un *sistema di sorgenti coerenti*.

La (12.4) resta valida anche nel caso in cui le N sorgenti emettano onde piane non polarizzate, ma con i vettori $\mathbf{E}_i$ che istante per istante giacciono nello stesso piano, così che il campo risultante vibra in quel medesimo piano. Di nuovo si parla di coerenza tra le N sorgenti se le differenze di fase mutue restano costanti nel tempo.

12b. Sorgenti ordinarie di onde elettromagnetiche coerenti possono essere antenne, del tipo descritto nei problemi 10.11 e 10.12, eccitate dal medesimo circuito risonante. Vedremo in alcuni problemi gli interessanti fenomeni che si possono ottenere con N di queste antenne. Il campo delle frequenze producibili si estende dai KHz ai GHz (10^9 Hz)

Nel caso di onde elettromagnetiche luminose (visibili) bisogna procedere in modo diverso a causa della natura stessa delle sorgenti di queste onde che sono i singoli atomi. Ognuno di questi (e ricordiamo che in 1 cm^3 di gas a pressione atmosferica ce ne sono dell'ordine di 10^{19}) se opportunamente eccitato emette un'onda piana (1) polarizzata rettilineamente; ma il tempo dell'emissione e il piano di polarizzazione sono diversi per ogni atomo, cioè queste emissioni di energia sono completamente casuali e scorrelate tra loro (2), per cui l'onda luminosa emessa da un insieme di atomi e costituita dalla sovrapposizione di innumerevoli emissioni elementari appare non polarizzata (il piano di polarizzazione varia troppo rapidamente perché si possa mettere in evidenza una sua particolare direzione). Inoltre le onde provenienti da due diverse sorgenti non sono coerenti: il coseno della differenza di fase varia casualmente e molto rapidamente nel tempo, assumendo tutti i valori compresi tra -1 e $+1$ con valor medio zero. Le (12.1) o (12.4) divengono

$$I = \sum_{1}^{N}{}_i \, I_i \ , \qquad (12.5)$$

le intensità di sorgenti incoerenti si sommano. Tale relazione è valida, oltre che per gli atomi di una sorgente ordinaria, anche per N sorgenti ordinarie indipendenti.

Se vogliamo ottenere, in linea di principio, N sorgenti luminose coerenti dall'onda piana emessa da un singolo atomo possiamo introdurre nel cammino dell'onda uno schermo opaco e su questo praticare N fori; le onde uscenti da tali fori, che fungono da sorgenti, hanno una differenza di fase costante in quanto una variazione di fase della sorgente primaria (l'atomo) si trasmette a tutte le sorgenti nel medesimo modo; si trasmette altresì allo stesso modo una

(1) In realtà e più corretto dire che un atomo emette in un tempo dell'ordine di $\tau = 10^{-8}$ s un pacchetto d'onde che ha una estensione spaziale finita ($l = c\tau = 3$ m) piuttosto che un'onda piana la cui lunghezza è indefinita, ciò però non cambia la descrizione degli effetti di interferenza che tratteremo in seguito

(2) Solo con il sistema laser si ha emissione coerente di radiazione da parte di atomi diversi

variazione del piano di polarizzazione. È chiaro che tale metodo è valido, proprio in pratica, per ottenere sorgenti coerenti da una sorgente ordinaria: infatti questa è costituita da un numero molto grande di atomi, per ognuno dei quali valgono le precedenti considerazioni. I fori si comportano quindi come un sistema di sorgenti ordinarie coerenti.

Rifacendosi al paragrafo 11b. l'onda emessa dal singolo foro si può a sua volta rappresentare come sovrapposizione di due onde incoerenti di eguale intensità polarizzate in due piani tra loro ortogonali. Pertanto i fori si possono pensare come sorgenti di due sistemi indipendenti di onde polarizzate rettilineamente in piani ortogonali; entrambi i sistemi sono coerenti e per ciascuno di essi si applica la (12.4).

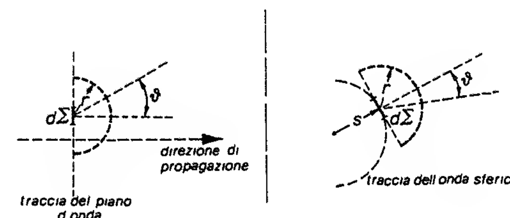
Le caratteristiche delle onde emesse dalle sorgenti così costruite si ricavano dal *principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff*: ogni elemento superficiale di area $d\Sigma$ di un fronte d'onda piano o sferico si può pensare come sorgente secondaria di onde che hanno:

a) la stessa frequenza dell'onda primaria,
b) la fase iniziale dell'onda primaria,
c) l'ampiezza data da

$$dE = \frac{k(\theta)\, E_0\, d\Sigma}{r} \ , \quad dE = k(\theta)\, \frac{E_0}{s}\, \frac{d\Sigma}{r} \ , \qquad (12.6)$$

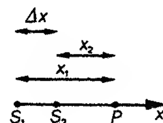
$$\text{con } k(\theta) = \frac{1 + \cos\theta}{2} \ ,$$

rispettivamente per un'onda piana di ampiezza E_0 e per un'onda sferica che a distanza s dalla sorgente ha un'ampiezza E_0/s. Il termine $1/r$ che compare in entrambe le formule stabilisce che le onde emesse dalle sorgenti (i fori) sono sferiche. Il *fattore di inclinazione* $k(\theta)$ garantisce tra l'altro che queste sorgenti non emettono verso la sorgente primaria: $k(\pi) = 0$.



Il metodo esposto per ottenere sorgenti coerenti è detto di *divisione del fronte d'onda*. Un altro metodo comunemente usato consiste nel far incidere la luce emessa da una sorgente su superficie parzialmente riflettenti dalle quali una parte dell'energia elettromagnetica viene riflessa e una parte trasmessa; tale metodo è detto di *divisione dell'ampiezza* in quanto l'intensità di ogni sorgente dipende dalle condizioni di riflessione.

Quando le onde emesse da sorgenti coerenti si incontrano in un dato punto si dice che interferiscono. I fenomeni che si osservano sono dovuti a differenze di fase che si producono tra onde coerenti: queste, in fase nell'origine, acquistano poi una differenza di fase in quanto raggiungono il punto di interferenza compiendo cammini geometricamente o fisicamente diversi. Per esempio, in figura sono considerate due onde che si propagano nella stessa direzione x, emesse da due sorgenti coerenti S_1 e S_2: $E_1 = E_0 \cos\omega\,(t - x_1/v)$ ed $E_2 = E_0 \cos\omega\,(t - x_2/v)$ sono le espressioni dei campi nel punto P; ivi al campo e l'intensità risultanti valgono $E^2 = 4E_0^2 \cos^2\phi/2$, $I = 4I_0 \cos^2\phi/2$ in accordo con (12.2) essendosi posto



$$\phi = \frac{\omega(x_2 - x_1)}{v} = \frac{2\pi}{T}\,\frac{(x_2 - x_1)}{c/n} = \frac{2\pi n(x_2 - x_1)}{\lambda_0} = \frac{2\pi n\,\Delta x}{\lambda_0} \quad ; \qquad (12.7)$$

λ_0 è la lunghezza d'onda nel vuoto, n è l'indice di rifrazione del mezzo in cui le onde si propagano. Completiamo allora così le (12.3):

$$\begin{aligned} &\text{max} \quad \phi = 2K\pi \quad &\Rightarrow \quad n\,\Delta x = K\lambda_0 \;, \\ &\text{min} \quad \phi = (2K+1)\pi \quad &\Rightarrow \quad n\,\Delta x = (2K+1)\,\frac{\lambda_0}{2} \;. \end{aligned} \qquad (12.8)$$

La quantità $n\Delta x$ prende il nome di *differenza dei cammini ottici*; quindi si hanno massimi di intensità se la differenza dei cammini ottici è un multiplo intero della lunghezza d'onda della luce mentre si hanno minimi in corrispondenza dei multipli seminteri. Si vede anche come cammini geometrici eguali in mezzi diversi diano cammini ottici diversi.

L'esempio appena esposto mostra una delle cause più comuni di sfasamento tra onde coerenti, appunto le differenze di cammino ottico; però non sono queste le uniche cause. Pertanto, mentre è sempre corretto dire che si hanno massimi e minimi in corrispondenza a sfasamenti di $2K\pi$ e di $(2K+1)\pi/2$, secondo le (12.3), bisogna fare attenzione nell'applicare le (12.8) al fatto che non ci siano altre cause di sfasamento diverse da differenze di cammino ottico, come per esempio riflessioni su superficie di discontinuità dell'indice di rifrazione.

12c. La maggior parte dei problemi di questo capitolo sono dedicati alle onde elettromagnetiche ed anzi alle onde luminose, in quanto più interessanti sono i fenomeni che si osservano. Nondimeno verranno trattati alcuni problemi con onde elastiche allo scopo di sottolineare che l'interferenza è una caratteristica della propagazione delle onde di qualsiasi natura. Si può dire che l'osservazione di fenomeni interferenziali porta come conseguenza l'esistenza di una propagazione ondosa; fu proprio con un esperimento di interferenza che Hertz mise in evidenza l'esistenza delle onde elettromagnetiche (vedi paragrafo 12d. e problema 12.36).

Ricordiamo rapidamente alcune proprietà delle onde elastiche:

a) possono essere longitudinali (onde in una sbarra, in un gas) o trasversali (in una corda, in una membrana),

b) comportano sempre uno spostamento di materia: l'ampiezza dell'onda coincide con lo spostamento massimo dalla posizione di equilibrio dell'elemento interessato dall'onda;

c) trasportano energia (cinetica).

Per un'onda sinusoidale $\xi = \xi_0 \operatorname{sen}\omega\,(t - x/v)$ l'intensità, definita sempre come energia trasportata dall'onda che nell'unità di tempo attraversa l'unità di superficie, si scrive

$$I = \frac{1}{2}\,v\varrho\omega^2\xi_0^2 \quad ; \qquad (12.9)$$

v è la velocità di propagazione dell'onda elastica, ϱ la densità del mezzo.

A seconda del sistema considerato si hanno diverse espressioni della velocità di propagazione:

$$\text{— onde in una sbarra} \quad v = \left(\frac{Y}{\varrho}\right)^{1/2} \qquad (12.10)$$

Y è il modulo di Young o di elasticità, che si misura in N/m^2, ed è definito dalla relazione esistente tra la deformazione $d\xi$ di un tratto di sbarra di sezione Σ lungo dx e la forza F applicata:

$$d\xi = \frac{1}{Y}\,\frac{F}{\Sigma}\,dx \quad ,$$

si tratta di una scrittura più esplicita della legge di Hooke dell'elasticità

$$\text{— onde in una corda} \quad v = \left(\frac{\tau}{m}\right)^{1/2} \qquad (12.11)$$

m è la densità lineare della corda (Kg/m), tesa con tensione τ(N).

$$\text{— onde in un gas (ideale)} \quad v = \left(\frac{\gamma P}{\varrho}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma RT}{M}\right)^{1/2} \qquad (12.12)$$

γ è il rapporto tra i calori specifici del gas, p la pressione, T la temperatura assoluta, M la massa molecolare, R la costante dei gas. La relazione tra pressione istantanea p e spostamento dalla posizione di equilibrio ξ è $p - p_0 = -\gamma p_0 \partial\xi/\partial x$, se p_0 è la pressione del gas non perturbato.

Vale sempre la relazione $v = \lambda\nu$ tra velocità di propagazione, lunghezza d'onda e frequenza $\nu = \omega/2\pi$.

12d. Quando un'onda elastica longitudinale che si propaga con velocità v lungo una sbarra raggiunge un estremo oppure quando un'onda trasversale in una corda raggiunge un estremo, e questo estremo è fisso, dalla reazione del

vincolo ha origine un'onda riflessa che si propaga in verso opposto (si veda allo scopo il problema 12.16). Se $\xi = \xi_0 \mathrm{sen} 2\pi(t/T - x/\lambda)$ è l'equazione dell'onda incidente, l'onda riflessa in $x = 0$ si scrive $\xi_R = -\xi_0 \mathrm{sen} 2\pi(t/T + x/\lambda)$; dall'interferenza di queste due onde *coerenti* si ottiene

$$\xi_{st} = \xi + \xi_R = -2\xi_0 \mathrm{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} = A(x) \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad .$$

Un'espressione di questo tipo non rappresenta un'onda che si propaga perché non compaiono più le espressioni $(t/T \pm x/\lambda)$, bensì un'*onda stazionaria*. I singoli punti del mezzo oscillano tutti con lo stesso periodo $T = \omega/2\pi = \lambda/v$, ma con ampiezza $A(x)$ funzione sinusoidale della posizione. Esistono punti di ampiezza nulla, detti *nodi*, e punti di ampiezza massima $2\xi_0$, detti *ventri*, determinati dalle condizioni

$$\textit{nodi} \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = K\pi \quad \Rightarrow \quad x = K \frac{\lambda}{2}$$

$$K = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

$$\textit{ventri} \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = (2K+1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (2K+1) \frac{\lambda}{4}$$

In particolare l'estremo fisso è un nodo; due nodi o due ventri consecutivi distano di $\lambda/2$, un nodo e un ventre di $\lambda/4$.

Una trattazione analoga vale quando l'estremo a cui avviene la riflessione è libero; si ha allora $\xi_R = \xi_0 \mathrm{sen} 2\pi(t/T + x/\lambda)$, $\xi_{st} = 2\xi_0 \cos 2\pi x/\lambda$ $\mathrm{sen} 2\pi\, t/T = B(x) \mathrm{sen} 2\pi\, t/T$, e le posizioni dei nodi e dei ventri sono invertite:

$$\textit{nodi} \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = (2K+1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (2K+1) \frac{\lambda}{4} \quad ,$$

$$\textit{ventri} \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = K\pi \quad \Rightarrow \quad x = K \frac{\lambda}{2} \quad .$$

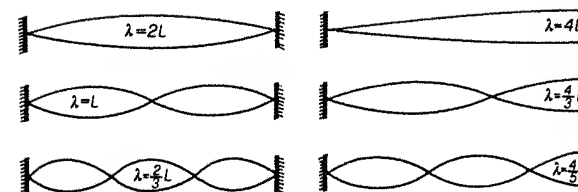
L'estremo libero questa volta è un ventre.

In un sistema fisico reale il mezzo in cui avviene la propagazione è limitato per cui si hanno riflessioni multiple delle onde ai due estremi e il regime di onda stazionaria si stabilisce solo se la lunghezza L del sistema è tale da garantire sfasamenti tra le varie onde riflesse pari a $2K\pi$; ciò avviene solo se gli estremi corrispondono a nodi o ventri e si hanno i due casi possibili

$$\textit{estremi dello stesso tipo} \quad L = K \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu = K \frac{v}{2L} \quad , \qquad (12.13)$$

$$\textit{estremi di tipo diverso} \quad L = (2K+1) \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \nu = (2K+1) \frac{v}{4L} \quad . \qquad (12.14)$$

Quando una di tali condizioni è soddisfatta si dice che il sistema è in *risonanza*; sono permesse solo determinate frequenze di vibrazione: la più piccola è chiamata *frequenza fondamentale*, le altre *armoniche superiori*.



Le stesse considerazioni valgono per un'onda di pressione che si propaga lungo una colonna di gas, ad esempio in un canna d'organo. Nel punto in cui l'aria viene soffiata nella canna c'è un nodo di pressione nel gas; se la canna è aperta, c'è un nodo di pressione anche all'altro estremo e siamo nelle condizioni (12.13); se invece è chiusa, nell'estremo c'è un massimo di pressione e ricadiamo nelle (12.14).

Onde stazionarie possono essere prodotte anche quando un'onda elettromagnetica piana polarizzata rettilineamente $E_y = E_0 \mathrm{sen} 2\pi(t/T - x/\lambda)$ viene riflessa da una superficie metallica; si hanno le espressioni

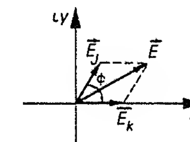
$$E_y = 2E_0 \mathrm{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad , \quad B_z = \frac{2E_0}{c} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad . \qquad (12.15)$$

Precisando quanto ricordato nel paragrafo 12c., fu con un esperimento di questo tipo che Hertz nel 1888 mise in evidenza l'esistenza delle onde elettromagnetiche.

12e. In questo capitolo e nel successivo dovremo più volte eseguire somme di una serie costituita da un numero finito o infinito di campi elettrici che giacciono nel medesimo piano, hanno la stessa frequenza e sono sfasati l'uno rispetto al successivo della serie di una quantità ϕ. Ci serviremo allo scopo della rappresentazione simbolica, o complessa, già introdotta nel capitolo ottavo per lo studio delle correnti alternate.

Un campo $\mathbf{E}_j$, avente lo stesso modulo di un campo $\mathbf{E}_k$ e una differenza di fase ϕ rispetto a questo, si rappresenta così:

$$\mathbf{E}_j = e^{i\phi}\, \mathbf{E}_k \quad .$$



Geometricamente si ha la situazione della figura: la somma di $\mathbf{E}_j$ e di $\mathbf{E}_k$ allora si scrive

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_j + \mathbf{E}_k = (1 + e^{i\phi})\, \mathbf{E}_k \quad .$$

Il quadrato del modulo di $\mathbf{E}$ si ottiene moltiplicando $\mathbf{E}$ per il suo complesso coniugato $\mathbf{E}^* = (1 + e^{-i\phi})\, \mathbf{E}_k^*$:

$$E^2 = E^* E = (1 + e^{-i\phi})\,(1 + e^{i\phi})\, E_k^2 =$$

$$= 2(1 + \cos\phi)\, E_k^2 = 4E_k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \quad .$$

Estendiamo il procedimento a N campi $\mathbf{E}_i$, tutti di modulo E e sfasati l'uno rispetto al successivo di ϕ:

$$\mathbf{E}_R^N = \mathbf{E} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_{N-1} = \mathbf{E} + e^{i\phi}\mathbf{E} + e^{2i\phi}\mathbf{E} + \ldots + e^{(N-1)i\phi}\mathbf{E} =$$
$$= (1 + e^{i\phi} + e^{2i\phi} + \ldots + e^{(N-1)i\phi})\ \mathbf{E} \quad .$$

La somma dei primi N termini della serie $1 + z + z^2 + \ldots$ di ragione $|z| \leq 1$ è $(1 - z^N)/(1 - z)$; pertanto

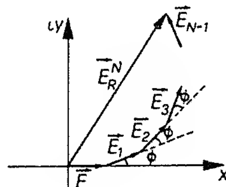
$$\mathbf{E}_R^N = \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}\ \mathbf{E} \quad . \qquad (12.16)$$

Anche per il modulo si ripete il procedimento visto prima:

$$(E_R^N)^2 = \frac{(1 - e^{-iN\phi})\ (1 - e^{iN\phi})}{(1 - e^{-i\phi})\ (1 - e^{i\phi})}\ E^2 = \frac{\text{sen}^2 \dfrac{N\phi}{2}}{\text{sen}^2 \dfrac{\phi}{2}}\ E^2 \quad . \qquad (12.17)$$

Quando N tende all'infinito la (12.16) diviene

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{1 - e^{i\phi}}\ \mathbf{E} \qquad (12.18)$$

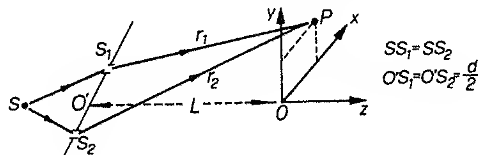


in quanto per la serie geometrica sopra ricordata

$$\sum_0^{\infty}{}_n\ z^n = \frac{1}{1 - z} \quad .$$

* * *

12.1. ***Un fascio di luce monocromatica (λ_0 = 400 nm) proveniente da una sorgente puntiforme S incide su uno schermo opaco nel quale sono praticati due fori S_1 e S_2, di diametro confrontabile con λ_0; i fori sono equidistanti dalla sorgente e la loro distanza mutua è d = 0.5 mm. Su un secondo schermo, parallelo a quello opaco da cui dista L = 100 cm, si osserva una serie di righe chiare e scure. Determinare la posizione di queste righe sullo schermo. Si assuma di poter considerare ovunque n = 1 (¹).***



(¹) Ciò è vero a rigore solo nel vuoto, tuttavia in molti problemi si può pensare che il mezzo con $n = 1$ sia l'aria il cui indice di rifrazione a 20 °C e 1 atm è $n = 1\ 003$

Sullo schermo Oxy della figura si osserva l'interferenza delle onde emesse dalle due sorgenti elementari coerenti S_1 e S_2. L'intensità in un punto $P(x, y)$ dipende dalla differenza dei cammini $\Delta r = r_2 - r_1$ compiuti dalle onde. Risulta:

$$r_1 = \left[L^2 + y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$
$$r_2 = \left[L^2 + y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad r_2^2 - r_1^2 = 2xd \quad .$$

Nell'ipotesi che d sia molto piccolo rispetto a L e che lo stesso valga per x (osservazione nella zona centrale, sull'asse dei fori), $r_1 + r_2 = 2L$ e quindi

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_1 + r_2} = \frac{xd}{L} \quad .$$

Detto n l'indice di rifrazione del mezzo, in base a (12.7) la differenza di fase in P vale

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\ n\,\Delta r = \frac{2\pi}{\lambda_0}\ \frac{nxd}{L} \quad . \qquad (a)$$

Per il calcolo dell'intensità si può inoltre fare l'ipotesi che le onde provenienti da S_1 e S_2 e dirette verso P si propaghino lungo la stessa direzione, le intensità I_1 e I_2 delle due sorgenti in questa direzione sono allora eguali, per il principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff, e si può scrivere, ricordando (12.2),

$$I = 4 I_1 \cos^2\left(\frac{\pi n x d}{\lambda_0 L}\right) \quad .$$

Si hanno massimi e minimi quando.

$$\text{max} \quad n\,\Delta r = K\lambda_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda_0 L}{nd}\ K \qquad (b)$$

$$\text{min} \quad n\,\Delta r = (2K + 1)\ \frac{\lambda_0}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda_0 L}{2nd}\ (2K + 1) \qquad (c)$$

con $K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (¹). Poiché nell'approssimazione fatta l'intensità non dipende da y, essa è la stessa in tutti i punti che giacciono su rette parallele all'asse y. È chiaro inoltre che se sostituiamo alla sorgente puntiforme una sorgente estesa parallela all'asse y, come per esempio una fenditura illuminata, e ai due fori due fenditure esse pure parallele all'asse y, le considerazioni non cambiano

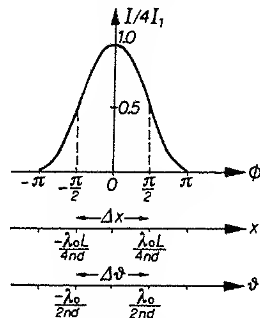
In conclusione, sullo schermo si vede una serie di bande luminose, dette *frange chiare*, separate da una serie di zone scure, chiamate *frange scure*. I centri delle frange dello stesso tipo sono equispaziati della distanza $\lambda_0 L/nd$.

(¹) Nei problemi successivi sarà spesso sottinteso che K è un numero intero, si faccia attenzione a non confondere questo simbolo (maiuscolo) con quello (minuscolo) della grandezza $k = 2\pi/\lambda$, per quanto la differenza risulterà sempre evidente dal contesto

Come valutazione della *larghezza di una frangia chiara* si può assumere

$$\Delta x = \frac{\lambda_0 L}{2nd} \quad , \tag{d}$$

cioè la semidistanza tra due minimi adiacenti a un massimo. In figura è rappresentato l'andamento dell'intensità nell'intorno del punto $x = 0$: essa si annulla ai lati del massimo in due punti simmetrici che distano da questo Δx. Tale andamento si ha nell'intorno di ogni massimo; però l'intensità non è la stessa, ma diminuisce all'aumentare di x in quanto in tal caso aumentano sia la distanza r che l'inclinazione sotto cui il punto P è visto da S_1 e S_2 e quindi, secondo il principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff, diminuisce l'ampiezza dell'onda emessa verso P dalle sorgenti.



Oltre a dare la posizione su uno schermo si usa spesso definire in questo dispositivo, e in altri simili, gli angoli rispetto alla direzione O'O in corrispondenza ai quali si osservano i massimi e i minimi di intensità. Restando entro i limiti delle approssimazioni fatte, al punto di coordinata x corrisponde l'angolo $\theta = x/L$ e dalle (b) e (c) si ha

$$\max \quad \theta = \frac{K\lambda_0}{nd} \quad , \quad \min \quad \theta = \frac{(2K+1)\lambda_0}{2nd} \quad ; \tag{e}$$

come *larghezza angolare* di una frangia si definisce la quantità

$$\Delta \theta = \frac{\lambda_0}{2nd} \quad . \tag{f}$$

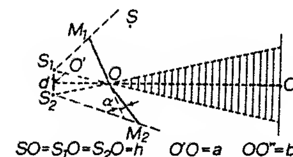
Passando al calcolo numerico, si è detto che $n = 1$ per cui $\lambda_0 L/d = 0.8$ mm e i massimi hanno le ascisse $0, \pm 0.8, \pm 1.6, \pm 2.4, \ldots$ mm. Le larghezze sono

$$\Delta x = 0.4 \text{ mm} \quad , \quad \Delta\theta = 4 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 0.023° \quad .$$

L'esperimento descritto è stato condotto da T. Young nel 1802 e il dispositivo è detto *fori di Young*; esso ha avuto una grande importanza storica per stabilire la natura ondulatoria della luce. Nel capitolo sui fenomeni di diffrazione discuteremo come si modificano le conclusioni ora raggiunte per tener conto della larghezza finita delle fenditure.

12.2. ***Un fascio di luce monocromatica ($\lambda_0 = 400$ nm) proveniente da una sorgente puntiforme S incide su due specchi piani M_1 e M_2 (vedi figura). Gli specchi, ortogonali al disegno, formato tra loro un angolo $\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ rad. La distanza di S dallo spigolo di contatto r degli specchi, di traccia O, è $h = 5$ cm. Su uno schermo, posto a distanza $b = 95$ cm da r e in un***

piano ad esso parallelo, si osservano una serie di frange chiare e scure, del tipo di quelle prodotte con il dispositivo di Young. Determinare la posizione di queste frange e la loro larghezza. Si consideri $n = 1$ ovunque.



Le immagini di S date da M_1 e M_2 sono due *sorgenti virtuali* S_1 e S_2, poste nei punti simmetrici di S rispetto ai piani degli specchi. Le due sorgenti sono coerenti in quanto ottenute dalla suddivisione del fronte d'onda. La distanza tra le sorgenti è $d = 2h \operatorname{sen} \alpha$ mentre la distanza O'O'' è $L = a + b = h\cos\alpha + b$. Ma l'angolo α è molto piccolo per cui

$$d = 2h\alpha = 0.5 \text{ mm} \quad , \quad L = h + b = 1 \text{ m} \quad .$$

Nella zona tratteggiata, comune alle onde emesse da S_1 e S_2, si osserva interferenza: il sistema è del tutto equivalente al dispositivo di Young descritto nel problema 12.1; con lo schermo parallelo alla congiungente S_1S_2 si ottiene lo stesso sistema di frange. Se alla sorgente S si sostituisce una sorgente estesa, come una fenditura illuminata parallela a r, quanto detto conserva la sua validità.

Il dispositivo descritto è noto come *specchi di Fresnel*.

12.3. ***In un dispositivo di Young in aria ($n = 1$) la distanza tra le fenditure è $d = 0.1$ mm e lo schermo dista $L = 20$ cm. Illuminando con luce monocromatica si osserva in particolare che la distanza tra i due massimi di ordine $K = 10$ è 24 mm. Calcolare la lunghezza d'onda della luce incidente e la larghezza delle frange luminose. Il dispositivo viene successivamente immerso in acqua ($n = 1.33$): descrivere come varia il sistema di frange osservato sullo schermo, calcolando le nuove posizioni dei massimi e la loro larghezza.***

Dalla (b) del problema 12.1 si ricava che le posizioni dei due massimi di ordine 10 sono $x_1 = -10\ \lambda_0 L/nd$ e $x_2 = 10\lambda_0 L/nd$ per cui $x_2 - x_1 = 20\lambda_0 L/nd$ e quindi

$$\lambda_0 = \frac{nd(x_2 - x_1)}{20L} = 600 \text{ nm} \qquad (n = 1) \quad .$$

La larghezza delle frange è data dalla (d), sempre del problema 12.1:

$$\Delta x = \frac{\lambda_0 L}{2nd} = 0.6 \text{ mm} \quad .$$

Col dispositivo di Young si possono dunque misurare le lunghezze d'onda; la misura non risulta molto precisa ($\Delta\lambda/\lambda \sim 1\%$) principalmente a causa del fatto che le frange non sono sottili. Vedremo in seguito altri dispositivi interferenziali che permettono di eseguire misure assai più accurate.

Quando l'indice di rifrazione del mezzo diviene n l'ascissa di un massimo viene moltiplicata per $1/n$ rispetto al caso $n = 1$: qui, $(x_2 - x_1)_n = (x_2 - x_1)/n = 18$ mm. La larghezza delle frange varia dello stesso fattore. $(\Delta x)_n = \Delta x/n = 0.45$ mm. Pertanto in un mezzo di indice n il sistema di frange si contrae rispetto al caso $n = 1$ e le frange diventano più strette; vedremo che questa è una caratteristica comune di tutti i dispositivi interferenziali. Viceversa, dalla misura della posizione delle frange prima in aria e poi in un mezzo diverso è possibile risalire all'indice n del mezzo; tale metodo non presuppone la conoscenza delle caratteristiche del dispositivo in quanto quella che si esegue è una misura di n relativa (all'aria) e non assoluta.

12.4. ***Il dispositivo di Young, con le caratteristiche date nel problema* 12.3, *è illuminato da una sorgente di luce naturale nella quale sono presenti con la stessa intensità tutte le lunghezze d'onda dal rosso* $\lambda_R = 700$ nm *al violetto* $\lambda_V = 400$ nm. *Sullo schermo in corrispondenza del massimo centrale si osserva una frangia bianca e una successione di frange colorate. Descrivere la formazione di queste frange, specificando la successione dei colori sullo schermo.***

Il centro appare bianco in quanto la differenza dei cammini per le onde emesse da S_1 e S_2 è nulla per tutte le lunghezze d'onda e quindi esso è un punto di massimo per ogni λ. Una diversa posizione x sarà di massimo per le onde la cui lunghezza d'onda soddisfa alla $\lambda = nxd/KL$ $(K = 1, 2, ..)$ e di minimo nel caso in cui $\lambda = 2nxd/[(2K+1)L]$ $(K = 0, 1, 2, ...)$, secondo le (b) e (c) del problema 12.1. Possiamo dire in generale che le frange colorate sono determinate punto per punto dalla sottrazione dallo spettro delle lunghezze d'onda che interferiscono con elisione e dalla accentuazione di quelle per le quali tale posizione è di massimo.

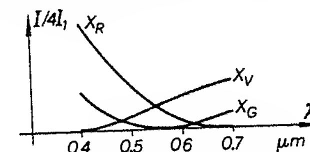
Per capire meglio qual è la successione dei colori sullo schermo notiamo che, una volta fissato un certo valore di x, la variazione dell'intensità luminosa in quel punto in funzione di λ, ovvero la composizione spettrale della luce in quel punto, è data dalla relazione $I = 4I_1 \cos^2(\pi nxd/L\lambda)$, secondo il problema 12.1. Consideriamo ora tre punti nell'intorno del massimo centrale: il primo che sia di minimo per $\lambda_V = 400$ nm, il secondo per $\lambda_G = 550$ nm, il terzo per $\lambda_R = 700$ nm. Facendo uso della (c) del problema 12.1 e dei dati del problema 12.3 abbiamo:

$$x_V = \frac{L\lambda_V}{2d} = 0.4 \text{ mm} \quad , \quad x_G = \frac{L\lambda_G}{2d} = 0.55 \text{ mm} \quad , \quad x_R = \frac{L\lambda_R}{2} = 0.7 \text{ mm}$$

Il minimo è raggiunto prima per le lunghezze d'onda minori, cioè per il violetto, che deve così risultare assente subito ai lati della frangia bianca centrale. Sostituiamo i valori trovati per le ascisse dei minimi nell'espressione dell'intensità (12.2); troviamo

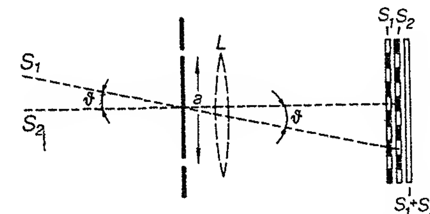
$$\frac{I_V}{4I_1} = \cos^2 \frac{0.2\pi}{\lambda} \quad , \quad \frac{I_G}{4I_1} = \cos^2 \frac{0.275\pi}{\lambda} \quad , \quad \frac{I_R}{4I_1} = \cos^2 \frac{0.35\pi}{\lambda} \quad ,$$

se λ è misurato in µm. Queste funzioni, riportate in figura, danno la composizione spettrale della luce nei tre punti (x fisso, λ variabile). Nel punto $x_V = 0.4$ mm, il più vicino alla riga bianca, sono praticamente assenti le lunghezze d'onda comprese nell'intervallo 400-500 nm, mentre predominano quelle tra 600 e 700 nm. In $x_G = 0.55$ mm abbiamo la soppressione della banda 400-600 nm; infine, nel punto $x_R = 0.7$ mm, mancano le λ tra 600 e 700 nm e sono predominanti quelle tra 400 e 500 nm.



La successione di colori che ha origine da questa situazione è stata data da Newton ed è nota come *scala di Newton*; dopo il bianco centrale si trova bianco-marrone, rosso, blu, verde, arancione, rosso, violetto. Questi colori così ottenuti si dicono, a causa del meccanismo che abbiamo esposto, *colori di sottrazione*.

12.5. ***L'interferometro di Fizeau per la misura della separazione angolare di due sorgenti lontane, ad esempio due stelle, consta di due fenditure molto sottili, distanti a, poste di fronte a una lente convergente L di grande apertura D. Si supponga di puntare il sistema su una stella S_1 e che una seconda stella S_2 invii luce nello strumento ad angolo θ rispetto all'asse. La sovrapposizione delle due figure di interferenza è osservata su uno schermo posto nel piano focale della lente L. Ammesso che l'intensità delle due sorgenti sia eguale dimostrare che è possibile far sì che il risultato della sovrapposizione sia la scomparsa della figura di interferenza e ricavare una misura della separazione angolare θ tra le due stelle. Calcolare la minima distanza angolare che può essere misurata con il telescopio di Monte Wilson, il cui obiettivo L ha un'apertura D* = 250 cm, *nell'ipotesi che la lunghezza d'onda della luce incidente sia* $\lambda = 550$ nm.**



Con riferimento alla figura, la prima sorgente S_1 produce sullo schermo una figura di interferenza centrata sull'asse e che consiste di una serie di frange chiare e scure equispaziate. La posizione angolare alla quale si osserva il minimo di ordine K si ricava dalla (e) del problema 12.1: $\theta_K = (2K+1)\lambda/2a$. La seconda sorgente S_2 produce un eguale sistema di frange con centro nel punto dello schermo la cui distanza dall'asse è sottesa dall'angolo θ. È evidente che se il centro cade dove c'è il minimo di ordine K della figura di interferenza di S_1 i due sistemi di frange si cancellano a vicenda: le figure di interferenza scompaiono e lo schermo appare illuminato uniformemente (se le intensità delle sorgenti sono eguali). In generale questo fatto non succede; però è possibile, fissato θ, spostare la posizione dei minimi di S_1 variando la distanza a tra le fenditure, simmetricamente rispetto all'asse

così che i centri dei sistemi di frange non cambiano, fino a che la condizione suddetta sia verificata. Supponiamo di trovare una distanza a_1 per cui

$$\theta = \theta_K = \frac{(2K+1)\lambda}{2a_1} \quad . \tag{a}$$

L'angolo θ non è ancora noto perché bisognerebbe conoscere K; se però si aumenta la distanza fra le fenditure le figure di interferenza si restringono e, per quella di S_1, si trova un valore a_2 della distanza per cui dove c'era il minimo di ordine K c'è il minimo di ordine $K+1$; quindi

$$\theta = \theta_{K+1} = \frac{[2(K+1)+1]\lambda}{2a_2} \quad . \tag{b}$$

In questo processo si vede prima ricomparire il doppio sistema di frange e poi lo si vede sparire di nuovo. Confrontando (a) e (b) si ottiene $K = (3a_1 - a_2)/2(a_2 - a_1)$ e sostituendo in (a) si trova

$$\theta = \frac{\lambda}{a_2 - a_1} \quad . \tag{c}$$

È dunque possibile, agendo sulla distanza tra le fenditure, misurare la separazione angolare θ tra le due stelle. La situazione estrema si verifica quando $a_2 = D$, apertura della lente, e il primo minimo della figura di S_1 coincide col massimo centrale di S_2, cioè $K = 0$. In tal caso

$$\theta = \frac{3\lambda}{2D} = 3.3 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 1.89 \cdot 10^{-5} \text{ gradi} = 0.068 \text{ secondi},$$

$$a_1 = \frac{a_2}{3} = \frac{D}{3} = 83.33 \text{ cm} \quad \left(\Rightarrow \quad a_2 - a_1 = \frac{2}{3}\, D\right) \quad .$$

L'angolo minimo misurabile, cioè il *potere separatore angolare*, si ottiene invece direttamente dalla (a) ponendo $a_1 = D$ e $K = 0$:

$$\theta_{min} = \frac{\lambda}{2D} = 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0.63 \cdot 10^{-5} \text{ gradi} = 0.023 \text{ secondi.}$$

12.6. ***Due sorgenti acustiche eguali coerenti emettono onde sferiche sinusoidali la cui ampiezza a distanza di 1 m dalla sorgente vale $\xi_0 = 10^{-5}$ m e la cui frequenza è $\nu = 688$ Hz. Le sorgenti distano $a = 1$ m e sono contenute in aria a pressione atmosferica e temperatura $t_A = 20°C$; la velocità del suono in tali condizioni è $v_A = 344$ m/s. Calcolare la potenza W_1 di ciascuna sorgente e, in funzione dell'angolo θ formato dalla direzione di rivelazione con la normale alla linea congiungente le due sorgenti, l'intensità $I(\theta)$ misurata a distanza r dalle sorgenti molto grandi rispetto ad a. Determinare come varia $I(\theta)$ quando la temperatura dell'aria scende a $t_B = -50°C$.***

Si tratta di un problema di interferenza tra due sorgenti coerenti del tutto analogo a quelli finora trattati. L'intensità in un punto P dipende dalla differenza dei cammini compiuti dalle due onde. Nell'ipotesi $r \gg a$, con riferimento alla figura, la differenza dei cammini è $\Delta r = a \operatorname{sen}\theta$ a cui corrisponde, secondo (12.7), la differenza di fase $\phi = (2\pi/\lambda) a \operatorname{sen}\theta$. L'intensità risultante, per due sorgenti eguali coerenti, è data da (12.2):

$$I(\theta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\phi}{2} = 4I_1 \cos^2 \left(\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)$$

e si hanno massimi e minimi in base alle solite condizioni.

$$\text{max} \quad \phi = 2K\pi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = K\,\frac{\lambda}{a} \ ,$$

$$\text{min} \quad \phi = (2K+1)\,\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = (2K+1)\,\frac{\lambda}{2a} \ .$$

Nel caso numerico proposto, dalla relazione generale $v = \lambda\nu$ ricaviamo $\lambda_A = v_A/\nu = 0.5$ m; $a = 1$ m e in definitiva abbiamo la tabella seguente.

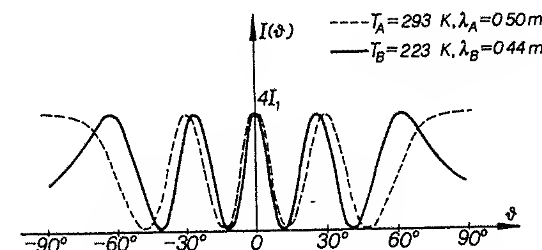
K_{max}	0	1	2
sen θ	0	0.5	1
θ	0°	30°	90°

K_{min}	0	1
sen θ	0.25	0.75
θ	14.5°	48.6°

L'andamento dell'intensità in funzione di θ, con $a/\lambda_A = 2$, è

$$\frac{I}{4I_1} = \cos^2(2\pi \operatorname{sen}\theta) \tag{a}$$

ed è rappresentato in figura (linea tratteggiata). Il numero limitato di massimi e minimi osservati dipende dal valore del rapporto λ/a, grande rispetto a quelli incontrati con onde luminose; per il resto è chiaro che i risultati sono gli stessi.



Quando cambia la temperatura dell'aria cambia la velocità di propagazione delle onde data da (12.12) e di conseguenza anche la lunghezza d'onda:

$$\frac{v_B}{v_A} = \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{1/2} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} \Rightarrow \lambda_B = \lambda_A \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{1/2} = 0.436 \text{ m} \quad ;$$

pertanto $a/\lambda_B = 2.29$ e la (a) diventa

$$\frac{I}{4I_1} = \cos^2(2.29\pi \operatorname{sen}\theta)$$

che è la linea continua della figura in cui è rappresentata (a). La diminuzione di λ comporta la stessa contrazione della figura di interferenza discussa nel problema 12.3.

La potenza W_1 di ogni sorgente è l'energia emessa per unità di tempo e si ottiene integrando l'intensità su una sfera di raggio r; per l'intensità di una sorgente usiamo la (12.9), con ξ_0/r come espressione dell'ampiezza:

$$I_1 = \frac{1}{2} \varrho\omega^2 \frac{\xi_0^2}{r^2} v \Rightarrow W_1 = \oint I_1 d\Sigma = I_1 \oint d\Sigma = 4\pi r^2 I_1$$

$$= 2\pi\varrho\omega^2 v\xi_0^2 = 4.96 \text{ W} \quad ,$$

essendo $\varrho = 1.23 \text{ Kg/m}^3$ e $\omega = 2\pi\nu = 4.32 \cdot 10^3$ rad/s Se vogliamo calcolare la potenza totale dobbiamo procedere in modo analogo:

$$dW = I(\theta) d\Sigma \Rightarrow W = \oint 4I_1 \cos^2\left(\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right) 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta$$

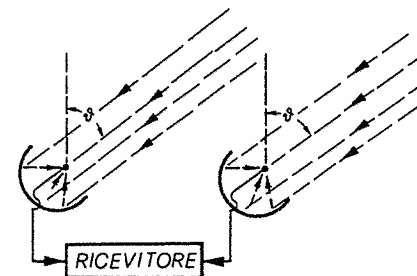
secondo la nota alla fine del primo capitolo Il risultato è

$$W = 8\pi r^2 I_1 \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right) \operatorname{sen}\theta d\theta = 8\pi r^2 I_1 = 2W_1 \quad .$$

Come era da attendersi la potenza totale misurata su una qualunque superficie sferica ($r \gg a$) che racchiude le sorgenti è la somma delle singole potenze. Però, nel caso di sorgenti incoerenti ogni elemento di superficie sferica è attraversato dalla stessa intensità $I = 2W/4\pi r^2$; invece, se le sorgenti sono coerenti, avvengono fenomeni di interferenza e l'energia viene ripartita in maniera non uniforme, con densità maggiore in alcune regioni (dove cadono i massimi) piuttosto che in altre.

12.7. ***Un interferometro usato in radioastronomia consiste di due antenne distanti a, che stanno nel fuoco di due riflettori a forma di paraboloide il cui compito è di convogliare sulle antenne le onde radio provenienti da sorgenti poste a grande distanza. Le antenne possono essere orientate in direzioni diverse, ma restano sempre parallele tra loro e in un medesimo piano; i segnali ricevuti vengono mescolati in un ricevitore. Calcolare come varia l'intensità del segnale $R(\theta)$ in funzione dell'angolo θ tra la direzione di***

incidenza delle onde e la normale alla congiungente delle antenne. Applicare i risultati al radiointerferometro di Green Bank in Virginia (USA), in cui a può valere al massimo 2700 m e che è stato costruito per operare su una lunghezza d'onda $\lambda = 11$ cm. Discutere la risoluzione angolare dello strumento.



Le due antenne, eccitate dall'onda radio emessa da una sorgente, rispondono con segnali le cui ampiezze sono eguali e che hanno una differenza di fase costante nel tempo in quanto generati da una medesima sorgente. La differenza di fase dipende dalla differenza di cammino che l'onda radio compie per raggiungere le due antenne. Per una generica direzione di incidenza θ si vede dalla figura che la differenza di cammino è $a \operatorname{sen}\theta$ per cui lo sfasamento corrispondente è $\phi = (2\pi/\lambda) a \operatorname{sen}\theta$. Il problema è dunque ancora quello della somma di due oscillazioni (i segnali elettrici delle antenne) di eguale ampiezza R_1 e differenza di fase costante nel tempo; la risposta in funzione dell'angolo è

$$R(\theta) = 4R_1 \cos^2\left(\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right) \quad ,$$

come si è visto nel problema 12.6, che è in un certo senso il caso inverso di questo. In particolare $R(\theta)$ risulta massima in corrispondenza agli angoli di incidenza che soddisfano alla relazione

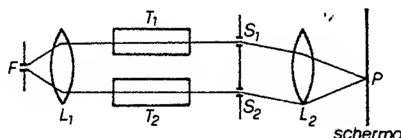
$$\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = K\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = K\frac{\lambda}{a} \Rightarrow \theta = K\frac{\lambda}{a} \quad ,$$

dove l'ultimo passaggio è valido se $\lambda \ll a$, come avviene nell'esempio citato. La distanza angolare tra due massimi consecutivi e la larghezza angolare del massimo del segnale sono:

$$\theta_{K+1} - \theta_K = \frac{\lambda}{a} = 4.1 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \quad , \quad \Delta\theta = \frac{\lambda}{2a} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 4.1 \text{ secondi.}$$

Un'emissione coerente proveniente lungo una determinata direzione dà luogo quindi a una caratteristica struttura interferenziale e la risoluzione angolare è estremamente elevata.

12.8. *Un interferometro per la misura degli indici di rifrazione dei gas è schematizzato in figura. Esso consta di una lente L_1 che trasforma il fascio divergente di luce monocromatica ($\lambda = 600$ nm) proveniente da una sottile fenditura F illuminata in un fascio parallelo; di due tubi uguali T_1 e T_2 a finestre trasparenti di lunghezza $l = 50$ cm; di due fenditure S_1 e S_2, parallele a F, praticate su uno schermo opaco; di una lente L_2 che focalizza su uno schermo la figura di interferenza prodotta da S_1 e S_2. Fatto il vuoto in T_1 e T_2 si osserva un sistema di frange parallele alle fenditure, analogo a quello prodotto dal dispositivo di Young (problema 12.1). Se si riempie T_1 con un gas di indice di rifrazione n si osserva uno spostamento di $N = 10$ frange del sistema. Spiegare il risultato di questa esperienza calcolando n. Supponendo di potere apprezzare al più lo spostamento di una frangia calcolare il valore minimo di n misurabile con questo strumento.*



Con T_1 e T_2 vuoti le onde che provengono da S_1 e S_2 interferiscono in un punto P dello schermo dando origine a un massimo quando la differenza dei cammini ottici è pari a $\Delta r = K\lambda$ con K intero. Se ora riempiamo T_1 con un gas di indice n la differenza dei cammini ottici delle onde in P aumenta perché i percorsi nei due tubi, geometricamente eguali, non lo sono più fisicamente; l'aumento è pari a $nl - l = (n-1)l$ e quindi in P c'è ancora un massimo se $(\Delta r)' = \Delta r + (n-1)l = K'\lambda$ con K' intero maggiore di K. Al massimo di ordine K si è sostituito quello di ordine K' ovvero tale massimo, che nella situazione con i tubi vuoti era nel punto P', corrispondente a una differenza di cammini ottici $K'\lambda$, si è spostato nel punto P. Il ragionamento è vero per tutti i punti P appartenenti a frange luminose; quindi tutto il sistema di frange si è spostato rigidamente di una quantità

$$N = K' - K = \frac{(n-1)l}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad n = 1 + \frac{N}{l}\lambda \quad . \qquad \text{(a)}$$

Nel nostro caso numerico $n = 1.000012$; se fosse $N = 1$ otterremmo $n - 1 = 1.2 \cdot 10^{-6}$. Con questo strumento è possibile misurare valori di n che differiscono da quello del vuoto per una parte su un milione.

Si vede anche come immettendo successivamente gas in T_1 si possa misurare la variazione dell'indice di rifrazione con la densità del gas; in prima approssimazione la variazione sperimentale è lineare, cioè $n - 1$ è proporzionale alla densità del gas (si veda il problema 12.9).

12.9. *In un interferometro del tipo descritto nel problema 12.8 i tubi T_1 e T_2 sono lunghi $l = 15.023$ cm e sono pieni d'aria. Usando luce corrispondente alla riga del sodio $\lambda = 589.3$ nm si osserva che una variazione isoterma a temperatura ambiente della pressione dell'aria contenuta in T_1 da $p_1 = 60.50 \cdot 10^2$ N/m² a $p_2 = 871.65 \cdot 10^2$ N/m² causa uno spostamento di $N = 60 \pm 0.5$ frange. Determinare l'indice di rifrazione dell'aria alla pressione di 1 atm e dare l'errore sul risultato; si ricorda che 1 atm = $1013.25 \cdot 10^2$ N/m².*

Per risolvere il problema dobbiamo trovare una relazione tra indice di rifrazione e pressione in un gas. Sappiamo (capitolo 10) che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo materiale è $v = c/(\varkappa_e \varkappa_m)^{1/2}$; nell'aria $\varkappa_m = 1$ e quindi $n = c/v = \varkappa_e^{1/2}$. In un gas come l'aria vale inoltre l'equazione di Clausius-Mossotti (3.12) che possiamo porre in forma semplificata $\varkappa_e = 1 + n'\alpha$, dove n' è il numero di molecole per unità di volume e α la polarizzabilità del gas, in quanto $n'\alpha \ll 1$. L'indice di rifrazione vale pertanto $n = (1 + n'\alpha)^{1/2} = 1 + n'\alpha/2$, avendo sviluppato in serie e arrestato lo sviluppo al primo termine, sempre perché $n'\alpha \ll 1$. Poiché n' è proporzionale alla densità e questa alla pressione se T è costante, in conclusione

$$n = 1 + ap \quad \text{ovvero} \quad n - 1 = ap \quad , \qquad \text{(a)}$$

con a costante caratteristica del gas. Questa legge risulta valida entro larghi intervalli di pressione.

Se inizialmente in T_1 e T_2 c'è la stessa pressione, per esempio quella dell'ambiente, le onde che provengono da S_1 e S_2 interferiscono in un punto P dello schermo, dando origine a un massimo se la differenza dei cammini ottici vale $\Delta r = K\lambda$. Portando l'aria in T_1 alla pressione p_1, in P si ha ancora un massimo se

$$\Delta r + [n(p_1) - n(p)]l = K_1\lambda \quad ;$$

quando la pressione in T_1 vale p_2 in P c'è un massimo se

$$\Delta r + [n(p_2) - n(p)]l = K_2\lambda \quad .$$

Se $p_2 > p_1$ dalla (a) risulta $n(p_2) > n(p_1)$ e quindi $K_2 > K_1$; secondo quanto esposto nel problema 12.8 si ha, passando da p_1 a p_2, uno spostamento di N frange determinato da

$$[n(p_2) - n(p_1)]l = (K_2 - K_1)\lambda = N\lambda = a(p_2 - p_1)l \quad .$$

Di qui si ricava

$$a = \frac{N\lambda}{l(p_2 - p_1)} \quad \Rightarrow \quad n = 1 + \frac{N\lambda}{l(p_2 - p_1)}p \quad .$$

Numericamente $a = 2.902 \cdot 10^{-9}$ $(\text{N/m}^2)^{-1}$; per $p = 1$ atm $= 1013.25 \cdot 10^2$ N/m², $n = 1.000294$. L'errore su questa misura è dovuto all'incertezza di mezza frangia nel conteggio dello spostamento delle frange; siccome $\Delta(n-1)/(n-1) = \Delta N/N = 8.3 \cdot 10^{-3}$, concludiamo che $(n - 1) = (294 \pm 2) \cdot 10^{-6}$.

12.10. ***Si consideri il dispositivo del problema 12.8 senza i tubi T_1 e T_2. Dopo aver osservato il sistema di frange prodotto in tale situazione si introduce davanti al foro S_1 una sottile lamina di spessore l di una sostanza trasparente con indice $n = 1.55$; si nota uno spostamento di 20 ± 0.5 frange. Calcolare lo spessore l della lamina e l'errore sul risultato, sapendo che la fenditura è illuminata da luce monocromatica con $\lambda = 550$ nm.***

Procedendo come nel problema 12.8 si arriva alla relazione (a); posto eguale ad 1 l'indice dell'ambiente e risolvendo in l,

$$l = \frac{\lambda N}{n-1} = 20\ \mu\text{m} \quad .$$

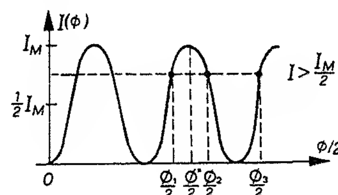
L'errore percentuale è $\Delta l / l = \Delta N / N = 2.5 \cdot 10^{-2}$, cioè $l = (20.0 \pm 0.5)\ \mu$m.

Riassumendo quanto visto nei problemi 12.8, 12.9 e 12.10 possiamo dire che il dispositivo studiato si presta molto bene a misure di indice di rifrazione dei gas in funzione della pressione, con errore su $n-1$ dell'ordine del percento; lo stesso si presta a misure di piccoli spessori di materiali trasparenti con indice di rifrazione noto. Infine, dalla (a) del problema 12.8 si vede che facendo variare λ e misurando per ogni suo valore N si può misurare $n(\lambda)$, cioè la dispersione dei mezzi, con buona precisione.

12.11. ***Con la stessa disposizione del problema 12.10 si supponga che la lamina, di indice di rifrazione incognito, abbia spessore d variabile. Detta I_M l'intensità del massimo centrale in assenza della lamina, si nota che per $d = d_1$ l'intensità al centro vale $I > 0.5\ I_M$ e che aumentando d i valori immediatamente successivi per i quali si osserva ancora I sono d_2 e d_3 con $d_2 - d_1 = 1\ \mu$m e $d_3 - d_1 = 2.5\ \mu$m. Supponendo $\lambda = 580$ nm calcolare l'indice di rifrazione della lamina e il rapporto I/I_M.***

Per un certo spessore d la differenza di fase ϕ con la quale le due onde emesse dalle fenditure S_1 e S_2 raggiungono il centro O è data da $\phi = (2\pi/\lambda)\ (n-1)d$ e l'intensità in O si scrive, secondo (12.2),

$$I = I_M \cos^2 \frac{\phi}{2} = I_M \cos^2 \frac{\pi(n-1)d}{\lambda} \quad .$$



Al variare di d si ha l'andamento riportato in figura. Se tracciamo la retta $I = \text{cost}$ questa interseca il grafico due volte nell'intorno di ogni massimo, nel nostro caso per gli spessori d_1 e d_2; il terzo spessore d_3 cade nell'intorno del massimo successivo e, visto che la funzione $(\text{coseno})^2$ ha periodo π, deve essere

$$\frac{\phi_1}{2} = \frac{\pi(n-1)d_1}{\lambda} \quad , \quad \frac{\phi_3}{2} = \frac{\pi(n-1)d_3}{\lambda} = \frac{\phi_1}{2} + \pi$$

$$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{\lambda}{d_3 - d_1} = 0.23 \quad \Rightarrow \quad n = 1.23 \quad .$$

Passiamo al calcolo dell'intensità: in corrispondenza agli spessori d_1 e d_2 abbiamo

$$I = I_M \cos^2 \frac{\pi(n-1)d_1}{\lambda} = I_M \cos^2 \frac{\pi(n-1)d_2}{\lambda} \quad .$$

I rispettivi sfasamenti ϕ_1 e ϕ_2 sono legati dal fatto di essere simmetrici rispetto al valore $\phi_M = 2K\pi$ per cui si ha il massimo:

$$\frac{\phi_1}{2} = K\pi - \frac{\phi^*}{2} \quad , \quad \frac{\phi_2}{2} = K\pi + \frac{\phi^*}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\phi^*}{2} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{4} = \frac{\pi(n-1)\ (d_2 - d_1)}{2\lambda} = 0.2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I}{I_M} = \cos^2 \frac{\phi_1}{2} = \cos^2 \frac{\phi_2}{2} = \cos^2 \left(K\pi \pm \frac{\phi^*}{2} \right) = \cos^2 \frac{\phi^*}{2} = 0.65$$

12.12. ***Un fascio di luce monocromatica, di intensità $I = 1\ \text{W/cm}^2$, incide normalmente su una lamina sottile a facce piane e parallele di una sostanza trasparente con indice di rifrazione $n = 1.5$. Calcolare come varia l'intensità della luce riflessa al variare dello spessore h della lamina.***

Facciamo uso delle proprietà di riflessione delle onde piane che abbiamo discusso nei problemi 10.8 e 10.9 e riassunto nel paragrafo 11d. Riscriviamo qui le relazioni che ci servono ponendo $n_1 = 1$ e $n_2 = n$, considerando cioè la lamina immersa in aria.

$$\mathbf{E}_p^R = \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \mathbf{E}_p = r_p \mathbf{E}_p \quad , \quad \mathbf{E}_p^T = \frac{2}{n+1}\ \mathbf{E}_p = t_p \mathbf{E}_p \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\mathbf{E}_t^R = -\left(\frac{n-1}{n+1} \right) \mathbf{E}_t = r_t \mathbf{E}_t \quad , \quad \mathbf{E}_t^T = \frac{2}{n+1}\ \mathbf{E}_t = t_t \mathbf{E}_t \quad , \qquad \text{(b)}$$

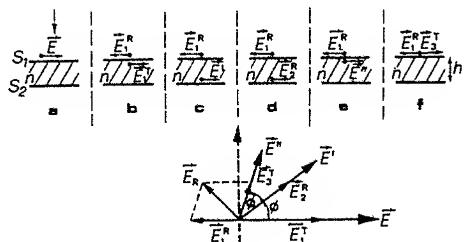
$$R_p = \frac{I_p^R}{I_p} = R_t = \frac{I_t^R}{I_t} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad ,$$

$$T_p = \frac{I_p^T}{I_p} = (1 - R_p) = T_t = \frac{I_t^T}{I_t} = (1 - R_t) = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad , \qquad \text{(c)}$$

$$R = \frac{I_R}{I} = \frac{1}{2}\ (R_p + R_t) = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad ,$$

$$T = \frac{I_T}{I} = 1 - R = \frac{1}{2}\ (T_p + T_t) = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad . \qquad \text{(d)}$$

Manteniamo la distinzione tra $\mathbf{E}_p$ e $\mathbf{E}_t$, anche se per incidenza normale non si può definire il piano di incidenza, in quanto vogliamo fare uso, ora e nei problemi seguenti, della proprietà di considerare un'onda piana non polarizzata come sovrapposizione di due onde incoerenti polarizzate in piani ortogonali che hanno ognuna un'intensità pari a metà di quella incidente.



Studiamo per esempio cosa avviene per l'onda piana $\mathbf{E}_t$ rappresentando in figura tutte le varie fasi del processo e tralasciando per comodità il suffisso t. Poiché dobbiamo eseguire somme di campi $\mathbf{E}$ sfasati facciamo uso della rappresentazione simbolica e del relativo formalismo (paragrafo 12e.).

a) L'onda piana $\mathbf{E}$ incide sulla prima superficie S_1 della lamina.

b) Da $\mathbf{E}$ hanno origine un'onda riflessa nell'aria e un'onda trasmessa nella lamina:

$$\mathbf{E}_1^R = -\frac{n-1}{n+1}\mathbf{E} = r_1\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{E}_1^T = \frac{2}{n+1}\mathbf{E} = t_1\mathbf{E} \quad ;$$

poiché r_1 è negativo l'onda $\mathbf{E}_1^R$ è sfasata di π rispetto a $\mathbf{E}$; $\mathbf{E}_1^T$ ha invece la stessa fase di $\mathbf{E}$ perché t_1 è positivo.

c) L'onda trasmessa si propaga nella lamina e quando giunge alla seconda superficie S_2 ha compiuto un cammino ottico nh; quindi, nel momento in cui tocca S_2, ha una differenza di fase $\phi = 2\pi nh/\lambda_0$ rispetto a $\mathbf{E}$ per cui la scriviamo

$$\mathbf{E}' = e^{i\phi}\mathbf{E}_1^T = e^{i\phi}t_1\mathbf{E} \quad .$$

d) $\mathbf{E}'$ dà origine a un'onda riflessa $\mathbf{E}_2^R$ e una trasmessa $\mathbf{E}_2^T$; l'ampiezza dell'onda riflessa (nella lamina) è legata a $\mathbf{E}'$ da

$$\mathbf{E}_2^R = -\frac{1-n}{1+n}\mathbf{E}' = r_2\mathbf{E}' = r_2 t_1 e^{i\phi}\mathbf{E} \quad ;$$

questa volta infatti l'indice di rifrazione relativo mezzo-aria è $1/n$; essendo $r_2 = -r_1$ maggiore di zero il campo riflesso $\mathbf{E}_2^R$ ha la stessa fase di $\mathbf{E}'$.

e) $\mathbf{E}_2^R$ si propaga e raggiunge la prima superficie S_1 con il valore

$$\mathbf{E}'' = e^{i\phi}\mathbf{E}_2^R = r_2 t_1 e^{2i\phi}\mathbf{E} \quad .$$

f) $\mathbf{E}''$ dà origine a un'onda riflessa (nella lamina) e una trasmessa (nell'aria); l'ampiezza dell'onda trasmessa è legata a $\mathbf{E}''$ dalla (b) ancora con $1/n$ al posto di n:

$$\mathbf{E}_3^T = \frac{2n}{n+1}\mathbf{E}'' = t_2\mathbf{E}'' = r_2 t_1 t_2\, e^{2i\phi}\,\mathbf{E} \quad .$$

Il prodotto $t_1 t_2$ vale $4n/(n+1)^2$, cioè T in base a (c); inoltre $r_2 = -r_1$ e quindi

$$\mathbf{E}_3^T = -r_1 T\, e^{2i\phi}\,\mathbf{E} \quad .$$

Sulla superficie S_1 si sovrappongono così $\mathbf{E}_1^R$ e $\mathbf{E}_3^T$; queste onde sono coerenti, in quanto provengono da un processo di *suddivisione dell'ampiezza* della stessa onda $\mathbf{E}$, e danno luogo pertanto a fenomeni di interferenza. L'ampiezza totale riflessa dalla lamina è

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_1^R + \mathbf{E}_3^T = r_1(1 - Te^{2i\phi})\ \mathbf{E} \quad ;$$

il suo modulo quadrato vale

$$E_R^2 = E_R^* E_R = r_1^2(1 - Te^{-2i\phi})\ (1 - Te^{2i\phi})\ E^2 = R(1 + T^2 - 2T\cos 2\phi)E^2 \quad .$$

Da $T = 1 - R$ e trascurando R^2 rispetto a R si ha finalmente

$$E_R^2 = 2RT(1 - \cos 2\phi)E^2 = 4RE^2\mathrm{sen}^2\phi \quad .$$

Notiamo subito che trascurare R^2 rispetto a R permette di trascurare tutte le successive riflessioni (come quella al punto f), riprenderemo l'argomento nel problema 12.20. La percentuale di energia riflessa risulta allora

$$\frac{I_t^R}{I_t} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T E_R^2\,dt}{\frac{1}{T}\int_0^T E^2\,dt} = 4R_t^2\mathrm{sen}^2\phi \quad ,$$

dove abbiamo ripreso il suffisso t già tralasciato. In modo del tutto analogo si trova $I_p^R/I_p = 4R_p\mathrm{sen}^2\phi$. Complessivamente, essendo nel nostro caso l'intensità totale riflessa dalla lamina eguale a 0.5 $(I_p^R + I_t^R)$ si ottiene il risultato

$$\frac{I_R}{I} = 4R\,\mathrm{sen}^2\phi = 4R\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\,nh\right) \quad . \qquad \text{(e)}$$

Numericamente $R = (n-1)^2/(n+1)^2 = 0.04$ e $I_R = 0.16\ \mathrm{sen}^2\phi$ W/cm^2.

I massimi e i minimi dell'intensità riflessa si hanno quando

$$\text{max} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,nh = (2K+1)\,\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad h = (2K+1)\,\frac{\lambda_0}{4n} \quad , \qquad \text{(f)}$$

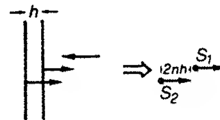
$$\text{min} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,nh = K\pi \quad \Rightarrow \quad h = K\,\frac{\lambda_0}{2n} \quad . \qquad \text{(g)}$$

Detta $\lambda = \lambda_0/n$ la lunghezza d'onda della luce nel mezzo, i massimi corrispondono a spessori pari a $\lambda/4$, $3\lambda/4$, $5\lambda/4$... e i minimi a spessori $\lambda/2$, λ, $3\lambda/2$, ..., ovvero a percorsi $2h$ nella lamina che siano multipli dispari di mezza lunghezza d'onda corrispondono i massimi, a percorsi pari a multipli interi di λ

corrispondono i minimi. Non c'è in questi fatti alcuna contraddizione con quanto visto nei problemi precedenti: alla differenza di fase 2ϕ generata dalla differenza di cammini ottici $2nh$ occorre infatti aggiungere lo sfasamento di π, cioè di $\lambda/2$, che avviene alla riflessione dal mezzo con indice di rifrazione minore a quello con indice di rifrazione maggiore; imponendo $2\phi + \pi = 2K\pi$ si riottiene la (f).

Ricordiamo l'osservazione fatta alla fine del problema 10.9 e la relativa figura: gli sfasamenti subiti da **E** nelle riflessioni sulle due superficie (π su S_1 e zero su S_2) insieme alla considerazione del verso del vettore di Poynting comportano per **B** sfasamenti scambiati, zero su S_1 e π su S_2. Pertanto, anche se avessimo adottato **B** invece di **E** come campo su cui ragionare, nulla sarebbe cambiato nei risultati ottenuti.

La (e) mostra che l'interferenza osservata è eguale a quella che sarebbe prodotta da due sorgenti eguali coerenti, S_1 e S_2 nella figura, poste sullo stesso asse, separate spazialmente da una distanza $2nh$ e con una differenza di fase propria pari a π.



12.13. ***Un fascio di luce ordinaria di intensità $I = 1$ W/cm² incide normalmente su una sottile lamina di una sostanza trasparente, di spessore $h = 0.9$ μm e indice di rifrazione $n = 1.5$. Nel fascio incidente sono presenti, con eguale intensità, tutte le lunghezze d'onda comprese tra $\lambda_1 = 400$ nm e $\lambda_2 = 700$ nm. Calcolare la composizione spettrale della luce riflessa dalla lamina e la sua intensità.***

La composizione del fascio incidente si può rappresentare come in figura, l'intensità per intervallo di lunghezza d'onda è costante, ovvero $dI/d\lambda = I_0$; d'altra parte l'intensità totale vale I:

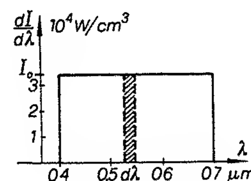
$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dI}{d\lambda}\, d\lambda = I_0\,(\lambda_2 - \lambda_1) \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} = 3.33 \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^3}\ .$$

Il fascio incidente si può dunque pensare suddiviso in infiniti fasci infinitesimi monocromatici, ciascuno di intensità dI, a cui applichiamo i risultati del problema 12.12, in particolare la relazione (e):

$$dI_R = 4R\,dI \operatorname{sen}^2\phi = 4RI_0 \operatorname{sen}^2\phi\, d\lambda = \frac{4RI}{\lambda_2 - \lambda_1} \operatorname{sen}^2\phi\, d\lambda\ .$$

La composizione spettrale della luce riflessa non è più uniforme

$$F(\lambda) = \frac{dI_R}{d\lambda} = \frac{4RI}{\lambda_2 - \lambda_1} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi nh}{\lambda}\ .$$



La funzione $F(\lambda)$ ammette massimi in corrispondenza alle lunghezze d'onda tali che

$$\frac{2\pi nh}{\lambda} = (2K+1)\,\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4nh}{2K+1} = \frac{5.4}{2K+1}\ \mu\mathrm{m}\ .$$

Nel visibile questa condizione si traduce nei dati della tabella seguente:

K	4	5	6	
λ	0.600	0.491	0.415	μm
ϕ	$\frac{9}{2}\pi$	$\frac{11}{2}\pi$	$\frac{13}{2}\pi$	

Invece, i minimi (nulli) di $F(\lambda)$ si hanno per $\phi = K\pi$ ovvero $\lambda = 2nh/K = 2.7/K$ μm e ne risulta la tabella

K	4	5	6	
λ	0 675	0.540	0 450	μm
ϕ	4π	5π	6π	

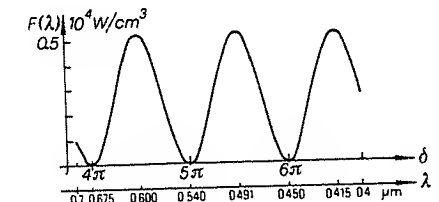
Trascurando la dispersione, il coefficiente di riflessione vale $R = (n-1)^2/(n+1)^2 = 4 \cdot 10^{-2}$ e il valore di $F(\lambda)$ nei massimi, dipendente da n ma non da h, è $F_{max} = 4RI/(\lambda_2 - \lambda_1) = 4RI_0 = 5.33 \cdot 10^3$ W/cm³. L'andamento di $F(\lambda)$ è rappresentato in figura; l'interferenza tra le due onde riflesse ha trasformato uno spettro continuo in uno *spettro a tre bande* di larghezza che diminuisce con λ; la posizione dei massimi e dei minimi è funzione sia del mezzo che del suo spessore.

L'intensità totale riflessa è

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dI_R = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\lambda)\,d\lambda = F_{max} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \operatorname{sen}^2\phi\, d\lambda\ .$$

Il valor medio di $\operatorname{sen}^2\phi$ nell'intervallo di integrazione è ~ 0.5 per cui

$$I_R = 0.5\ F_{max}\,(\lambda_2 - \lambda_1) = 0.08\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2}.$$



Soltanto l'8% della luce incidente viene riflesso dal sistema; inoltre, come si è detto, la luce riflessa non è bianca, ma presenta tre colorazioni predominanti (colori di sottrazione).

12.14. ***Su una lastra a facce piane e parallele di una sostanza con indice di rifrazione $n_3 = 1.5$ viene posto un sottile strato di una vernice trasparente con indice di rifrazione $n_2 = 1.4$; tutto il sistema è contenuto in aria, $n_1 = 1$. Un fascio di luce monocromatica, con intensità $I = 1$ W/cm²,***

incide normalmente alla lastra (dalla parte della vernice). Calcolare come varia l'intensità della luce riflessa dal sistema al variare dello spessore h dello strato di vernice.

Procediamo come nel problema 12.12, studiando dapprima cosa avviene ad un'onda polarizzata rettilineamente $\mathbf{E}_t$; tutte le fasi del processo sono rappresentate in figura (tralasciamo per comodità il suffisso t). Molto sinteticamente:

a) + b)

$$\mathbf{E} \to S_1 \to \mathbf{E}_1^R = -\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\,\mathbf{E} = r_1 \mathbf{E} \qquad \text{sfasamento } \pi$$

$$\to \mathbf{E}_1^T = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}\,\mathbf{E} = t_1 \mathbf{E} \qquad \text{nessun sfasamento}$$

c) $$\mathbf{E}_1^T \to S_2 \quad \mathbf{E}' = e^{i\phi}\mathbf{E}_1^T = t_1 e^{i\phi}\mathbf{E} \qquad \phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\, n_2 h$$

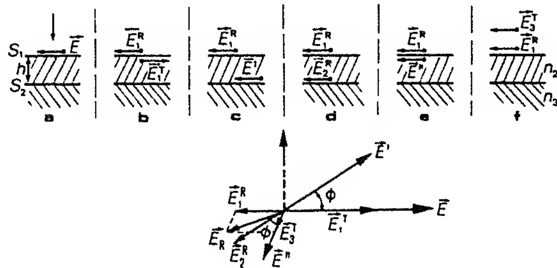
d) $$\mathbf{E}' \to \mathbf{E}_2^R = -\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}\,\mathbf{E}' = r_2 t_1 e^{i\phi}\mathbf{E} \qquad \text{altro sfasamento } \pi$$

$\to$ onda trasmessa nel mezzo n_3 (non ci interessa)

e) $$\mathbf{E}_2^R \to S_2 \quad \mathbf{E}'' = e^{i\phi}\,\mathbf{E}_2^R = r_2 t_1 e^{2i\phi}\,\mathbf{E}$$

f) $\mathbf{E}'' \to$ onda riflessa nel mezzo n_2 (non ci interessa)

$$\to \mathbf{E}_3^T = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}\,\mathbf{E}'' = t_2\mathbf{E}'' = r_2 t_1 t_2\, e^{2i\phi}\,\mathbf{E} \quad .$$



Siccome $t_1 t_2 = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 - \left(\dfrac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 = 1 - R_1 = T_1$,

$$\mathbf{E}_3^T = r_2 T_1 e^{2i\phi}\,\mathbf{E} \quad .$$

Sulla superficie S_1 si sovrappongono così $\mathbf{E}_1^R$ e $\mathbf{E}_3^T$; essi sono coerenti, provenendo da $\mathbf{E}$ per suddivisione di ampiezza. e danno luogo a un fenomeno di interferenza. Per l'ampiezza totale e il suo quadrato abbiamo.

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_1^R + \mathbf{E}_3^T = (r_1 + r_2 T_1\, e^{2i\phi})\ \mathbf{E} \quad ,$$

$$\mathbf{E}_R^2 = E_R^* E_R = (r_1 + r_2 T_1\, e^{-2i\phi})\ (r_1 + r_2 T_1\, e^{2i\phi})\ E^2 =$$

$$= (r_1^2 + r_2^2 T_1^2 + 2 r_1 r_2 T_1 \cos 2\phi)\ E^2 \quad .$$

Ricordando che $R_1 = r_1^2$, $R_2 = r_2^2$, $T_1 = 1 - R_1$ e trascurando tutti i termini del secondo ordine rispetto a R_1 otteniamo

$$(E_t^R)^2 = [R_{1t} + R_{2t} + 2(R_{1t}\ R_{2t})^{1/2}\ \cos\ 2\phi]\ E_t^2 \quad ,$$

dove è stato ripreso il suffisso t. Una formula analoga vale per $(E_p^R)^2$ e in conclusione la percentuale di energia riflessa per un'onda piana non polarizzata di intensità I è

$$\frac{I_R}{I} = R_1 + R_2 + 2(R_1\ R_2)^{1/2}\ \cos 2\phi =$$

$$= R_1 + R_2 + 2(R_1\ R_2)^{1/2}\ \cos\frac{4\pi n_2 h}{\lambda_0} \qquad \text{(a)}$$

Usando i dati del problema $R_1 = 0.028$, $R_2 = 0.001$,

$$\frac{I_R}{I} = 0.029 + 0.011\ \cos\frac{4\pi n_2 h}{\lambda_0} \quad .$$

Si hanno massimi con intensità $I_R = 0.040I = 40 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W/cm^2}$ quando

$$2\phi = \frac{4\pi n_2 h}{\lambda_0} = 2K\pi \quad \Rightarrow \quad h = K\,\frac{\lambda_0}{2n_2} \qquad \text{(b)}$$

e minimi non nulli con intensità $I_R = 0.018I = 18 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{W/cm^2}$ quando

$$2\phi = \frac{4\pi n_2 h}{\lambda_0} = (2K + 1)\ \pi \quad \Rightarrow \quad h = (2K + 1)\ \frac{\lambda_0}{4n} \quad . \qquad \text{(c)}$$

La relazione (a) si presta ad alcune osservazioni interessanti. Innanzitutto vediamo che essa ha la stessa struttura della (12.1); per analogia, possiamo dire di osservare l'interferenza di due sorgenti di onde piane coerenti, propagantesi nel vuoto lungo la stessa direzione, con ampiezze diverse

$$E_1^R = r_1 E = (R_1 I)^{1/2} \quad , \quad E_3^T = r_2 E = (R_2 I)^{1/2} \quad ,$$

separate lungo la direzione di propagazione della distanza $2n_2 h$ e quindi sfasate di 2ϕ. In effetti, come già osservato alla fine del problema 12.12, le due superficie riflettenti S_1 e S_2 danno due onde immagini virtuali dell'onda piana incidente che distano $2n_2 h$; si può dire che si osserva l'interferenza prodotta da tali immagini.

Se l'indice n_2 è tale che $R_1 = R_2$, cioè $n_2 = (n_1 n_3)^{1/2}$, la (a) diviene

$$\frac{I_R}{I} = 2R_1(1 + \cos 2\phi) = 4R_1 \cos^2 \phi \quad .$$

Un'espressione analoga è già stata trovata nel problema 12.1 per il dispositivo di Young, con la differenza che là le due sorgenti erano separate lateralmente. Anche la (e) del problema 12.12 ha una struttura simile, con $\text{sen}^2 \phi$ al posto di $\cos^2 \phi$, ovvero con uno sfasamento di π· questo perché nel caso ora trattato le riflessioni avvengono entrambe con inversione di E.

12.15. *Un fascio di luce bianca di intensità* $I = 1$ W/cm², *in cui sono presenti con eguale intensità tutte le lunghezze d'onda tra* $\lambda_1 = 400$ nm *e* $\lambda_2 = 700$ nm, *incide normalmente su un sistema composto da una lastra di vetro con indice di rifrazione* $n_3 = 1.5$, *ricoperta da un sottile strato di vernice trasparente con indice di rifrazione* $n_2 = 1.22$. *Lo spessore h della vernice deve essere tale da rendere minima in riflessione l'intensità alla lunghezza d'onda* $\lambda^* = 550$ nm. *Calcolare il minimo spessore h a ciò necessario e la composizione spettrale della luce riflessa dal sistema e la sua intensità in queste condizioni.*

Si procede come nel problema 12.13 sfruttando i risultati del problema 12.14. L'intensità riflessa di un fascio di intensità $dI = I d\lambda/(\lambda_2 - \lambda_1)$ è data dalla (a) del problema 12.14:

$$dI_R = \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[R_1 + R_2 + 2(R_1 R_2)^{1/2} \cos \frac{4\pi n_2 h}{\lambda}\right] d\lambda = F(\lambda) d\lambda \quad ,$$

$$R_1 = \left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}\right)^2 = 0.98 \cdot 10^{-2} \quad , \quad R_2 = \left(\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2}\right)^2 = 1.06 \cdot 10^{-2} \quad ,$$

$$F(\lambda) = 6.80 \cdot 10^2 \left(1 + \cos \frac{4\pi n_2 h}{\lambda}\right) \frac{\text{W}}{\text{cm}^3} \quad .$$

Lo spessore voluto per rendere minima $F(\lambda)$ con $\lambda = \lambda^*$ si calcola imponendo che il coseno valga -1, cioè, in accordo con la (c) del problema 12.14,

$$\frac{4\pi n_2 h}{\lambda^*} = (2K + 1)\,\pi \quad \Rightarrow \quad h = (2K + 1)\,\frac{\lambda^*}{4n_2} \quad .$$

Inoltre la richiesta che h sia minimo impone $K = 0$ per cui

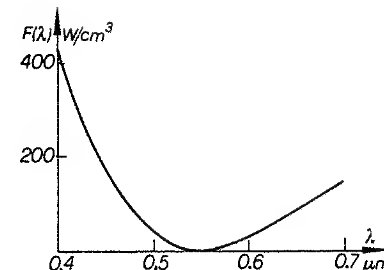
$$h = \frac{\lambda^*}{4n_2} = 0.113 \ \mu\text{m} \quad .$$

Fissato così h, l'espressione numerica di $F(\lambda)$ risulta, esprimendo λ in micron,

$$F(\lambda) = 6.80 \cdot 10^2 \left(1 + \cos \frac{1.732}{\lambda}\right) \frac{\text{W}}{\text{cm}^3} \quad .$$

L'intensità totale della luce riflessa è

$$I_R = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(\lambda)\, d\lambda \quad .$$



Questo integrale può essere calcolato per via grafica, utilizzando la figura in cui è rappresentata $F(\lambda)$; si ottiene $I_R = 0.27 \cdot 10^{-2}$ W/cm²: solo lo 0.27% della luce incidente viene riflesso. Se non ci fosse la vernice il coefficiente di riflessione alla superficie aria-vetro sarebbe $R = 4 \cdot 10^{-2} = 4\%$ e tale sarebbe la percentuale di luce riflessa, posto che la lamina fosse di spessore sufficientemente grande; con una lamina sottile si potrebbe arrivare intorno al 10% (problema 12.13).

Il problema mette in evidenza uno degli impieghi dei fenomeni interferenziali; precisamente la produzione di vetri detti non riflettenti. Il procedimento è molto utile per ridurre le perdite per riflessione negli strumenti composti in cui c'è un gran numero di superficie aria-vetro; una sostanza usata nella pratica come pellicola antiriflettente è il fluoruro di magnesio. Dalla figura si vede che nello spettro riflesso prevalgono le lunghezze d'onda tra 0.40 e 0.45 µm: la lastra appare violacea; anche ora il colore ottenuto è di sottrazione.

Si noti che secondo quanto visto nei problemi precedenti la risposta per h poteva essere immediata; in ciascuna riflessione c'è uno sfasamento di π essendo $n_1 < n_2$ e $n_2 < n_3$, quindi questi sfasamenti si compensano. Il minimo spessore per produrre elisione ad una certa λ deve allora valere $\lambda/4$, se $\lambda = \lambda_0/n_2$ è la lunghezza d'onda nel mezzo n_2.

12.16. *Due sbarre metalliche cilindriche molto lunghe, aventi la stessa sezione* Σ, *sono unite per un estremo. Un'onda elastica piana sinusoidale di ampiezza* ξ_0 *e frequenza* ν, *generata percuotendo opportunamente l'estremo libero della prima sbarra, si propaga in questa. Descrivere i fenomeni di riflessione e trasmissione che hanno origine quando l'onda raggiunge la superficie di contatto, calcolando i relativi coefficienti di riflessione e di trasmissione. Applicare i risultati a coppie formate con alluminio, ferro, piombo, rame utilizzando i valori del modulo di elasticità e della densità pubblicati nei vari manuali. Confrontare i risultati con quelli del problema 12.12.*

Nella prima sbarra si propaga un'onda la cui espressione è

$$\xi = \xi_0 \text{sen}(\omega t - k_1 x)$$

con $k_1 = 2\pi/\lambda_1 = \omega/v_1$; insieme a quest'onda, che esprime lo spostamento degli elementi della sbarra, si propaga un'onda di pressione la cui espressione, secondo il paragrafo 12c., è

$$p = \frac{F}{\Sigma} = Y_1 \frac{d\xi}{dx} = -\xi_0 k_1 Y_1 \cos(\omega t - k_1 x) \quad .$$

La velocità di propagazione è data da (12.10), $v_1 = (Y_1/\varrho_1)^{1/2}$, e l'intensità da (12.9):

$$I = \frac{1}{2} \varrho_1 v_1 \omega^2 \xi_0^2 = \frac{1}{2} (Y_1 \varrho_1)^{1/2} \omega^2 \xi_0^2 \quad . \tag{a}$$

Quando l'onda arriva alla giunzione hanno origine un'onda riflessa che si propaga nella prima sbarra, in senso contrario all'onda incidente, $\xi_R = \xi_0^R \text{sen}(\omega t + k_1 x)$ e un'onda trasmessa che si propaga nella seconda sbarra, conservando il verso dell'onda incidente, $\xi_T = \xi_0^T \text{sen}(\omega t - k_2 x)$ con $k_2 = 2\pi/\lambda_2 = \omega/v_2$ e $v_2 = (Y_2/\varrho_2)^{1/2}$.

Fissiamo l'origine nel punto di giunzione e imponiamo che qui, per $x = 0$ e in qualunque istante di tempo, ci sia continuità nella perturbazione, cioè che questa sia la stessa se calcolata immediatamente a destra e a sinistra della giunzione:

$$\xi_0 \text{sen}\, \omega t + \xi_0^R \text{sen}\, \omega t = \xi_0^T \text{sen}\, \omega t \quad \Rightarrow \quad \xi_0 + \xi_0^R = \xi_0^T \quad .$$

La stessa continuità si richiede per la pressione:

$$-\xi_0 k_1 y_1 + \xi_0^R k_1 y_1 = -\xi_0^T k_2 y_2$$

dove il segno per l'onda riflessa deriva dall'espressione $\omega t + k_1 x$ della sua fase. Facendo sistema e utilizzando il fatto che $k_1 Y_1 = \omega Y_1/v_1 = \omega(Y_1\varrho_1)^{1/2}$, $k_2 Y_2 = \omega(Y_2\varrho_2)^{1/2}$ si ottiene

$$\xi_0^R = -\frac{(Y_2\varrho_2)^{1/2} - (Y_1\varrho_1)^{1/2}}{(Y_2\varrho_2)^{1/2} + (Y_1\varrho_1)^{1/2}} \xi_0 \quad , \quad \xi_0^T = \frac{2(Y_1\varrho_1)^{1/2}}{(Y_2\varrho_2)^{1/2} + (Y_1\varrho_1)^{1/2}} \xi_0 \quad . \tag{b}$$

Notiamo che se $Y_2\varrho_2 > Y_1\varrho_1$ ξ_0^R è opposto a ξ_0, nel caso contrario è concorde; ξ_0^T è sempre concorde a ξ_0. Se $Y_2\varrho_2 \ll Y_1\varrho_1$ (*estremo libero*), $\xi_0^R = \xi_0$ e $\xi_0^T = 2\xi_0$; se invece $Y_2\varrho_2 \gg Y_1\varrho_1$ (*estremo fisso*), $\xi_0^R = -\xi_0$ e $\xi_0^T = 0$: si ha *riflessione totale*.
Mettiamo insieme (a) e (b) e calcoliamo il rapporto tra intensità riflessa e incidente:

$$R = \frac{I_R}{I} = \left(\frac{\xi_0^R}{\xi_0}\right)^2 = \left[\frac{(Y_2\varrho_2)^{1/2} - (Y_1\varrho_1)^{1/2}}{(Y_2\varrho_2)^{1/2} + (Y_1\varrho_1)^{1/2}}\right]^2 \quad , \tag{c}$$

$$T = \frac{I_T}{I} = \left(\frac{Y_2\varrho_2}{Y_1\varrho_1}\right)^{1/2} \left(\frac{\xi_0^T}{\xi_0}\right)^2 = \frac{4(Y_1\varrho_1)^{1/2}(Y_2\varrho_2)^{1/2}}{[(Y_2\varrho_2)^{1/2} + (Y_1\varrho_1)^{1/2}]^2} \tag{d}$$

e si verifica che $R + T = 1$, in accordo col principio di conservazione dell'energia.

Nella tabella seguente riportiamo le costanti caratteristiche dei metalli citati.

	ϱ (Kg/m^3)	Y (N/m^2)	v (m/s)	$(Y\varrho)^{1/2}$ (Kg/m^{2}s)
Al	$2.7 \cdot 10^3$	$0.75 \cdot 10^{11}$	$5.27 \cdot 10^3$	$1.42 \cdot 10^7$
Cu	8.9	1.24	3.73	3.32
Fe	7.9	2.09	5.14	4.06
Pb	11.3	0.16	1.19	1.34

Applicando la (c) alle coppie formate con questi materiali otteniamo i coefficienti di riflessione.

	Al	Cu	Fe	Pb
Al	—	0.161	0.232	$8.4 \cdot 10^{-4}$
Cu	0.161	—	0.010	0.181
Fe	0.232	0.010	—	0.254
Pb	$8.4 \cdot 10^{-4}$	0.181	0.254	—

Il coefficiente è simmetrico rispetto allo scambio dei metalli, vista la struttura della (c).

Venendo al confronto con i risultati del problema 12.12, si vede che la struttura di (c) e (d) è la stessa delle (c) di quel problema. la costante $(Y\varrho)^{1/2}$ che descrive le proprietà elastomeccaniche del mezzo ha la stesso ruolo dell'indice di rifrazione $n = \varkappa_e^{1/2}$ che descrive le proprietà elettriche del mezzo.

Del resto formule analoghe si incontrano in tutti i problemi di riflessione di onde di qualunque natura. Ad esempio, nello studio della riflessione che ha origine dalla propagazione di una piccola perturbazione in una corda tesa formata da due corde molto lunghe di materiali diverse unite per un estremo, si arriva alle stesse formule (c) e (d), con $m^{1/2}$ al posto di $(Y\varrho)^{1/2}$:

$$R = \left(\frac{m_2^{1/2} - m_1^{1/2}}{m_2^{1/2} + m_1^{1/2}}\right)^2 \quad , \quad T = \frac{4 m_1^{1/2} m_2^{1/2}}{(m_2^{1/2} + m_1^{1/2})^2} = 1 - R \quad ; \tag{e}$$

m è la massa lineare, cioè per unità di lunghezza. Con riferimento a (12.11) non compare nelle (e) la tensione perché è la stessa ovunque. Se la sezione delle due corde è la stessa, m è proporzionale a ϱ e quindi

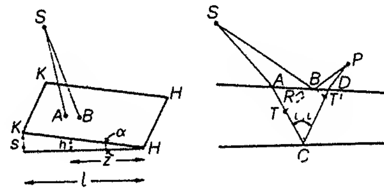
$$R = \left(\frac{\varrho_2^{1/2} - \varrho_1^{1/2}}{\varrho_2^{1/2} + \varrho_1^{1/2}}\right)^2 \quad .$$

Con i dati sui materiali in nostro possesso si ha:

	Al	Cu	Fe	Pb
Al	—	0.084	0.069	0.118
Cu	0.084	—	$8.9 \cdot 10^{-4}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
Fe	0.069	$8.9 \cdot 10^{-4}$	—	$8.0 \cdot 10^{-3}$
Pb	0.118	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$	—

Nella giunzione dove maggiore è la differenza di densità maggiore è il coefficiente di riflessione. Al limite, se la corda è fissata ad un estremo, $m_2 \to \infty$, $R = 1$ e $T = 0$· la riflessione è totale con inversione dell'ampiezza; se invece l'estremo è libero $m_2 = 0$ e di nuovo $R = 1$ $T = 0$, ma questa volta l'ampiezza non si inverte.

12.17. *Un fascio di luce monocromatica* ($\lambda_0 = 500$ nm) *proveniente da una sorgente estesa incide su una lamina cuneiforme sottile di una sostanza plastica trasparente* ($n = 1.4$). *L'angolo del cuneo è* $\alpha = 10^{-4}$ rad *e la lunghezza* $l = 10$ cm *(vedi figura). Se si osserva la lamina in direzione normale con un telescopio puntato su di essa o anche direttamente con l'occhio si vede una serie di frange chiare e scure, parallele ai lati HH, KK. Descrivere le formazioni di queste frange calcolandone la posizione sulla lamina; determinare inoltre il numero di frange chiare osservate e specificare se i bordi del cuneo (HH, KK) appaiono chiari o scuri.*



Sia S un punto della sorgente e SA, SB due raggi provenienti da essa che incidono sulla lamina, questi, dopo aver compiuto rispettivamente i cammini $SACDP$ e SBP si incontrano in P. La differenza dei cammini ottici vale

$$\Delta r = SA + nAC + nCD + DP - SB - BP$$

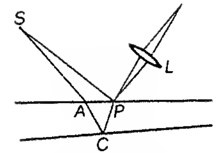
Nell'ipotesi che lo spessore massimo s della lamina sia piccolo i punti A, B, D sono abbastanza vicini e valgono le seguenti approssimazioni:

$$SB = SA + nAT \quad , \quad BP = nT'D + DP$$
$$\Rightarrow \quad \Delta r = n(AC - AT) + n(CD - T'D) = n(TC + T'C) \quad .$$

Detto $h = RC$ lo spessore della lamina nel punto considerato possiamo scrivere nelle stesse ipotesi $TC = T'C = h\cos i$ e quindi

$$\Delta r = 2nh\cos i \quad . \qquad \text{(a)}$$

Per ogni punto P, h e i variano con la posizione di S; se la sorgente è estesa per uno stesso P esistono molte coppie di raggi, caratterizzati da diversi h e i, che in esso si incontrano. Questa diversità causa la distruzione degli effetti interferenziali in P e quindi in tutta la zona sovrastante la lamina. Se invece P appartiene alla lamina e questa viene osservata con uno strumento L (occhio,



telescopio) accomodato su di essa, praticamente h è lo stesso per ogni coppia di raggi che provengono dalla sorgente. Inoltre, se si selezionano raggi aventi la stessa direzione, come fanno l'occhio o il telescopio, i valori di $\cos i$ sono poco diversi tra loro; per incidenza vicina alla normale così è molto prossimo a uno. In queste condizioni $\Delta r = 2nh$ e si osserva sulla lamina l'interferenza tra le onde riflesse dalle sue due superficie: si parla di sistema di *frange localizzate* sulla lamina.

Per il calcolo dell'intensità nell'intorno di P si possono utilizzare i risultati del problema 12.12; I_R sarà espressa da una formula di questo tipo:

$$I_R = 4RI\,\mathrm{sen}^2\phi \quad , \quad 2\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\Delta r = \frac{4\pi nh}{\lambda_0} \quad . \qquad \text{(b)}$$

La (b), pensata come funzione di h, dà la variazione dell'intensità con la posizione lungo il cuneo; essendo $h = z\alpha$ con $0 \le z \le l$,

$$I_R = 4RI\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi nh}{\lambda_0}\right) = 4RI\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{2\pi n\alpha z}{\lambda_0}\right)$$

Le posizioni di massimo e minimo si hanno per

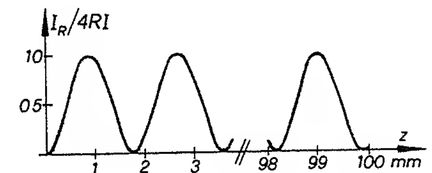
$$h = (2K+1)\frac{\lambda_0}{4n} \quad , \quad z = (2K+1)\frac{\lambda_0}{4n\alpha} \qquad \text{max} \quad , \qquad \text{(c)}$$

$$h = \frac{K\lambda_0}{4n} \quad , \quad z = \frac{K\lambda_0}{2n\alpha} \qquad \text{min} \quad .$$

I luoghi dei punti con $h = \text{cost}$ ($z = \text{cost}$) sono segmenti paralleli al lato HH del cuneo, dalla (b) si vede che su ciascuno di essi l'intensità è costante.

Sostituendo i dati del problema abbiamo $I_R(z)$, rappresentata in figura; i massimi e i minimi si trovano a

$$z = 0.9(2K+1) \text{ mm} \qquad \text{max} \quad ,$$
$$z = 1.8K \text{ mm} \qquad \text{min} \quad .$$



Sul cuneo si vede quindi una successione di frange chiare (0.9, 2.7, 4.5, ... mm e scure (0, 1.8, 3.6, ... mm), equidistanti. La larghezza di una frangia chiara, definita come semidistanza tra i due minimi adiacenti al massimo, è $\Delta z = \lambda_0/4n\alpha = 0.9$ mm (e analogamente per le frange scure). Poiché ogni frangia è caratterizzata da un valore di h, le frange sono dette *di eguale spessore*.

Lo spigolo HH ($z = 0$) risulta scuro; infatti, benché le onde che interferiscono compiano gli stessi cammini essendo lo spessore nullo, i campi elettrici sono sfasati di π a causa delle diverse condizioni di riflessione (si veda il

problema 12.12). Per decidere se lo spigolo KK appare chiaro o scuro, sostituiamo $z = l$ in (c) e (d); otteniamo:

$$K_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{4nl\alpha}{\lambda_0} - 1\right) = 55.5 \quad , \quad K_{min} = \frac{2n\alpha l}{\lambda_0} = 56 \quad .$$

Dovendo essere K intero lo spigolo KK risulta anch'esso scuro. Il massimo valore possibile di K_{max} è 55 e in conclusione si vedono sul cuneo 57 frange scure intervallate da 56 chiare.

12.18. *Una sorgente estesa di luce ($\lambda = 400$ nm) illumina normalmente due lastre di vetro lunghe $l = 10$ cm, che sono a contatto ad una estremità e separate dall'altra mediante un sottile foglio di alluminio di spessore s. Si osserva che entrambi i bordi delle lastre sono scuri e che si è formato un sistema di 250 frange chiare, parallele allo spigolo di contatto. Determinare lo spessore del foglio e con che precisione lo si può misurare supponendo di compiere nel conteggio delle frange un errore di ± 1 frangia.*

Il sistema è analogo a quello visto nel problema 12.17 solo che ora si tratta di un *cuneo d'aria*: possiamo così applicare tutti i risultati di quel problema ponendo $n = 1$. Se ci sono 250 frange chiare e gli estremi sono scuri vuol dire che ci sono 251 frange scure e che il numero d'ordine dell'ultima è 250; lo spessore corrispondente è

$$s = \frac{K\lambda_0}{2n} = 250\,\frac{\lambda_0}{2n} = 50\ \mu\text{m} \quad ,$$

secondo la (d) del problema 12.17. L'errore percentuale sul risultato è

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta K}{K} = \pm\frac{1}{250} = \pm 4 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad s = (50.0 \pm 0.2)\ \mu\text{m} \quad .$$

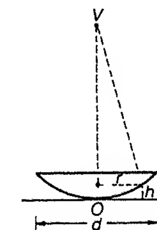
Si vede come in linea di principio il metodo descritto sia adatto alla misura di piccoli spessori con buona precisione.

12.19 *Una lente piano-convessa, con raggio di curvatura $R = 4$ m e apertura $d = 2$ cm, è posta con la superficie convessa a contatto con una lastra di vetro piana, avente lo stesso indice di rifrazione; l'intercapedine tra lastra e lente è riempita d'acqua ($n = 4/3$). Questo sistema è illuminato dall'alto da una sorgente estesa di luce rossa ($\lambda_0 = 650$ nm). Se si osserva il sistema con un telescopio focalizzato sulla lente si vede un sistema di frange circolari, concentriche con il punto di contatto O, che vanno addensandosi verso il bordo della lente. Descrivere la formazione delle frange e calcolarne il numero e la posizione sulla lente. Se all'acqua viene sostituito solfuro di carbonio si osserva un restringimento di un fattore 1.1 nei raggi delle frange. Spiegare il fenomeno e calcolare l'indice di rifrazione n' del solfuro di carbonio.*

L'intercapedine di questo dispositivo, le cui frange sono dette *anelli di Newton*, si comporta come un cuneo riempito di una sostanza trasparente e gli effetti interferenziali che si osservano sono quindi quelli discussi nel problema 12.17. I luoghi dei punti di eguale spessore h sono circonferenze di raggio r, concentriche con il punto di contatto O; è per questo che le frange di eguale spessore che si osservano sono circolari. Applicando il teorema di Euclide al triangolo rettangolo OVP si ha $(2R - h) : r = r : h$ ovvero, trascurando il termine in h^2, $h = r^2/2R$; questo è lo spessore del cuneo in corrispondenza al punto P, cioè al raggio r. Le relazioni (c) e (d) del problema 12.17 danno allora:

$$\text{max} \quad h = (2K+1)\,\frac{\lambda_0}{4n} \quad \Rightarrow \quad r = \left[(2K+1)\,\frac{R\lambda_0}{2n}\right]^{1/2} \quad ,$$

$$\text{min} \quad h = \frac{K\lambda_0}{2n} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{KR\lambda_0}{n}\right)^{1/2} \quad .$$

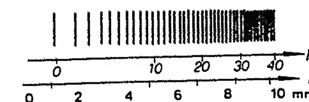


Per ottenere il numero di frange chiare calcoliamo che numero d'ordine avrebbe un massimo con $r = r_0 = d/2$:

$$K^* = \frac{1}{2}\left(\frac{nd^2}{2R\lambda_0} - 1\right) = 40.5 \quad .$$

Ne segue che il massimo valore di K è 40 e che quindi si formano 41 frange chiare. Il punto di contatto O, insieme con la zona circostante, appare scuro per la stessa ragione esposta alla fine del problema 12.17.

Dalla struttura delle formule dei raggi, e precisamente dalla dipendenza dalla radice quadrata del numero d'ordine, si deduce che le frange si addensano al crescere di K, cioè verso i bordi della lente. In figura è riportata in funzione di K la posizione dei massimi, rappresentata da linee verticali.

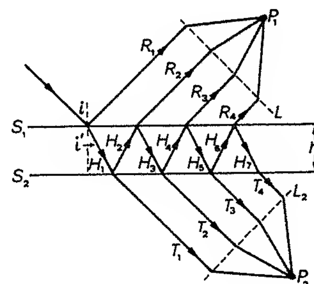


Quando il mezzo che riempie l'intercapedine viene sostituito da un altro con un diverso indice di rifrazione i raggi degli anelli, che dipendono da $n^{-1/2}$, variano diminuendo al crescere di n; ciò è intuitivo se si pensa che, a parità di cammino ottico, basta allora uno spessore h inferiore per ottenere un massimo di un certo ordine. Possiamo quindi affermare subito che l'indice del solfuro di carbonio è maggiore di $4/3$. Il rapporto tra i raggi corrispondenti ad un certo numero d'ordine è indipendente da questo e risulta

$$\frac{r'}{r} = \left(\frac{n}{n'}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad n' = n\left(\frac{r}{r'}\right)^2 = 1.61 \quad .$$

12.20. *Un sottile fascio di luce monocromatica ($\lambda_0 = 500$ nm) incide su una lastra di plexiglas a facce piane e parallele, indefinita, di spessore h e con indice di rifrazione $n = 1.5$. L'intensità del fascio è $I = 1$ W/cm^2 e l'an-*

golo di incidenza è $i = 10°$. *Mediante successive riflessioni e trasmissioni sulle due facce, dal fascio incidente hanno origine due serie di onde le cui direzioni di propagazione sono contrassegnate in figura con le lettere* R_i, T_i. *Ogni serie di tali onde viene portata a interferire nei piani focali di due lenti* L_1 *e* L_2, *rispettivamente nei punti* P_1 *e* P_2. *Trascurando l'assorbimento nella lastra determinare come varia l'intensità in* P_1 *e* P_2 *al variare dello spessore* h *e calcolarla per* $h = 1$ **mm.**



Consideriamo l'onda piana incidente non polarizzata di intensità I costituita dalla sovrapposizione di due onde piane incoerenti, $\mathbf{E}_p$ polarizzata nel piano di incidenza e $\mathbf{E}_t$ polarizzata normalmente a tale piano, entrambe di intensità $I_p = I_t = I/2$. Studiamo dapprima cosa avviene di $\mathbf{E}_t$, tralasciando per ora il suffisso t.

a) L'onda $\mathbf{E}$ incide sulla superficie S_1.

b) $\mathbf{E}$ dà origine ad un'onda riflessa e una trasmessa, le cui ampiezze sono legate a $\mathbf{E}$ dalle relazioni (11.17) e (11.18):

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{\operatorname{sen}(i - i')}{\operatorname{sen}(i + i')}\,\mathbf{E} = r_1\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{H}_1 = \frac{2\operatorname{sen} i' \cos i}{\operatorname{sen}(i + i')}\,\mathbf{E} = t_1\mathbf{E}$$

con $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} i'$; $\mathbf{R}_1$ è sfasato di π rispetto a $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}_1$ è in fase con $\mathbf{E}$.

c) $\mathbf{H}_1$ si propaga nella lastra e giungendo su S_2 dà origine ad un'onda riflessa, di ampiezza $H_2 = r_2 H_1 = r_2 t_1 E$, e ad un'onda trasmessa, di ampiezza $T_1 = t_2 H_1 = t_1 t_2 E$; è immediato provare che

$$r_1 = -r_2 \quad , \quad t_1 t_2 = 1 - r_1^2 = 1 - r_2^2 \quad (\textit{relazioni di Stokes}) \quad .$$

Per quanto riguarda gli sfasamenti li tratteremo tutti insieme alla fine.

d) $\mathbf{H}_2$ si propaga nella lastra e giungendo su S_1 dà origine ad un'onda riflessa e una trasmessa, di ampiezze rispettive $H_3 = r_2 H_2 = r_2^2 t_1 E$, $R_2 = t_2 H_2 = r_2 t_1 t_2 E$.

e) $\mathbf{H}_3$ si propaga nella lastra e giungendo su S_2 dà origine ad un'onda riflessa e una trasmessa, le cui ampiezze sono $H_4 = r_2 H_3 = r_2^3 t_1 E$, $T_2 = t_2 H_3 = r_2^2 t_1 t_2 E$.

Così proseguendo si conclude che le ampiezze delle serie di onde R_i e T_i sono:

$$R_i \qquad r_1 E \ , \ t_1 t_2 r_2 E \ , \ t_1 t_2 r_2^3 E \ , \ t_1 t_2 r_2^5 E \ , \ldots$$

$$T_i \qquad t_1 t_2 E \ , \ t_1 t_2 r_2^2 E \ , \ t_1 t_2 r_2^4 E \ , \ t_1 t_2 r_2^6 E \ , \ldots$$

(da un esame della figura si controlla facilmente la correttezza di queste espressioni).

La differenza di cammino ottico tra due onde R_i consecutive è data da

$$\Delta r = n(A_1B_1 + B_1A_2) - A_1C_1 = n(A_2B_2 + B_2A_3) - A_2C_2 = \ldots = 2nh\cos i' \quad ;$$

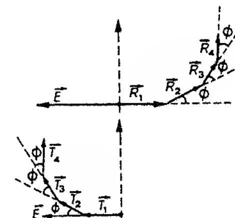
la dimostrazione segue la via vista nel problema 12.17, solo che ora la relazione è esatta. A Δr corrisponde uno sfasamento

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,\Delta r = \frac{4\pi}{\lambda_0}\,nh\cos i' \quad . \tag{a}$$

Facendo uso della notazione simbolica (paragrafo 12e.) possiamo scrivere

$$\mathbf{R}_1 = r_1\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{R}_2 = t_1 t_2 r_2\, e^{i\phi}\,\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{R}_3 = t_1 t_2 r_2^3\, e^{2i\phi}\,\mathbf{E} \quad , \ldots \quad ,$$

rappresentando questi vettori nel piano complesso come in figura. Analogamente



$$\mathbf{T}_1 = t_1 t_2\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{T}_2 = t_1 t_2 r_2^2\, e^{i\phi}\,\mathbf{E} \quad ,$$

$$\mathbf{T}_3 = t_1 t_2 r_2^4\, e^{2i\phi}\,\mathbf{E} \quad , \quad \ldots$$

in quanto lo sfasamento vale ϕ anche tra due onde trasmesse consecutive. Il campo risultante in P_1 è

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \ldots = (r_1 + t_1 t_2 r_2\, e^{i\phi} + t_1 t_2 r_2^3\, e^{2i\phi} + \ldots)\,\mathbf{E}$$

$$= [r_1 + t_1 t_2 r_2\, e^{i\phi}\,(1 + r_2^2\, e^{i\phi} + r_2^4\, e^{2i\phi} + \ldots)]\,\mathbf{E}$$

$$= \left(r_1 + \frac{t_1 t_2 r_2\, e^{i\phi}}{1 - r_2^2\, e^{i\phi}}\right)\mathbf{E} \quad ,$$

dove si è fatto ricorso a (12.18). Ricordando che $r_2 = -r_1$, che $r_1^2 = R$ (coefficiente di riflessione su S_1) e che $t_1 t_2 = 1 - r_1^2 = 1 - R$, abbiamo in conclusione

$$\frac{E_R}{E} = \frac{1 - e^{i\phi}}{1 - Re^{i\phi}}\,R^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{E_R}{E}\right)^2 = \frac{(1 - e^{i\phi})\,(1 - e^{-i\phi})}{(1 - Re^{i\phi})\,(1 - Re^{-i\phi})}\,R =$$

$$= \frac{4R\operatorname{sen}^2\phi/2}{(1 - R)^2 + 4R\operatorname{sen}^2\phi/2} \quad .$$

Riscriviamo questo rapporto come rapporto delle intensità ritornando ad utilizzare il suffisso t:

$$\frac{I_t^R}{I_t} = \frac{4R_t\operatorname{sen}^2\phi/2}{(1 - R_t)^2 + 4R_t\operatorname{sen}^2\phi/2} \quad , \tag{b}$$

dove ϕ è dato dalla (a) e $R_t = \operatorname{sen}^2(i - i')/\operatorname{sen}^2(i + i')$. Senza ripetere un calcolo analogo per l'intensità trasmessa notiamo che nel nostro caso, detta Σ_0 la sezione del fascio incidente, questa è conservata in ciascuna delle direzioni di propagazione delle onde riflesse e trasmesse. Pertanto

$$\left.\begin{aligned} W_R &= W_1^R + W_2^R + \ldots = I_1^R\Sigma_0 + I_2^R\Sigma_0 + \ldots = I_R\Sigma_0 \\ W_T &= W_1^T + W_2^T + \ldots = I_1^T\Sigma_0 + I_2^T\Sigma_0 + \ldots = I_T\Sigma_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} W &= W_R + W_T \\ I &= I_R + I_T \end{aligned}$$

In particolare, per le onde col campo elettrico che vibra ortogonalmente al piano di incidenza,

$$\frac{I_t^T}{I_t} = 1 - \frac{I_t^R}{I_t} = \frac{(1-R_t)^2}{(1-R_t)^2 + 4R_t \operatorname{sen}^2 \phi/2} = \tag{c}$$

$$= \frac{T_t^2}{T_t^2 + 4(1-T_t) \operatorname{sen}^2 \phi/2} ,$$

con $T_t = 1 - R_t = \operatorname{sen}2i\operatorname{sen}2\iota'/\operatorname{sen}(\iota + \iota')$.

A formule analoghe si arriva anche partendo da $\mathbf{E}_p$, con la differenza che ora si utilizzano le (11.13-11 14) e compaiono $R_p = \operatorname{tg}^2(\iota - \iota')/\operatorname{tg}^2(\iota + \iota')$ e $T_p = 1 - R_p = 2\operatorname{sen}\iota' \cos\iota/[\operatorname{sen}(\iota + i') \cos(\iota - \iota')]$. Per un fascetto di luce non polarizzata di intensità I le intensità nei punti P_1 e P_2 sono allora:

$$I_R = \frac{1}{2}\,(I_t^R + I_p^R) = \tag{d}$$

$$\frac{I}{2}\left[\frac{4R_t \operatorname{sen}^2 \phi/2}{(1-R_t)^2 + 4R_t\operatorname{sen}^2 \phi/2} + \frac{4R_p \operatorname{sen}^2 \phi/2}{(1-R_p)^2 + 4R_p\operatorname{sen}^2 \phi/2}\right] ,$$

$$I_T = \frac{1}{2}\,(I_t^T + I_p^T) = \tag{e}$$

$$\frac{I}{2}\left[\frac{T_t^2}{T_t^2 + 4(1-T_t)\operatorname{sen}^2 \phi/2} + \frac{T_p^2}{T_p^2 + 4(1-T_p)\operatorname{sen}^2 \phi/2}\right] .$$

Poiché I_R è una funzione monotona crescente in $\operatorname{sen}^2 \phi/2$ essa è minima per $\operatorname{sen}^2 \phi/2 = 0$ e massima per $\operatorname{sen}^2 \phi/2 = 1$. Ricorrendo alla (a) abbiamo per l'intensità riflessa:

$$\max \quad \frac{\phi}{2} = (2K+1)\,\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad h = (2K+1)\,\frac{\lambda_0}{4n\cos\iota'} \; , \tag{f}$$

$$\min \quad \frac{\phi}{2} = K\pi \quad \Rightarrow \quad h = \frac{K\lambda_0}{2n\cos i'} \; . \tag{g}$$

Da $I_T = I - I_R$ risulta poi che se l'intensità è massima in P_1 essa è minima in P_2 e viceversa.

Nel caso numerico proposto abbiamo:

$$i = 10° \;,\; \iota' = 6.65° \;,\; \frac{\phi}{2} = 5959.6\pi \text{ rad} \;,\; R_t = 0.0415 \;,$$

$$R_p = 0.0383 \;,\; I_R = 5.64 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{W}}{\text{cm}^2},\; I_T = 94.36 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \; .$$

A parità di angolo di incidenza e variando lo spessore h, I_R varia tra zero e il valore massimo $14.75 \cdot 10^{-2}$ W/cm², in corrispondenza I_T varia tra il valore massimo $I = 1$ W/cm² e il valore minimo $85.25 \cdot 10^{-2}$ W/cm².

Per angoli di incidenza piccoli ($\iota \lesssim 10°$) in pratica $R_p = R_t = R = (n-1)^2/(n+1)^2 = 4 \cdot 10^{-2}$, con queste semplificazioni e usando direttamente la (b) si trova $I_R = 5.66 \cdot 10^{-2}$ W/cm², con un errore rispetto al valore più accurato dello 0.35%.

La condizione che la lastra sia indefinita non è stringente, almeno finché l'angolo di incidenza resta tale da rendere piccolo il coefficiente di riflessione ($\iota < 30°$). Infatti allora le ampiezze delle onde ottenute dopo alcune riflessioni sono trascurabili e l'interferenza avviene in ogni caso tra poche onde che occupano una parte finita della lastra; matematicamente ciò è dovuto alla rapida convergenza della serie geometrica che dà l'espressione del campo. Nel problema 12.24 vedremo un dispositivo fondato sulle riflessioni multiple, analogo a quello ora descritto, in cui interviene effettivamente nell'interferenza un numero molto grande di onde con intensità paragonabili.

12.21. ***Un fascio di luce naturale monocromatica (λ = 500 nm) proveniente da una sorgente estesa incide su una lastra di plexiglas (n = 1.5) di spessore h = 1 mm; gli angoli di incidenza variano tra 0° e 15°. Puntando un telescopio con l'asse ottico normale alla lastra dalla parte della sorgente, sul piano focale di esso si osserva la formazione di un sistema di frange chiare e scure circolari. Descrivere la formazione di queste frange, calcolandone il numero.***

La relazione (d) del problema 12.20 dà, per un fissato valore di h, come varia l'intensità della luce riflessa in funzione di ι' e quindi di ι; si è già notato che per valori piccoli di ι $R_t = R_p = R$. Questo è il nostro caso per cui scriviamo l'intensità della luce riflessa in un punto P del piano focale del telescopio in accordo con la (b) del problema 12.20:

$$\frac{I_R}{I} = \frac{4R\operatorname{sen}^2 \phi/2}{(1-R)^2 + 4R\operatorname{sen}^2 \phi/2} = \frac{0.16\operatorname{sen}^2 \phi/2}{0.92 + 0.16\operatorname{sen}^2 \phi/2} \; , \tag{a}$$

essendo $\phi/2 = (2\pi/\lambda_0)nh\cos i' = 18849.6 \cos i'$.

I punti di eguale intensità sono caratterizzati da un valore costante di ϕ, cioè di ι' e quindi di ι; poiché l'asse del telescopio è normale alla lamina, essi stanno su circonferenze concentriche con l'asse del telescopio; nel fuoco in particolare interferiscono le onde con $i = \iota' = 0$. I massimi e i minimi si calcolano con le solite condizioni:

$$\max \quad \frac{\phi}{2} = (2K+1)\,\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\left(\frac{\phi}{\pi} - 1\right) = \frac{1}{2}\,(12 \cdot 10^3 \cos i' - 1) \; ,$$

$$\min \quad \frac{\phi}{2} = K\pi \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\phi}{2\pi} = 6 \cdot 10^3 \cos i' \; .$$

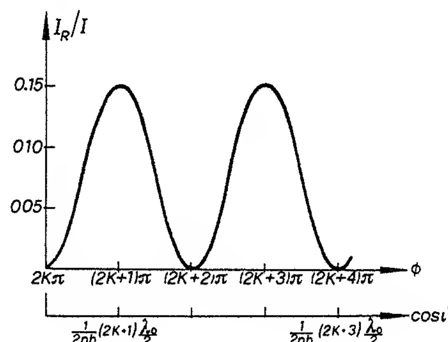
Il valore massimo di ι', in corrispondenza a $i = 15°$, è 9.94° e possiamo compilare la seguente tabella

i	i'	K_{max}	K_{min}
0°	0°	5999.5	6000
15°	9.94°	5909.5	5910

$$\Rightarrow \quad 5910 \leqslant K_{max} \leqslant 5999 \quad , \qquad 5910 \leqslant K_{min} \leqslant 6000 \quad .$$

In conclusione si hanno 90 massimi e 91 minimi; sia il centro che il bordo estremo della figura interferenziale risultano oscuri.

L'andamento dell'intensità, dato dalla (a), è riportato in figura nell'intorno di due massimi adiacenti. Le frange sono equispaziate in ϕ e quindi in $\cos i'$; in funzione di i' invece la densità delle frange non è costante, bensì è proporzionale a $\operatorname{sen} i'$, cioè le frange si addensano al crescere di i': infatti, se $dN/d\cos i'$ è costante, dN/di' è proporzionale a $\operatorname{sen} i'$.



Poiché ogni frangia è caratterizzata da un valore costante di i' si parla di un sistema di *frange di eguale inclinazione*; inoltre, siccome il fenomeno è osservato nel piano focale di uno strumento, si dice che le *frange* sono *localizzate all'infinito*

12.22. *Un fascio sottile di luce naturale monocromatica ($\lambda_0 = 400$ nm) incide su una lastra di plexiglas ($n = 1.5$) di spessore $h = 1$ cm. Gli angoli di incidenza possono essere compresi tra 0° e 5° oppure tra 87° e 89°. Puntando un telescopio con l'asse ottico normale alla lastra dalla parte opposta a quella contenente la sorgente (osservazione in trasmissione) in entrambi i casi si osserva la formazione di un sistema di frange, ma con caratteristiche, almeno nel primo caso (0°–5°), molto diverse da quelle incontrate nel problema 12.21. Descrivere la formazione dei due sistemi di frange calcolando il numero di frange osservato e discutendo le principali differenze tra essi.*

Per angoli di incidenza compresi tra 0° e 5°, come abbiamo notato nei problemi 12.20 e 12.21, il coefficiente di riflessione dipende poco da i e dallo

stato di polarizzazione del fascio incidente; cioè, con buona approssimazione, $R_t = R_p = R = (n-1)^2/(n+1)^2 = 0.04$. Per angoli compresi tra 87° e 89° invece $R_t \neq R_p$; però, in un intervallo angolare così piccolo, si può assumere per ciascuno di essi un valor medio che risulta 0.88 per R_t e 0.76 per R_p. Quello che si vede nel telescopio in entrambi i casi è ancora una successione di circonferenze più o meno illuminate, per le stesse ragioni esposte nel problema 12.21. Le posizioni dei massimi osservati in trasmissione coincidono con quelle dei minimi osservati in riflessione e pertanto, da (d) o (e) del problema 12.20, deve essere $\phi/2 = K\pi$ ovvero $2nh\cos i' = K\lambda_0$.

Nell'intervallo tra 0° e 5° i' varia tra 0° e 3.33° e in corrispondenza

$$\frac{2nh\cos 3.33°}{\lambda_0} = 74873.4 < K \leqslant \frac{2nh\cos 0°}{\lambda_0} = 75000 \quad .$$

Il numero di massimi è $N_1 = 127$; in particolare, il centro di questo sistema è luminoso. Analogamente tra 87° e 89° i' varia tra 41.74° e 41.80° e

$$\frac{2nh\cos 41.80°}{\lambda_0} = 55910.7 < K < \frac{2nh\cos 41.74°}{\lambda_0} = 55963 \quad ;$$

il numero di massimi è $N_2 = 53$.

Per il calcolo dell'intensità trasmessa tra 0° e 5° usiamo la (c) del problema 12.20.

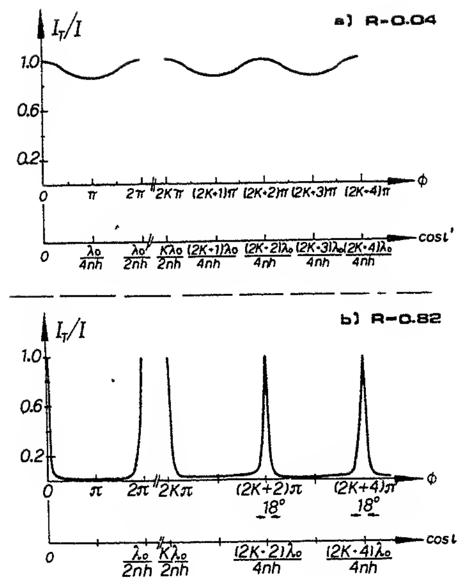
$$\frac{I_1^T}{I} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\operatorname{sen}^2\phi/2} = \frac{0.92}{0.92 + 0.16\operatorname{sen}^2\phi/2} \quad , \qquad 0.85 - 1 \quad . \tag{a}$$

Invece per il calcolo dell'intensità trasmessa tra 87° e 89° ci serviamo della (e).

$$\frac{I_2^T}{I} = \frac{7.2 \cdot 10^{-3}}{14.4 \cdot 10^{-3} + 3.52\operatorname{sen}^2\phi/2} + \frac{28.8 \cdot 10^{-3}}{57.6 \cdot 10^{-3} + 3.04\operatorname{sen}^2\phi/2} \quad , \qquad 11.33 \cdot 10^{-3} - 1 \quad . \tag{b}$$

Gli andamenti di (a) e (b) sono riportati nella figura, nell'intorno di due massimi adiacenti L'intensità non raggiunge mai il valore zero; nel primo caso essa oscilla tra $0.85I$ e I e non si può parlare di frange, nel senso inteso finora, bensì di una limitata variazione periodica al variare di i'. Nel secondo caso invece l'intensità varia tra $1.13 \cdot 10^{-2}I$ e I· si ha formazione di frange chiare, molto ben definite, intervallate da regioni in cui l'intensità è praticamente nulla. Se operiamo con angoli di incidenza diversi e quindi con coefficienti di riflessione compresi tra gli estremi ora considerati, troviamo frange che diventano *tanto più nette quanto maggiore è R*. Si può definire come *fattore di contrasto* C del sistema di frange il rapporto tra I_{max} e I_{min}:

$$C = \frac{I_{max}}{I_{min}} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-R_t}{1+R_t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-R_p}{1+R_p}\right)^2\right]^{-1} \approx \left(\frac{1+R}{1-R}\right)^2 \quad ,$$



l'ultima eguaglianza è valida per ι piccolo oppure praticamente eguale a 90°. Nel nostro caso

$$0° \div 5° \quad C = 1.17 \quad , \quad 87° - 89° \quad C = 88.2 \quad .$$

12.23. ***Un sottile fascio di luce di intensità $I = 1$ W/cm² incide su una lastra a facce piane e parallele di spessore $h = 1$ mm e indice di rifrazione $n = 1.5$, una prima volta con un angolo di incidenza $i = 5°$ e una seconda con un angolo $i = 89°$; nei due casi il coefficiente di riflessione assume i valori 0.04 e 0.90. Il fascio presenta, con la stessa intensità, tutte le lunghezze d'onda comprese tra $\lambda_1 = 400$ nm e $\lambda_2 = 700$ nm. La luce trasmessa dalla lastra viene portata a interferire nel piano focale di un telescopio. Calcolare la composizione spettrale della luce nei due casi.***

Il fascio incidente ha una composizione spettrale uniforme e, come visto nel problema 12.12, possiamo scrivere

$$dI = \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1}\, d\lambda = 3.33 \cdot 10^4 d\lambda \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2} \quad .$$

Con i valori degli angoli di incidenza $R_p = R_t = R$; utilizziamo nel calcolo dell'intensità trasmessa la (a) del problema 12.22:

$$dI_T = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\,\mathrm{sen}^2\,\phi/2}\, dI =$$

$$= \frac{I}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\,\mathrm{sen}^2\,\phi/2}\, d\lambda = F(\lambda)\, d\lambda \quad .$$

Dato h, $\phi/2 = (2\pi/\lambda)\, nh\cos i'$ è funzione di λ. I massimi e i minimi della funzione $F(\lambda)$ che dà la composizione spettrale della luce trasmessa si ottengono per

$$\frac{\phi}{2} = K\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2nh\cos\iota'}{\lambda_2} \leqslant K \leqslant \frac{2nh\cos\iota'}{\lambda_1} \qquad \max$$

$$\frac{\phi}{2} = (2K+1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\frac{4nh\cos\iota'}{\lambda_2} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant K \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4nh\cos i'}{\lambda_1} - 1\right) \qquad \min \quad .$$

Gli estremi di $F(\lambda)$ sono $F_{max} = I/(\lambda_2 - \lambda_2)$ e $F_{min} = \dfrac{I}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\dfrac{1-R}{1+R}\right)^2$.

Introducendo i dati numerici abbiamo la tabella seguente:

ι	$K_{max}\ (\lambda_2)$	$K_{max}\ (\lambda_1)$	$K_{min}\ (\lambda_2)$	$K_{min}\ (\lambda_1)$	F_{max}	F_{min}
5°	4279	7487	4278	7486	$3.33 \cdot 10^4$	$2.84 \cdot 10^4$
89°	3195	5590	3195	5590	$3.33 \cdot 10^4$	92.24

I valori di $F(\lambda)$ sono in W/cm³; il loro andamento nei due casi è rappresentato in figura. A differenza dell'analoga figura del problema 12.22, dove sono riportate frange a λ fisso e ι variabile, qui i è fisso e λ variabile. Si può notare che per grandi angoli di incidenza, ovvero per coefficienti di riflessione grandi, la lastra trasforma lo spettro continuo in uno a righe; invece per $i = 5°$ lo spettro è ancora praticamente continuo. Il fattore di contrasto vale nei due casi

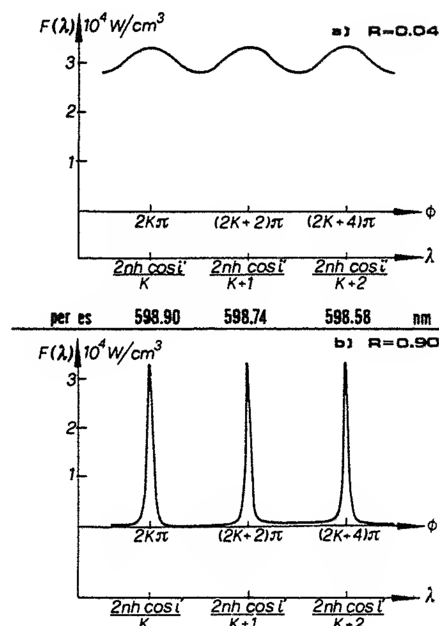
$$C(5°) = 1.17 \quad , \quad C(89°) = 361 \quad .$$

Nel caso di uno spettro di righe, in cui le posizioni dei minimi non sono definibili con dei punti, occorre cambiare la definizione di larghezza di una frangia, data nel problema 12.1. Si chiama ora larghezza di una frangia la distanza tra due punti adiacenti a un massimo nei quali l'intensità si riduce a metà di quella massima. In termini di sfasamento, questi due punti sono caratterizzati da

$$\phi = 2K\pi \pm \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ovvero} \quad \mathrm{sen}^2\frac{\phi}{2} = \mathrm{sen}^2\frac{\varepsilon}{4} \quad .$$

Imponendo

$$\frac{I_T}{I} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R^2\mathrm{sen}^2\,\varepsilon/4} = \frac{1}{2}$$



si ricava $\mathrm{sen}^2 \varepsilon/4 = (1-R)^2/4R$; per valori $R \geqslant 0.85$ il seno si può approssimare all'angolo commettendo un errore di qualche permille. Quindi

$$\varepsilon = \frac{2(1-R)}{R^{1/2}} \quad . \tag{a}$$

Per incidenza di 89° la larghezza delle righe in termini di sfasamento risulta $\varepsilon = 0.21$ rad. Si definisce infine *finezza delle frange* il rapporto tra la distanza angolare che separa due massimi e la larghezza ε:

$$F = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi R^{1/2}}{1-R} \quad ; \tag{b}$$

con $\varepsilon = 0.21$ rad $\quad F = 29.9$.

Al crescere di R aumentano contrasto e finezza, mentre diminuisce la larghezza. Caratteristica saliente di questi sistemi interferenziali fondati sulla riflessione multipla è di far partecipare all'interferenza un gran numero di onde e ciò si raggiunge appunto con R grande; vedremo nel problema 12.25 l'importanza pratica di tali fatti.

Ragionando in termini di lunghezza d'onda invece che di sfasamenti, chiamiamo λ_M una lunghezza d'onda corrispondente a un massimo e λ_a, λ_b due lunghezze d'onda adiacenti a λ_M alle quali l'intensità è metà della massima. Si chiama larghezza relativa della riga il rapporto

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_M} = \frac{\lambda_b - \lambda_a}{\lambda_M} = \frac{\Delta\phi}{\phi_M} = \frac{\phi_b - \phi_a}{\phi_M} = \frac{\varepsilon}{\phi_M} = \frac{1}{KF} \quad . \tag{c}$$

Infatti $\phi_M = 2K\pi$; per il resto abbiamo usato (a) e (b). Sempre nel caso $\iota = 89°$ $\Delta\lambda/\lambda = 3.34 \cdot 10^{-2}/K$. Vediamo che la larghezza relativa è diversa nei vari punti dello spettro; essa è minima per $\lambda = 400$ nm e massima per $\lambda = 700$ nm:

$$\frac{3.34 \cdot 10^{-2}}{5590} = 0.6 \cdot 10^{-5} \leqslant \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leqslant \frac{3.34 \cdot 10^{-2}}{3195} = 1.0 \cdot 10^{-5} \quad .$$

La larghezza assoluta $\Delta\lambda$ varia tra $240 \cdot 10^{-5}$ nm e $700 \cdot 10^{-5}$ nm: il nome di riga è ben giustificato.

12.24. ***Una lastra a facce piane e parallele di un materiale trasparente, con indice di rifrazione $n = 1.46$ e spessore $h = 1$ cm, ha le due superficie ricoperte da un sottile strato di argento, così che il 95% dell'intensità della luce incidente è riflesso, il 4% trasmesso e l'1% assorbito. Questa lastra viene illuminata con una sorgente estesa, monocromatica con $\lambda = 600$ nm, e viene osservata in trasmissione con un telescopio il cui asse ottico è ortogonale alla lamina. Sul piano focale del telescopio si osserva un sistema di frange circolari analogo a quello descritto nel secondo caso del problema 12.22. Determinare a quale angolo rispetto alla normale si forma la decima frangia di interferenza.***

Il dispositivo descritto è uno dei possibili tipi di *interferometro di Fabry-Perot*. La situazione è analoga a quella del problema 12.22 in quanto si sfrutta ancora la riflessione multipla. Però, mentre là si faceva uso della riflessione e della trasmissione che hanno origine dall'incidenza della luce su superficie di discontinuità dell'indice di rifrazione n, qui si sfrutta la riflessione su superficie metalliche parzialmente trasparenti e molto riflettenti. Il vantaggio di questo metodo rispetto al precedente sta nel fatto che il coefficiente R è grande per tutte le direzioni di incidenza; ciò porta, come si è discusso, a sistemi di frange con grande contrasto e grande finezza; la larghezza è stata descritta nei problemi 12.22 e 12.23.

La relazione che permette di calcolare l'angolo al quale si forma una frangia chiara è

$$2nh\cos\iota' = K\lambda$$

dove ι' è l'angolo di incidenza della luce dentro la lastra. Il centro di questo sistema di frange di eguale inclinazione è chiaro; alla frangia centrale ($\iota = \iota' = 0$) compete il valore massimo di K:

$$K_{\max} = \frac{2nh}{\lambda} = 48667 \quad .$$

La decima frangia chiara si forma per $K = K_{\max} - 9 = 48658$ e in corrispondenza

$$\cos\iota' = \frac{K\lambda}{2nh} = 0.9998 \quad , \quad \text{sen}\,\iota' = 1.887 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\iota = n\,\text{sen}\,i' \quad \Rightarrow \quad \iota = 1.58° \quad .$$

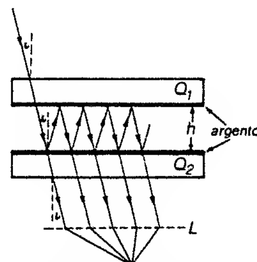
Questo è l'angolo di emergenza dalla lastra della luce che interferisce sulla decima frangia.

L'intensità dei massimi, a causa dell'assorbimento, è minore di quella che si ha con la lastra del problema 12.22, supposta completamente trasparente. Si potrebbe dimostrare che in un massimo

$$\frac{I_T}{I} = \left(1 - \frac{A}{1-R}\right)^2 \quad \text{con} \quad A = 1 - (R + T)$$

coefficiente di assorbimento. Nel nostro caso $I_T/I = 0.64$, cioè il 64% dell'intensità che si avrebbe se non ci fosse assorbimento.

12.25. ***Un interferometro di Fabry-Perot è costituito da due lastre piane e parallele di quarzo Q_1 e Q_2 separate da una distanza h che può essere variata, mediante una vite micrometrica, da zero al valore massimo $h_0 = 30$ cm. Le superficie interne sono ricoperte da una sottile pellicola d'argento la quale riflette il 95% della luce incidente, ne trasmette il 4% e ne assorbe l'1%. Illuminando con una sorgente estesa di luce monocromatica ($\lambda = 600$ nm) si osserva un sistema di frange sottili nel piano focale di un telescopio L (vedi figura). Individuata la frangia che corrisponde a raggi che giungono al telescopio con un angolo di inclinazione rispetto alla normale pari a $i = 26°$, si fa variare h e quello che si osserva è uno spostamento del sistema di frange; cioè, sull'anello chiaro corrispondente alla frangia osservata passano successivamente varie frange. Descrivere il fenomeno, calcolando il numero di frange che passano per una variazione di h da zero a h_0. Assumendo di poter apprezzare uno spostamento del sistema di frange pari a metà della distanza tra due frange consecutive, determinare il minimo Δh che lo strumento può rilevare.***



Nel piano focale del telescopio si osserva un sistema di frange di eguale inclinazione formato dalle onde generate per riflessione multipla sulle due superficie argentate che delimitano una lastra d'aria di spessore h. Valgono tutte le considerazioni del problema 12.24: si ha ora interferenza con un massimo di intensità per $2h\cos\iota = K\lambda$ in quanto $n = 1$ e l'angolo di incidenza della luce sulla lastra d'aria coincide con l'angolo a cui si osserva il K-esimo anello chiaro. Se facciamo variare la distanza tra le lastre di una quantità Δh, all'angolo ι avremo ancora un massimo di intensità se $2(h + \Delta h)\cos\iota = K'\lambda$, cioè se al massimo di ordine K si è sostituito quello di ordine K'. In altre parole, il massimo di ordine K' che prima dello spostamento corrispondeva ad un anello chiaro la cui posizione angolare era individuata da $\cos i' = K'\lambda/2h$ si è spostato sull'anello corrispondente a $\cos\iota$. Si è quindi avuto lo spostamento di un numero di frange determinato da $(K' - K)\lambda = \Delta N\lambda = 2(h + \Delta h)\cos\iota - 2h\cos\iota = 2\Delta h\cos\iota$ ovvero

$$\Delta N = \frac{2\cos\iota}{\lambda}\,\Delta h = 29959.8\,\Delta h \quad . \qquad \text{(a)}$$

Per una variazione $\Delta h = 30$ cm, $\Delta N = 898794$. A $\Delta N = 1/2$ corrisponde secondo la (a) uno spostamento $\Delta h = \lambda/4\cos\iota = 0.167$ µm. È da notare che lo spostamento di mezza frangia è effettivamente ben osservabile in questo strumento con grande precisione poiché, come osservato nei problemi 12.22, 12.23 e 12.24 e messo in evidenza dalle relative figure, la larghezza delle frange è piccola se paragonata con la distanza tra due frange consecutive e inoltre tra queste due frange sottili c'è una regione di buio.

Quanto visto mostra l'importanza dell'interferometro di Fabry-Perot come misuratore di lunghezze l per confronto diretto con una lunghezza d'onda presa come campione. Infatti è possibile misurare l in queste unità semplicemente contando lo spostamento di N frange e quindi mediante la (a)

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{N}{2\cos\iota} \quad \text{con errore} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta N}{N} \quad .$$

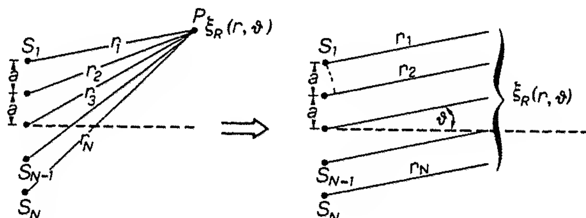
Nel nostro caso numerico $l/\lambda = 5 \cdot 10^5$, $\Delta l/l = 0.56 \cdot 10^{-6}$, $l = 30$ cm ± 0.167 µm; l'errore è dell'ordine di una parte su un milione.

L'elevata precisione dei dispositivi interferenziali aveva condotto, nel 1960, alla decisione di scegliere come unità di misura delle lunghezze la lunghezza d'onda di una riga emessa da una sostanza invece del regolo campione di platino-iridio. Precisamente era stato definito il metro come pari a 1650763.73 volte la lunghezza d'onda nel vuoto della riga rosso-arancione del Kripton 86 emessa in una ben determinata transizione tra due livelli energetici; visto il numero di cifre una tale definizione ha una precisione dell'ordine di 1 su 10^8. Nel paragrafo 10d. abbiamo detto come, al momento attuale, il metro sia definito in base alla velocità della luce, nota con un errore di 1 su 10^9.

In realtà, anche questa nuova definizione è legata in parte a misure interferometriche. Infatti per alcune righe emesse da opportuni laser è stato possibile eseguire misure di lunghezza d'onda con metodi interferenziali precise fino a 1 su 10^9 e un'analoga precisione si è ottenuta in una misura separata della frequenza, definendo così c come $\lambda\nu$. La parte tecnologicamente più avanzata e che promette grandi sviluppi è quella relativa alla misura delle frequenze ottiche ($\sim 5 \cdot 10^{14}$ Hz), che viene fatta generando battimenti tra queste frequenze e frequenze di microonde ($\sim 10^{10}$ Hz), note con estrema precisione per confronto con orologi atomici a Cesio.

12.26. *N sorgenti di onde sferiche di lunghezza d'onda λ, sincrone, sono disposte su una linea; la distanza a tra due sorgenti consecutive è costante. In un piano contenente questa linea si consideri un rivelatore posto a grande distanza dal sistema lungo una direzione che forma un angolo θ con la normale alla linea delle sorgenti. Descrivere come varia l'intensità rivelata I(θ) in funzione del rapporto λ/a e, fissato λ/a, in funzione del numero N di sorgenti.*

Diciamo innanzitutto che i risultati che troveremo, dipendendo da caratteristiche generali della propagazione ondosa, hanno validità generale; proprio per questo non si è specificato il tipo di onda.



Facendo riferimento alla figura, se $\xi_1 = \xi_0/r$ rappresenta la perturbazione prodotta dalla sorgente S_1 all'istante t nel punto P in cui si trova il rivelatore, $\xi_2 = \xi_1\, e^{i\phi}$ è quella prodotta da S_2, $\xi_3 = \xi_2\, e^{i\phi} = \xi_1\, e^{2i\phi}$ quella prodotta da S_3 e così via. Poiché la distanza del rivelatore è molto grande rispetto alle dimensioni del sistema ($r \gg Na$), la differenza di fase tra le onde emesse da due sorgenti consecutive vale

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\, a \operatorname{sen}\theta \quad . \tag{a}$$

La perturbazione risultante, utilizzando (12.17), è data da

$$\xi_R^2 = \frac{\xi_0^2}{r^2}\, \frac{\operatorname{sen}^2 N\phi/2}{\operatorname{sen}^2 \phi/2} \quad .$$

Inseriamo la (a) e passiamo all'intensità, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza:

$$I(\theta,r) = \frac{I_0}{r^2}\, \frac{\operatorname{sen}^2(N\pi a \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\operatorname{sen}^2(\pi a \operatorname{sen}\theta/\lambda)} \quad . \tag{b}$$

La funzione $I(\theta)$ ammette dei massimi principali per

$$\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = K\pi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = K\,\frac{\lambda}{a} \quad (K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{c}$$

e vale in tal caso

$$I_{max} = \frac{N^2 I_0}{r^2} \quad . \tag{d}$$

Infatti $\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} Nx}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\pi} \frac{N\cos Nx}{\cos x} = N$. I minimi di $I(\theta)$ si hanno per valori di θ che annullano il numeratore, ma non il denominatore:

$$\frac{N\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = K'\pi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{K'\lambda}{Na} \tag{e}$$

con $K' = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N-1), \pm(N+1), \ldots, \pm(2N-1), \pm(2N+1), \ldots$, escludendo cioè i valori $0, \pm N, \pm 2N, \ldots$ per i quali si hanno invece i massimi principali. Tra i massimi principali ci sono allora $N-1$ minimi con $I = 0$ e di conseguenza $N-2$ massimi secondari che, se N è grande, si trovava con buona approssimazione a metà tra due minimi, cioè per

$$\operatorname{sen}\theta = (2K''+1)\,\frac{\lambda}{2Na} \tag{f}$$

Sostituendo (f) in (b) si trova che l'intensità dei massimi secondari vale

$$I_m = \frac{I_0}{r^2}\, \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{(2K''+1)\pi}{2N}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_m}{I_{max}} = \frac{1}{N^2}\, \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{(2K''+1)\pi}{2N}}$$

Si definisce larghezza angolare di un massimo principale la distanza tra i due minimi adiacenti:

$$\Delta(\operatorname{sen}\theta) = \frac{2\lambda}{Na} \quad . \tag{g}$$

In conclusione, da (b) e (c) vediamo come la distribuzione dell'intensità nello spazio, ovvero le direzioni per le quali si hanno massimi principali di intensità, dipendano da λ/a. Fissato λ/a, all'aumentare di N aumentano l'intensità dei massimi principali, proporzionale al quadrato del numero delle sorgenti secondo (d), il numero dei minimi e dei massimi secondari, invece, e ciò è molto importante, diminuisce la larghezza angolare che al limite, per N molto grande, diventa

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Na} \quad ; \tag{h}$$

diminuisce infine l'intensità dei massimi secondari e al limite per N molto grande si può scrivere

$$r_{K'} = \frac{I_m}{I_{max}} = \frac{4}{(2K''+1)^2\,\pi^2} \quad ;$$

nel primo massimo secondario $r_1 = 0\ 045$, nel secondo $r_2 = 0.016$, nel terzo $r_3 = 0.008$ e così via. Insomma, l'energia viene emessa dalle sorgenti preferen-

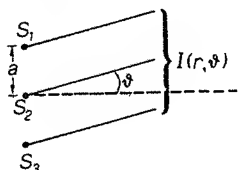
zialmente nelle direzioni date dalla (c), che sono tanto più definite quanto maggiore è il numero N di sorgenti; in questo senso si parla di una *emissione direzionale*. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti nel problema 12.6 si può dire che se W_0 è la potenza di una singola sorgente, la potenza di N sorgenti è NW_0, distribuita con una intensità costante in tutte le direzioni $I = NW_0/4\pi r^2$, con $r \gg Na$, se le sorgenti sono incoerenti, con una legge data dalla (b) se le sorgenti sono coerenti.

12.27. ***Un sistema di $N = 3$ antenne di onde elettromagnetiche con frequenza $\nu = 10^8$ Hz, sincrone, è disposto lungo una linea; la distanza tra due antenne consecutive è $a = 6$ m. Calcolare l'intensità $I(\theta)$ prodotta da questo sistema a una distanza tale che l'intensità di ogni sorgente sia $I_0 = 10^{-3}$ W/cm², facendo un diagramma polare di $I(\theta)$. Ripetere il calcolo con $N = 5$ antenne, poste alla stessa distanza rispettiva a.***

Si tratta di applicare i risultati del problema 12.26; la lunghezza d'onda è $\lambda = v/\nu = 3$ m, per cui $\lambda/a = 1/2$ L'intensità in funzione di θ e il suo valore massimo sono dati da

$$I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(6\pi \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2(2\pi \operatorname{sen}\theta)}, \qquad I_{max} = 9I_0 = 9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}, \tag{a}$$

avendo usato la (b) e la (d) appunto del problema 12.26. In base alla (c) e alla (e) i massimi principali e i minimi si osservano agli angoli



K	0	1	2
sen θ	0	0.5	1
θ	0°	30°	90°

K'	1	2	4	5
sen θ	1/6	1/3	2/3	5/6
θ	9.6°	19.5°	41.8°	56.4°

Davanti a ogni numero di questa tabella è sottinteso un segno ± in quanto le posizioni sono simmetriche rispetto a $\theta = 0$. Inoltre c'è simmetria rispetto alla linea contenente le sorgenti per cui una posizione di estremo trovata al valore θ (compreso tra $-90°$ e $90°$) c'è anche all'angolo $\pi - \theta$. Dalla (g) ricaviamo poi che le larghezze dei massimi principali sono $\Delta(\operatorname{sen}\theta) = 0.33$. Per avere il risultato in termini di angoli non possiamo usare la (h) perché N non è sufficientemente grande; però, in base alla definizione di larghezza di un massimo come distanza tra i due minimi adiacenti, dalla tabella delle posizioni dei minimi e dei massimi deduciamo:

$$\Delta\theta_0 = 2 \cdot 9.6° = 19.2° \ , \ \Delta\theta_1 = 41.8° - 19.5° = 22.3° \ ,$$

$$\Delta\theta_2 = 2 \cdot (90° - 56.4°) = 67.2° \ .$$

Per ogni coppia di minimi che non racchiude un massimo principale c'è un massimo secondario che, nella variabile senθ, cade approssimativamente a metà:

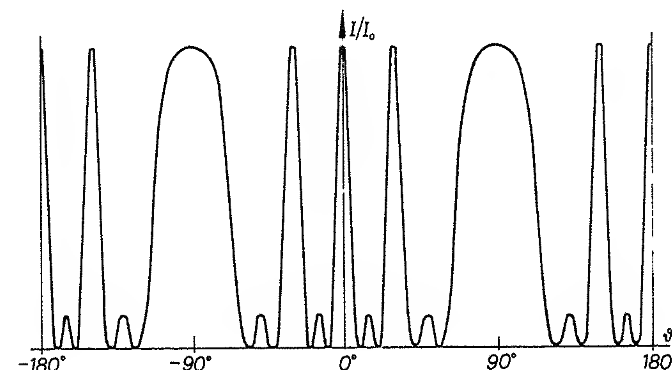
tra $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{6}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$ posizione $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$ $\theta = 14.5°$.

tra $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{6}$ posizione $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}$ $\theta = 48.6°$.

L'intensità nei punti di massimo secondario, secondo la (a) di questo problema, vale

$$I_1 = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(6\pi \cdot \frac{1}{4}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right)} = I_0 \quad , \quad I_2 = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(6\pi \cdot \frac{3}{4}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(2\pi \cdot \frac{3}{4}\right)} = I_0 \ ,$$

cioè $1/N^2 = 1/9$ rispetto a quella dei massimi principali.

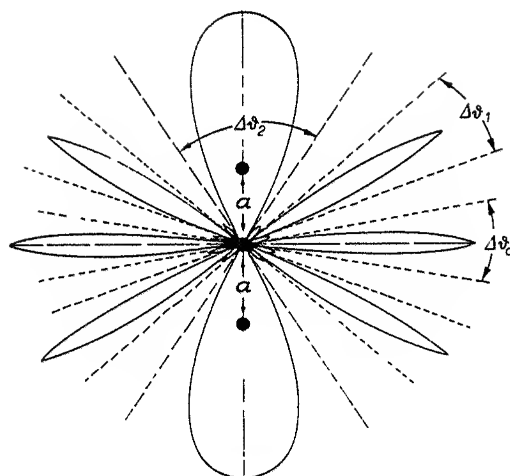


L'intensità in funzione dell'angolo di emissione, tra $-180°$ e $180°$, è mostrata in figura. Ancora più significativo è un diagramma polare nel quale, per ogni valore di θ, è riportato l'estremo di un segmento proporzionale a $I(\theta)$, come abbiamo già visto nel problema 10.11.

Se a parità di $\lambda/a = 1/2$ consideriamo un sistema di $N = 5$ antenne, l'intensità diventa

$$I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(10\pi \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2(2\pi \operatorname{sen}\theta)} \ .$$

Le posizioni dei massimi principali non cambiano, ma la loro intensità è $I_{max} = N^2 I_0 = 25 I_0$. I minimi cadono agli angoli dati nella tabella.



K'	1	2	3	4	6	7	8	9
$\operatorname{sen}\theta$	1/10	1/5	3/10	2/5	3/5	7/10	4/5	9/10
θ	5.7°	11.5°	17.5°	23.6°	36.9°	44 4°	53.1°	64.2°

Ci sono $N-1=4$ minimi tra due massimi principali consecutivi. Le larghezze angolari di questi sono ora minori che nel caso $N=3$:

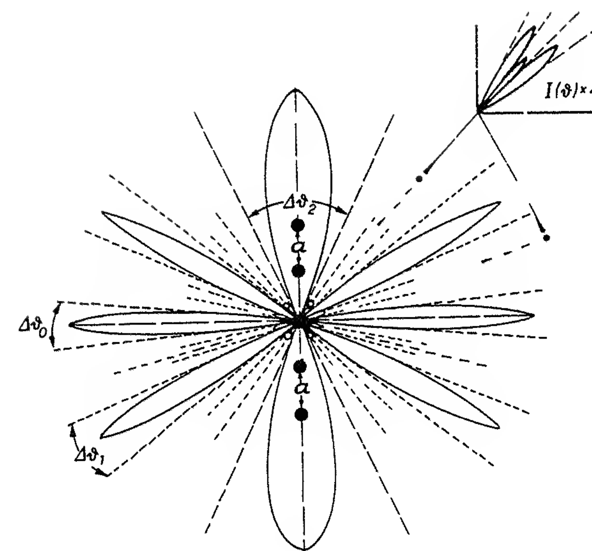
$$\Delta\theta_0 = 2\cdot 5.7° = 11.4° \ , \ \Delta\theta_I = 36.9° - 23.6° = 13.3° \ ,$$

$$\Delta\theta_3 = 2\cdot(90° - 64.2°) = 51.6° \ .$$

Tra i quattro minimi ci sono infine tre massimi secondari; le posizioni angolari e le intensità relative a I_0 e a I_{max} sono riportate in tabella.

$\operatorname{sen}\theta$	3/20	5/20	7/20	13/20	15/20	17/20
θ	8.6°	14.5°	20.5°	40.5°	48.6°	58.2°
I_m/I_0	1.53	1.00	1.53	1.53	1.00	1.53
I_m/I_{max}	0.06	0.04	0.06	0.04	0.04	0.06

Il diagramma polare per $N=5$ è riportato in figura. Il confronto con $N=3$ evidenzia l'effetto direzionale del fenomeno, tanto più marcato quanto più grande è il numero N di sorgenti. Nei problemi sui reticoli di diffrazione trattati nel prossimo capitolo vedremo il caso limite quando N può assumere valori fino a 10^5.



12.28. ***Un sistema di $N=4$ sorgenti di onde sonore sferiche di frequenza $\nu = 3.3$ KHz, sincrone, è disposto lungo una linea; la distanza tra due sorgenti consecutive può assumere i valori $a=10$ cm oppure $a=5$ cm. Disegnare un diagramma polare dell'intensità nei due casi, a distanze r dal sistema molto maggiori di Na. Si assuma il valore $v=330$ m/s per la velocità di propagazione.***

La lunghezza d'onda delle onde emesse dalle sorgenti è $\lambda = v/\nu = 10$ cm, per cui i due casi possibili di distanza tra le sorgenti corrispondono ad $a=\lambda$ o ad $a=\lambda/2$, ovvero $\lambda/a=1$, $\lambda/a=2$ (a differenza del caso trattato nel problema 12.27 in cui $\lambda/a = 1/2$). Sulla linea di quanto già visto diamo schematicamente le soluzioni nei due casi.

A. $\lambda = a$

intensità $\quad I(\theta) = I_0 \dfrac{\operatorname{sen}^2(4\pi\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2(\pi\operatorname{sen}\theta)} \ , \quad I_{max} = 16 I_0 \ ,$

massimi $\quad \operatorname{sen}\theta = K\dfrac{\lambda}{a} = K \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \theta = 0° \ , \ \operatorname{sen}\theta = 1 \quad \theta = 90° \ ,$

minimi $\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{K'\lambda}{4a} = \dfrac{K'}{4} \ \Rightarrow$

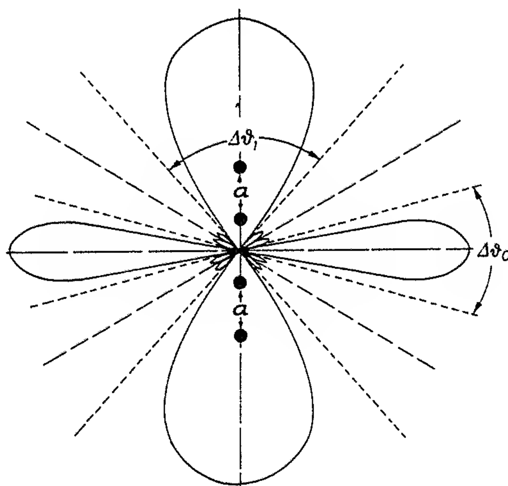
K'	1	2	3
$\operatorname{sen}\theta$	1/4	1/2	3/4
θ	14.5°	30°	48.6°

larghezza dei due massimi $\Delta\theta_0 = 2 \cdot 14.5° = 29°$,
$\Delta\theta_1 = 2(90° - 48.6°) = 82.8°$,

massimi secondari $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{8}$ $\theta = 22.0°$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{8}$ $\theta = 38.7°$

$$I_m/I_0 = 1.17 \quad , \quad I_m/I_{max} = 0.07 \quad \text{per entrambi} \quad .$$

Il diagramma polare è riportato in figura.



B. $\lambda = 2a$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(2\pi \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta\right)} \quad , \quad I_{max} = 16 I_0$$

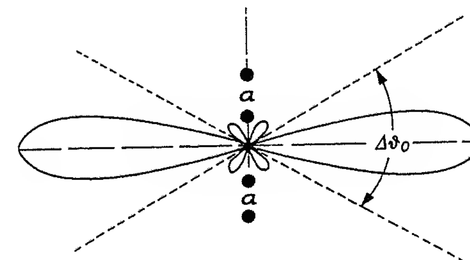
massimi $\operatorname{sen}\theta = K\frac{\lambda}{a} = 2K \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \theta = 0°$

minimi $\operatorname{sen}\theta = \frac{K'\lambda}{4a} = \frac{K'}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \quad \theta = 30°$, $\operatorname{sen}\theta = 1 \quad \theta = 90°$

larghezza dell'unico massimo $\Delta\theta = 60°$

massimo secondario $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}$ $\theta = 48.6°$ $I_m = 1.17\, I_0 = 0.07\, I_{max}$.

In figura è mostrato il diagramma polare per questo secondo caso.



Riassumiamo i risultati visti ora, nel problema 12.27 e nel problema 12.6, in funzione di λ/a. Il numero d'ordine dei massimi principali è fissato dalla condizione

$$\operatorname{sen}\theta = K\frac{\lambda}{a} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad K \leq \frac{a}{\lambda} \quad .$$

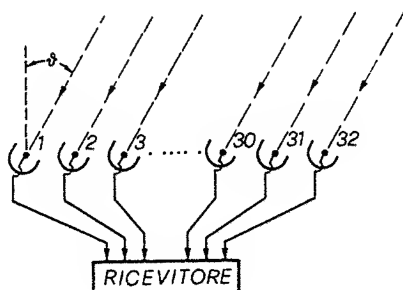
Allora, se $\lambda < a$, è possibile avere più di due massimi; se $\lambda = a$ i massimi sono soltanto due, a 0° e a 90°, ed è questo il caso in cui si ha la massima emissione di energia nella direzione $\theta = 90°$; infine, se $\lambda > a$, c'è un solo massimo a 0°. In tutti i casi all'aumentare di N viene meglio definita la direzione di emissione.

Quando le antenne trasmettono onde radio la disposizione $\lambda = a$ viene detta *end-fire* e quella $\lambda > a$ *broad-side*.

12.29. ***Un interferometro usato in radioastronomia consiste di N antenne riceventi poste a una certa distanza a una dall'altra, nei fuochi di altrettanti paraboloidi riflettori, del tipo già incontrato nel problema 12.7. I segnali ricevuti vengono mescolati in un ricevitore. Calcolare come varia l'intensità del segnale risultante R(θ) in funzione dell'angolo θ formato dalla direzione di incidenza delle radioonde con la normale alla linea congiungente le antenne. Applicare i risultati al radiointerferometro di questo tipo esistente in Australia, formato da N = 32 antenne poste a una distanza a = 7 m e sintonizzate su una lunghezza d'onda λ = 21 cm.***

Proprio come nel problema 12.7 abbiamo qui un problema di interferenza di N onde provenienti da una sorgente, inverso di quelli visti finora, ma che viene trattato esattamente allo stesso modo. L'intensità del segnale risultante varia con l'angolo di incidenza delle radiazioni secondo la formula

$$R(\theta) = R_1 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}\right)} = R_1 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{32 \cdot 10^2 \pi \operatorname{sen}\theta}{3}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{10^2 \pi \operatorname{sen}\theta}{3}\right)} \quad ,$$



se R_1 è il segnale percepito da una singola antenna. I massimi si osservano per

$$\operatorname{sen}\theta = K\,\frac{\lambda}{a} = 3\cdot 10^{-2}K \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\theta = 0,\ 0.03,\ 0.06,\ \ldots,\ 0.99$$

(34 direzioni) e hanno un'intensità $I_{max} = 32^2 R_1 = 1024 R_1$. Possiamo utilizzare la (h) del problema 12.26 per calcolare la larghezza dei massimi (N è grande). si ottiene $\Delta\theta = 1.9\cdot 10^{-3}$ rad $= 0.1°$; la distanza angolare tra due massimi è 0.03 rad $= 1.7°$.

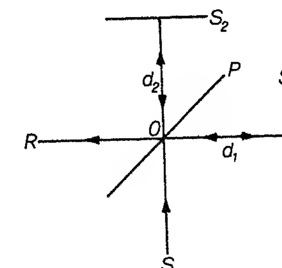
È interessante un confronto tra il radiointerferometro a due antenne di Green Bank (problema 12.7) e questo con 32 antenne. Le dimensioni dei due sistemi sono ben diverse, il primo estendendosi su 2700 m e il secondo su $31\cdot 7 = 217$ m. Le separazioni angolari tra due massimi consecutivi e la larghezza dei massimi sono molto migliori per il primo:

$$\text{Green Bank}\quad \operatorname{sen}\theta_{K+1} - \operatorname{sen}\theta_K = \frac{\lambda}{a} = 4.1\cdot 10^{-5}\ ,\quad \Delta\theta = 2\cdot 10^{-5}\ \text{rad}\ ,$$

$$\text{Australia}\quad \operatorname{sen}\theta_{K+1} - \operatorname{sen}\theta_K = \frac{\lambda}{a} = 3.0\cdot 10^{-2}\ ,\quad \Delta\theta = 1.9\cdot 10^{-3}\ \text{rad}\ .$$

A vantaggio del secondo c'è che a parità di sorgente osservata il rapporto dei segnali è $32^2/2^2 = 256$. Il radiointerferometro multiplo si presta molto bene a rivelare segnali deboli, come quelli provenienti da sorgenti molto lontane, che non sarebbero percepiti con il radiointerferometro a due antenne. Questo invece è più adatto a separare segnali di sorgenti angolarmente molto vicine, fino a qualche millesimo di grado rispetto al grado del radiointerferometro multiplo.

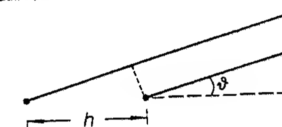
12.30. *In figura è rappresentato molto schematicamente un interferometro di Michelson. La luce emessa dalla sorgente S incide su una pellicola semiriflettente P: una parte descrive il cammino $2d_1$ venendo riflessa dallo specchio S_1, attraversa la pellicola e prosegue verso il rivelatore R; un'altra attraversa la pellicola, percorre il cammino $2d_2$ essendo riflessa dallo specchio S_2, viene riflessa dalla pellicola e prosegue verso il rivelatore. La pellicola è a 45° rispetto agli specchi, che sono a 90° tra loro. Sul piano focale del rivelatore si osserva un sistema di frange di eguale inclinazione. Descrivere la formazione di queste frange e calcolare le posizioni angolari dei massimi e dei minimi. Eseguire il calcolo numerico con $\lambda = 500$ nm, $d_2 - d_1 = 1$ mm e assumendo che le direzioni di propagazione delle onde che entrano nel rivelatore formino con l'asse OR del rivelatore angoli inferiori a 10°.*



La pellicola P dà della sorgente S un'immagine virtuale I_1', simmetrica rispetto al piano della pellicola, che si trova sulla retta OR; lo specchio S_1 dà a sua volta di I_1' un'immagine virtuale I_1 che si trova dietro lo specchio, sempre sulla retta OR; se chiamiamo d la distanza SO, l'immagine I_1 si trova a distanza $d + d_1$ dietro S_1. Per il rivelatore, la luce che percorre il cammino SOS_1OR sembra provenire da tale immagine I_1. Analogamente, per la luce che percorre il cammino SOS_2OR, S_2 dà un'immagine virtuale I_2' di S a distanza $d + d_2$ dietro lo specchio medesimo e P dà di I_2' un'immagine virtuale I_2 che si trova a distanza $d + 2d_2$ rispetto a O dietro lo specchio S_1.

In conclusione la luce che colpisce il rivelatore sembra provenire da due sorgenti I_1 e I_2, poste sulla retta OR dietro S_1; poiché $I_1O = (d + d_1) + d_1 = d + 2d_1$ e $I_2O = d + 2d_2$, la separazione tra le due sorgenti è $h = 2(d_2 - d_1)$, pari alla differenza di cammino tra i due bracci dell'interferometro. È possibile variare h con continuità facendo eseguire una traslazione a uno degli specchi mediante una vite micrometrica.

Lo schema in base al quale possiamo calcolare è quello della figura. sullo strumento arrivano onde a vari angoli (da zero a un massimo che dipende dai diaframmi, $\theta = 10°$ nel nostro caso): per un certo angolo la differenza dei cammini ottici è $\Delta x = h\cos\theta$. Abbiamo quindi le condizioni:



$$\text{max}\quad h\cos\theta = K\lambda \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{K\lambda}{h} \qquad \text{(a)}$$

$$\text{min}\quad h\cos\theta = (2K+1)\,\frac{\lambda}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = (2K+1)\,\frac{\lambda}{2h}\ . \qquad \text{(b)}$$

Si tratta appunto di frange di eguale inclinazione, equispaziate in $\cos\theta$; la separazione tra due massimi consecutivi è λ/h.

Nel caso numerico proposto $h = 2(d_2 - d_1) = 2$mm e $\lambda/h = 2.5\cdot 10^{-4}$. A $\theta = 0°$ $K = h/\lambda = 4000$, a $\theta = 10°$ $K = h\cos\theta/\lambda = 3939.2$: si hanno 61 massimi, il centro è chiaro. Alcune posizioni sono.

K	4000	3999	3998	3997	3990	3980	3970	3960	3950	3940
θ	0°	1 281°	1.812°	2.219°	4.052°	5 732°	7 022	8.110°	9 069°	9 936°

Il primo minimo cade a 0.906°; il massimo centrale è il più largo. All'aumentare di θ i massimi si infittiscono e si restringono (situazione che ricorda gli anelli di Newton).

Esaminiamo ora la dipendenza da h o, meglio, dal rapporto λ/h. Per $h = 0$ (controllo ottico tra le sorgenti) non si hanno frange, ma un'illuminazione uniforme; per $h = \lambda/2$ si ha buio quasi uniforme, per $h = \lambda$ si ritorna a un'illuminazione quasi uniforme (il secondo massimo sarebbe a 90°). Quando è $h > \lambda$ cominciano a comparire i vari massimi. Notiamo che affinché il secondo massimo cada nella zona di accettanza del problema ($\theta = 10°$) deve essere $\cos\theta_1 = (K_{max} - 1)\ \lambda/h = \cos 10°$, dove K_{max} è l'ordine del massimo per $\theta = 0$ e vale h/λ: quindi $\cos\theta_1 = 1 - \lambda/h$ e si ricava $h = 32.9$ µm. All'aumentare di h si osserva un restringimento del sistema di frange: per esempio passando da 32.9 µm a 2 mm la posizione del primo massimo passa da 10° a 1.28°. Ne segue che fissandosi in una certa posizione, facendo variare h e contando il numero di frange che passano si arriva a misurare h.

Con questo sistema Michelson misurò per la prima volta, verso il 1880, il metro in funzione di una lunghezza d'onda ben definita, con un errore relativo dell'ordine di 10^{-6}, gettando le basi per la definizione ottica del metro (1960).

12.31. ***Due sorgenti separate in profondità, come nell'interferometro di Michelson del problema 12.30, hanno uno spettro nel quale sono presenti con eguale intensità due lunghezze d'onda molto vicine, λ e $\lambda + \Delta\lambda$, con $\Delta\lambda = 10^{-3}\lambda$. Determinare se per certi valori della separazione h tra le sorgenti è possibile annullare le figure di interferenza che si formano quando le onde sono portate a interferire nel piano focale dello strumento di osservazione. Discutere le eventuali approssimazioni necessarie per ottenere il risultato voluto. Si assuma $\lambda = 600$ nm e $\theta \leq 10°$.***

Facendo riferimento alle figure e alle formule del problema 12.30 in sostanza si tratta di vedere se cambiando la posizione di uno specchio è possibile far sì che i massimi di una figura di interferenza (per esempio quella relativa a $\lambda + \Delta\lambda$) cadano dove sono i minimi dell'altra figura (relativa a λ).

In termini esatti la risposta è negativa. a parità di h le figure di interferenza sono eguali solo se le lunghezze d'onda sono eguali. È possibile, date due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2, trovare uno spessore h tale che per $\theta = 0°$ si abbia minimo per λ_1 e massimo per λ_2, però questa condizione non si ripete ad angoli diversi da zero D'altra parte, se λ_1 e λ_2 sono molto vicine le loro figure di interferenza differiscono molto poco: se si trova uno spessore per cui a $\theta = 0°$ si ha un massimo per l'una e un minimo per l'altra, ciò sarà approssimativamente vero anche per gli altri estremi abbastanza vicini a 0°.

Devono pertanto essere soddisfatte le condizioni

$$h = (2K+1)\frac{\lambda}{2} \quad , \quad h = K(\lambda + \Delta\lambda)$$

ricavate dalle (a) e (b) del problema 12.30 con $\theta = 0°$; K è lo stesso nelle due formule. Risolvendo si ottiene

$$h = \frac{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}{2\Delta\lambda} = 300.300\ \mu\text{m} \quad , \quad K = 500 \quad .$$

Si verifica che gli spessori $2h$, $4h$, $6h$, ... sono multipli interi sia di λ che di $\lambda + \Delta\lambda$, mentre $3h$, $5h$, $7h$, ... sono di nuovo multipli interi dispari di $\lambda/2$ e multipli interi di $\lambda + \Delta\lambda$. A partire da h e con periodicità $2h$ si trova quindi che all'aumentare dello spessore ci sono valori per cui le figure di interferenza scompaiono e questo fatto rende evidente che nello spettro ci sono due righe molto vicine.

Se si esegue il calcolo delle posizioni dei massimi di $\lambda + \Delta\lambda = 600.6$ nm e dei minimi di $\lambda = 600$ nm si trova che per $\theta \leq 10°$ ci sono 8 massimi e che la coincidenza dei massimi di $\lambda + \Delta\lambda$ con i minimi di λ è dell'ordine di 0.01°, peggiorando al crescere dell'ordine del massimo.

12.32. ***Un filo metallico con gli estremi fissi, lungo $L = 60$ cm, ha una massa $M = 0.6$ g ed è teso con una tensione $\tau = 87.62$ N. Calcolare la frequenza fondamentale del sistema e la più alta armonica prodotta dallo stesso che può essere udita da un ascoltatore che riesce a percepire al massimo $\nu_{max} = 15 \cdot 10^3$ Hz. Calcolare quanto deve valere la tensione per produrre una fondamentale $\nu_0' = 50$ Hz. Calcolare infine come cambiano i risultati se sul filo viene avvolto un altro filo metallico in modo da far raddoppiare la massa.***

La densità lineare del filo è $m = M/L = 10^{-2}$ g/cm $= 10^{-3}$ Kg/m e quindi la velocità di propagazione risulta $v = (\tau/m)^{1/2} = 296$ m/s In base a (12.13) con $K = 1$

$$\nu_0 = \frac{v}{2L} = 246.67\ \text{Hz} \quad .$$

La massima armonica percepibile è

$$K\nu_0 \leq \nu_{max} \quad \Rightarrow \quad K \leq \frac{\nu_{max}}{\nu_0} = 60.81 \quad \Rightarrow \quad K_{max} = 60 \quad .$$

La relazione esplicita tra frequenza fondamentale e tensione è $\nu_0 = (\tau/m)^{1/2}/2L$ per cui la tensione necessaria per produrre ν_0' vale

$$\tau' = m(2L\nu_0')^2 = \tau\left(\frac{\nu_0'}{\nu_0}\right)^2 = 3.6\ \text{N} \quad .$$

Se infine la massa viene raddoppiata la frequenza della fondamentale diminuisce di $2^{1/2}$ e risulta $\nu_0'' = \nu/2^{1/2} = 174.42$ Hz. Questo risultato è un esempio del fatto ben noto che per produrre basse frequenze ci vogliono corde grosse.

Quando un sistema fisico ha una configurazione di moto tale che tutti i punti compaiono oscillazioni sinusoidali di medesima frequenza e ampiezze diverse, si parla di *modo* di vibrazione; nella corda tesa alla frequenza fonda-

mentale corrisponde il primo modo, alla seconda armonica il secondo modo e così via. Se non si hanno particolari precauzioni nel mettere in moto la corda, dopo un periodo transitorio si instaura il regime di risonanza consistente nella somma, con opportune ampiezze e fasi, dei vari modi differenti. Quanto detto si estende a tutti i sistemi in cui possono esistere onde stazionarie.

12.33. ***Un'ottava musicale corrisponde a un fattore due nella frequenza; convenzionalmente essa è divisa in 12 semitoni, ciascun semitono corrispondendo a sua volta a un fattore $2^{1/12}$ in frequenza (sistema temperato). Una corda di violino, lunga L = 30 cm, viene fatta vibrare alla sua frequenza fondamentale $\nu = 256$ Hz, corrispondente al do_3 (¹). Calcolare a che distanza l dal capotasto il violinista deve premere la corda per farla vibrare alle frequenze corrispondenti alle note successive lungo la scala di do maggiore. Se la tensione della corda varia del 5% di quanto variano le frequenze?***

La frequenza fondamentale della corda è funzione della lunghezza: $\nu = v/2L = (\tau/m)^{1/2}/2L$. A parità di tensione e di massa lineare,

$$\frac{\nu_i}{\nu} = \frac{L}{L_i} \quad \Rightarrow \quad L_i = \frac{\nu}{\nu_i} L \quad \Rightarrow \quad l_i = L - L_i = L\left(1 - \frac{\nu}{\nu_i}\right) \quad ,$$

se l_i è la distanza dal capotasto (punto in cui la corda è fissata). Possiamo compilare la tabella seguente dove S indica il numero di semitoni rispetto al *do* e R il rapporto delle frequenze.

nota	S	R	ν(Hz)	L_i(cm)	l_i(cm)
do	—	1	256	30.00	0
re	2	1.12246	287.35	26.73	3.27
mi	4	1.25992	322.54	23.81	6.19
fa	5	1.33484	341.72	22.47	7.53
sol	7	1.49831	383.57	20.02	9.98
la	9	1.68179	430.54	17.84	12.16
si	11	1.88775	483.26	15.89	14.11
do	12	2	512	15.00	15.00

Siccome il rapporto delle tensioni è eguale al rapporto dei quadrati delle frequenze, come abbiamo già notato nel problema 12.32, per piccole variazioni

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = 2\frac{\Delta\nu}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\tau}{\tau} = 0.025 \quad ;$$

(¹) È il do centrale del pianoforte

la variazione percentuale è la stessa per tutte le frequenze. Pertanto la frequenza $\nu = 256$ Hz varierebbe di $\Delta\nu = 6.4$ Hz. La stessa variazione si può ottenere mantenendo costante la tensione e variando la lunghezza, cioè spostando il dito:

$$\frac{\Delta L_i}{L_i} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \Delta L = 0.025 \cdot 30 = 0.75 \text{ cm} \quad .$$

L'esempio numerico fa capire con che precisione deve essere regolata la tensione delle corde di un violino ovvero con che precisione deve essere posizionato il dito sulla corda.

12.34. ***Calcolare la frequenza fondamentale di una canna d'organo di lunghezza L = 7.5 cm, nell'ipotesi in cui l'estremo della canna è aperto o chiuso. Se la temperatura dell'ambiente varia da 20°C a 0°C, di quanto cambiano i valori delle frequenze?***



Nella canna rappresentata in figura la corrente d'aria viene inviata contro il setto A; il moto vorticoso dell'aria è tale che in prossimità di A si ha un massimo di perturbazione ξ dell'aria. Se p_0 è la pressione ambiente, l'ampiezza dell'onda di pressione è legata a quella di spostamento dalla relazione vista nel paragrafo 12c., $p - p_0 = -\gamma p_0 \partial\xi/\partial x$ per cui nei punti in cui lo spostamento è massimo $\partial\xi/\partial x = 0$ e si ha un nodo di pressione ($p = p_0$). Quando l'altro estremo della canna è aperto si ha un altro nodo di pressione, mentre se è chiuso la pressione ha un ventre. Dalle (12.13-12.14), assumendo secondo (12.12) $v = 343.6$ m/s, abbiamo

$$\textit{canna aperta} \quad \nu = K\frac{v}{2L} = 2290.6\ K \qquad K = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(a)}$$

$$\textit{canna chiusa} \quad \nu = (2K+1)\frac{v}{4L} = 1145.3\ (2K+1) \qquad K = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(b)}$$

Le frequenze fondamentali, nei due casi, sono 2290.6 Hz e 1145.3 Hz

Poiché la velocità dipende dalla radice quadrata della temperatura, abbiamo

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/2} = 0.965$$

e le due fondamentali diventano 2210.4 Hz e 1105.2 Hz.

12.35. ***Tre successive frequenze di risonanza di una canna d'organo sono 171.2, 239.7, 308.2 Hz. Stabilire in base ai dati se la canna è aperta o chiusa e determinarne la lunghezza; la temperatura dell'aria è 18°C.***

Se la canna è aperta sappiamo dalla (a) del problema 12.34 che le tre frequenze ν_1, ν_2, ν_3 devono soddisfare alle relazioni

$$\nu_1 = K\nu_0 \quad , \quad \nu_2 = (K+1)\nu_0 \quad , \quad \nu_3 = (K+2)\nu_0$$

con $\nu_0 = v/2L$ e K intero; per esempio risulta

$$K = \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} = \frac{171.2}{68.5} = 2.5$$

e quindi la canna non può essere aperta. Se la canna è chiusa, dalla (b) del problema 12.34 abbiamo

$$\nu_1 = (2K+1)\nu_0 \quad , \quad \nu_2 = (2K+3)\nu_0 \quad , \quad \nu_3 = (2K+5)\nu_0$$

con $\nu_0 = v/4L$; per esempio

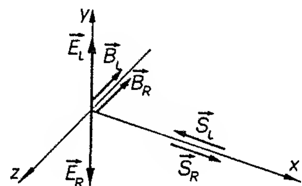
$$\frac{2K+1}{2} = \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad K = 2$$

La frequenza fondamentale è

$$\nu_0 = \frac{\nu_1}{2K+1} = \frac{\nu_1}{5} = 32.24 \text{ Hz} \quad ;$$

a 18°C la velocità del suono è 342.4 m/s e la lunghezza della canna risulta $L = v/4\nu_0 = 2.66$ m.

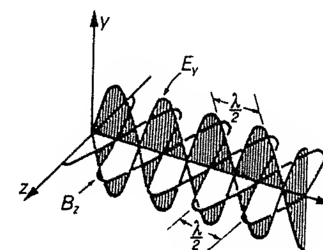
12.36. ***Una sorgente di microonde, che opera alla frequenza $\nu = 10$ GHz, viene utilizzata per produrre onde elettromagnetiche stazionarie in una cavità risonante; si assume che la propagazione avvenga tramite onde piane lungo l'asse x della figura e che il piano yz sia una delle pareti perfettamente conduttrici della cavità. Calcolare la posizione dei massimi e dei minimi di E e di B; discutere con che rivelatori si potrebbero mettere in evidenza tali posizioni e che influenza possono avere le dimensioni dei rivelatori stessi in questo tipo di esperimento.***



Il meccanismo di formazione dell'onda stazionaria è schematizzato in figura; sulla superficie del conduttore ($x = 0$) il campo elettrico è perpendicolare, cioè non ha componente tangenziale e quindi deve avere origine un'onda riflessa $\mathbf{E}_R$ tale che in ogni istante $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_R = 0$. I vettori di Poynting $\mathbf{S}_i = 1/\mu_0\ \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i$ e $\mathbf{S}_R = 1/\mu_0\ \mathbf{E}_R \times \mathbf{B}_R$ individuano le direzioni di propagazione e dalla figura si capisce che sulla superficie del conduttore $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_R$; la posizione $x = 0$ risulta cioè nodo per il campo elettrico e ventre per il campo magnetico. Si noti che la condizione $\mathbf{E} = 0$ sulla superficie è vera rigorosamente solo in equilibrio; essa però resta valida per campi variabili se il periodo T è grande rispetto al tempo di rilassamento τ in cui il conduttore perturbato raggiunge l'equilibrio. Abbiamo visto nel problema 9.12 che $\tau \simeq 10^{-14}$s mentre $T = 1/\nu = 10^{-10}$ s e pertanto la condizione $T \gg \tau$ è verificata.

La situazione di stazionarietà è rappresentata dalle (12.15) il cui andamento è riportato in figura. Le posizioni di estremo sono:

$$\left.\begin{aligned} x &= K\frac{\lambda}{2} \quad , \ E_y = 0 \quad , \ B_z = \frac{2E_0}{c} \\ x &= (2K+1)\frac{\lambda}{4} \quad , \ E_y = 2E_0 \quad , \ B_z = 0 \end{aligned}\right\} \quad K = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(a)}$$



Nel nostro caso $\lambda = c/\nu = 3$ cm per cui la distanza tra due nodi o due ventri è 1.5 cm, quella tra un nodo e un ventre è 0.75 cm.

Per verificare le (a) si può spostare un rivelatore sensibile al campo elettrico o al campo magnetico lungo l'asse x e vedere come varia la sua risposta. Nel caso del campo elettrico si può sfruttare il fatto che l'integrale del campo lungo un tratto finito di circuito dà luogo a una forza elettromotrice, occorre però un dispositivo che non sia sensibile all'effetto del campo durante un intero periodo perché altrimenti il risultato è zero. Allo scopo si presta bene un diodo, che conduce solamente per una certa polarità di $\mathbf{E}$ e non per quella opposta. Prendiamo dunque un diodo lungo l, disposto parallelamente all'asse y in un punto dell'asse x: ai suoi capi si sviluppa la tensione

$$\mathscr{E} = \int_0^l S(E_y)E_y dl = \bar{S}\,2E_0 l \,\mathrm{sen}\,2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

dove $S(E_y)$ è la caratteristica del diodo ovvero la sua risposta ai diversi valori di E_y e $\bar{S}$ un opportuno valore medio. Mediando nel tempo e tenendo appunto conto che il diodo conduce solo per metà del periodo del campo elettrico (che dipende dal tempo secondo la funzione coseno) abbiamo

$$\langle\mathscr{E}\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4}\mathscr{E}\,dt = \frac{2E_0 l\bar{S}}{\pi}\ \mathrm{sen}\,2\pi\frac{x}{\lambda} \quad .$$

Misurando $\langle\mathscr{E}\rangle$ al variare di x, cioè spostando il diodo, si verifica la dipendenza funzionale del tipo $\mathrm{sen}\,2\pi\,x/\lambda$ caratteristica dell'onda stazionaria e in particolare si verificano le (a). Per quanto riguarda le dimensioni non ci sono problemi se, come effettivamente succede, la dimensione l è molto minore di λ.

La misura di $\mathbf{B}$ si può effettuare con una spira quadrata di lato l posta nel piano xy, cioè ortogonale al campo magnetico che è diretto lungo z. Il flusso attraverso la spira vale

$$\Phi(x, t) = \int_{x-l/2}^{x+l/2} B_z l\, dx = \frac{2E_0 l}{c} \cos 2\pi \frac{t}{T} \int_{x-l/2}^{x+l/2} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\, dx =$$

$$= \frac{E_0 l \lambda}{\pi c} \left[\operatorname{sen} 2\pi \frac{x + l/2}{\lambda} - \operatorname{sen} 2\pi \frac{x - l/2}{\lambda} \right] \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

$$= \frac{2E_0 l \lambda}{\pi c} \operatorname{sen} \frac{\pi l}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad .$$

La corrispondente forza elettromotrice indotta nella spira è

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 4E_0 l \operatorname{sen} \frac{\pi l}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T} \quad ,$$

ricordando $cT = \lambda$. Possiamo raddrizzare questo segnale con un diodo e mediando nel tempo su un periodo otteniamo

$$\langle \mathscr{E} \rangle = \frac{8E_0 l}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi l}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

e anche in questo caso la misura verifica la corretta dipendenza del tipo $\cos 2\pi\, x/\lambda$. Se scegliamo $l = K\lambda$ risulta $\langle \mathscr{E} \rangle = 0$ e non si percepisce alcun segnale spostando la spira; se invece si sceglie $l = \lambda/2$ si ha dalla spira il segnale più alto: è chiaro che queste sono le condizioni in cui si lavora meglio, perché più distinte sono le variazioni di segnale durante lo spostamento.

* * *

CAPITOLO 13

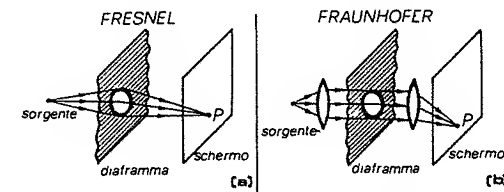
DIFFRAZIONE

13a. Si osservano fenomeni di diffrazione ogni qual volta si limita il fronte di un'onda con degli ostacoli, per esempio quando un'onda elettromagnetica luminosa investe degli spigoli acuti (come la punta di un ago o il filo di un rasoio), oppure dei fori praticati su schermi opachi (diaframmi). L'effetto più vistoso è una distribuzione di intensità luminosa nella cosiddetta zona d'ombra geometrica.

Restando nel campo delle onde luminose, l'osservazione delle figure di diffrazione prodotte con i detti sistemi è fatta su uno schermo, posto a una certa distanza da essi. A questo proposito si suddividono i fenomeni di diffrazione in due grandi categorie:

a) *fenomeni di Fresnel*, quando la sorgente e lo schermo sono vicini al sistema che produce la diffrazione (parte a della figura);

b) *fenomeni di Fraunhofer*, quando la sorgente e lo schermo sono molto lontani dal sistema che diffrange, oppure giacciono entrambi nei piani focali di due lenti, una a monte e l'altra a valle del sistema (parte b della figura).



Per il calcolo dell'intensità, in entrambi i fenomeni si ricorre al *principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff*, già enunciato nel paragrafo 12b. Se un'onda investe un'apertura praticata su uno schermo, l'intensità in un punto P distante r dall'apertura si ottiene considerando l'interferenza delle infinite onde emesse dalle sorgenti in cui si immagina suddivisa l'apertura; l'ampiezza del campo prodotto in P da ciascuna sorgente è data da (12.6):

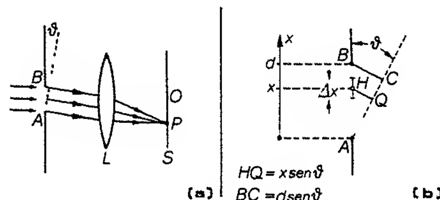
$$dE = \frac{k(\theta) E_0 d\Sigma}{r} \quad , \tag{13.1}$$

con E_0 ampiezza dell'onda incidente, $d\Sigma$ area della sorgente e $k(\theta)$ fattore di inclinazione, che dipende dall'angolo sotto cui $d\Sigma$ è vista da P.

Poiché da un punto di vista formale i fenomeni di Fraunhofer sono in molti casi i più semplici da trattare e d'altra parte i più importanti per gli strumenti ottici, nei problemi successivi ci occuperemo solamente di essi.

13b. Le situazioni più comuni che si incontrano nei problemi sono la diffrazione ad una fenditura indefinita, ad un foro circolare, ad un sistema di N fenditure indefinite parallele (reticolo di diffrazione).

La fenditura, di larghezza d e altezza l, con $l \gg d$, si considera illuminata da un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ; se d non è molto grande rispetto a λ si osserva, su di uno schermo S posto nel piano focale di una lente, una figura di diffrazione consistente in una successione di frange chiare e scure. Il calcolo dell'intensità luminosa viene fatto dividendo la fenditura in un numero molto grande di strisce, alte l e larghe $\Delta x \ll d$, come mostrato in figura. Ciascuna striscia emette un'onda il cui fronte è una superfi-



cie cilindrica e pertanto il calcolo degli sfasamenti si può fare in un piano ortogonale alla fenditura (cioè nel piano del disegno). Riassumendo rapidamente il procedimento, l'ampiezza emessa dalla striscia che si trova a distanza x dal bordo A della fenditura è

$$\Delta \mathbf{E}(x) = k(\theta)\,\frac{l\,\Delta x}{r}\, e^{i\phi(x)}\,\mathbf{E}_0$$

con $\phi(x) = (2\pi/\lambda)x\,\mathrm{sen}\,\theta$, $x\,\mathrm{sen}\,\theta = HQ$ è la differenza dei cammini ottici in P tra l'onda emessa nell'intorno di H e quella emessa sul bordo A. Al limite per $\Delta x \to 0$

$$\mathbf{E}(P) = \int_0^d d\mathbf{E}(x) = \frac{kl\mathbf{E}_0}{r}\int_0^d e^{i\phi(x)}\,dx \quad ,$$

dove si è trascurata la dipendenza di k e di r da θ, come è certamente ammissibile per piccoli angoli. Integrando e calcolando il modulo quadrato, come visto nel paragrafo 12e, si ottiene

$$|\mathbf{E}(P)|^2 = \left(\frac{kl}{r}\right)^2 E_0^2 \left[\frac{\mathrm{sen}\,(\pi d\,\mathrm{sen}\,\theta/\lambda)}{\pi\,\mathrm{sen}\,\theta/\lambda}\right]^2 \quad .$$

Nel punto O, dove $\theta = 0$, $\mathbf{E}(O) = kld\mathbf{E}_0/r$, $|\mathbf{E}(O)|^2 = (kl/r)^2 d^2 E_0^2$ e il rapporto delle intensità nei punti P e O vale

$$\frac{I(P)}{I(O)} = \frac{|\mathbf{E}(P)|^2}{|\mathbf{E}(O)|^2} = \left[\frac{\mathrm{sen}\,(\pi d\,\mathrm{sen}\,\theta/\lambda)}{\pi d\,\mathrm{sen}\,\theta/\lambda}\right]^2 \quad . \tag{13.2}$$

Questa è la legge di variazione dell'intensità con l'angolo; nel centro l'intensità è massima. Infatti la funzione $(\mathrm{sen}\,y/y)$ tende a 1 per $y \to 0$, cioè nel nostro caso per $\theta \to 0$, e per il resto è sempre minore di 1. La (13.2) si può scrivere anche $I(\theta) = I_0\left(\mathrm{sen}\,\frac{\phi}{2}/\frac{\phi}{2}\right)^2$ avendo chiamato I_0 il valore massimo dell'intensità; questa funzione ammette massimi e minimi individuati dalle condizioni

$$\text{min} \qquad \phi = 2K\pi \qquad \Rightarrow \qquad d\,\mathrm{sen}\,\theta = K\lambda \quad , \tag{13.3}$$

$$\text{max} \qquad \phi = (2K+1)\,\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad d\,\mathrm{sen}\,\theta = (2K+1)\,\frac{\lambda}{2} \quad , \tag{13.4}$$

con $K = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ L'intensità nei massimi si ottiene sostituendo (13.4) in (13.2):

$$\frac{I_m}{I_0} = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{(2K+1)^2} \tag{13.5}$$

e risulta molto minore di I_0 Per esempio

$$\left(\frac{I_m}{I_0}\right)_1 = 0.045 \quad , \quad \left(\frac{I_m}{I_0}\right)_2 = 0\;016 \quad , \quad \left(\frac{I_m}{I_0}\right)_3 = 0\;009 \quad .$$

Rimandiamo ai problemi 13.1 e 13.2 per la rappresentazione grafica di $I(\theta)$.

Si definisce larghezza angolare totale $\Delta\theta$ della frangia centrale la distanza angolare tra i due punti adiacenti al massimo nei quali l'intensità si annulla. Da (13.3) si ricava

$$\Delta\theta = 2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{\lambda}{d} \quad . \tag{13.6}$$

13c. Se la fenditura è un foro circolare di diametro D si segue un procedimento di suddivisione in zone anulari analogo a quello esposto nel paragrafo 13b; la figura di diffrazione è costituita da un disco centrale chiaro circondato da anelli alternativamente chiari e scuri. Il primo minimo si ha per

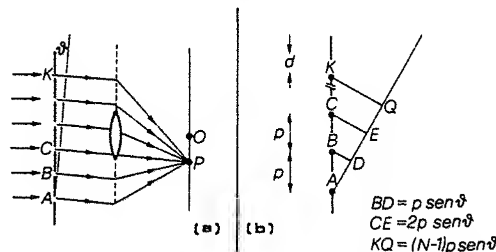
$$\mathrm{sen}\,\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \quad . \tag{13.7}$$

Si definisce larghezza angolare del disco luminoso centrale

$$\Delta\theta = 2\;\mathrm{arcsen}\left(1.22\,\frac{\lambda}{D}\right) \quad . \tag{13.8}$$

Si dimostra che l'85% dell'energia trasmessa dal foro è concentrata nel disco centrale, per cui gli anelli chiari secondari concentrici al disco sono in effetti poco luminosi.

13d. Quando le fenditure indefinite sono N, per il calcolo dell'intensità abbiamo un problema di interferenza di N sorgenti nel quale l'intensità della singola sorgente è data da (13.2). In figura è rappresentata la sezione, in un



piano ortogonale alle fenditure, di un reticolo di diffrazione; la distanza p tra le fenditure è costante e si chiama *passo* del reticolo, ciascuna fenditura è larga d; il sistema è illuminato da un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ. Ponendosi ad angolo θ ed osservando il reticolo con uno strumento ottico puntato all'infinito, in un punto P del piano focale dello strumento si ha l'interferenza di N onde, ciascuna sfasata rispetto alla successiva della quantità $\phi = (2\pi/\lambda)p \operatorname{sen}\theta$, essendo $p \operatorname{sen}\theta$ la differenza di cammino ottico. Detto $\mathbf{E}_1$ il campo corrispondente alla prima fenditura, il campo totale in P è dato da

$$\mathbf{E}(\theta) = \sum_{1}^{N}{}_n \mathbf{E}_n(\theta) = [1 + e^{i\phi} + e^{2i\phi} + \ldots + e^{i(N-1)\phi}]\ \mathbf{E}_1(\theta) = = \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}\ \mathbf{E}_1(\theta)$$

secondo quanto visto nel paragrafo 12e. Pertanto il rapporto in P tra l'intensità totale e quella dovuta a una sola fenditura si scrive

$$\frac{I(\theta)}{I_1(\theta)} = \frac{|\mathbf{E}(\theta)|^2}{|\mathbf{E}_1(\theta)|^2} = \frac{\operatorname{sen}^2(N\phi/2)}{\operatorname{sen}^2(\phi/2)} .$$

$I_1(\theta)$, intensità di una sola fenditura, è data da (13.2) e quindi

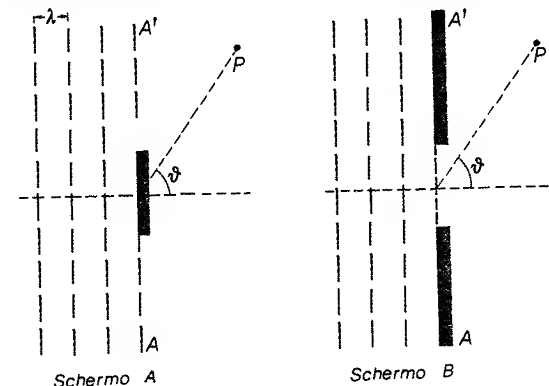
$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda}\right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}(N\pi p \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\operatorname{sen}(\pi p \operatorname{sen}\theta/\lambda)}\right]^2 .$$

I_0 è l'intensità di una singola fenditura per $\theta = 0$; sempre per $\theta = 0$ il primo termine in parentesi quadre (*fattore di diffrazione*) vale 1 mentre il secondo (*fattore di interferenza*) vale N^2, cioè $I(\theta = 0) = N^2 I_0$. In conclusione, il rapporto tra l'intensità in P e l'intensità nel centro della figura di interferenza, ovvero la legge di variazione dell'intensità sullo schermo, è

$$R(\theta) = \frac{1}{N^2}\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda}\right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}(N\pi p \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\operatorname{sen}(\pi p \operatorname{sen}\theta/\lambda)}\right]^2 . \qquad (13\ 9)$$

Rimandiamo al problema 13.10 per lo studio di questa funzione e al problema 13.13 per le definizioni di dispersione e di potere risolutivo di un reticolo.

13e. Un notevole aiuto alla soluzione di certi problemi di diffrazione è dato dal *principio di Babinet*, che è diretta conseguenza del principio di sovrapposizione e di quello di Huygens-Fresnel-Kirchhoff. Si hanno due schermi A e B complementari, nel senso che nei punti in cui A ha un'apertura B non ha apertura e viceversa; illuminando lo schermo A o lo schermo B con un'onda piana indefinita, l'intensità $I(\theta)$ in un qualsiasi punto oltre lo schermo è la stessa nei due casi eccetto che per $\theta = 0$. Con riferimento alla figura diciamo



ξ_A l'ampiezza in P in presenza del solo schermo A e ξ_B l'ampiezza in P in presenza del solo schermo B. La somma $\xi_A + \xi_B$ è la somma delle ampiezze dovute alle aperture di A e di B; poiché queste aperture non sono mai coincidenti e anzi sono complementari, quando sovrapponiamo i loro effetti è come se non ci fosse più alcuna apertura, cioè $\xi_A + \xi_B$ è l'ampiezza in P senza alcuno schermo. Poiché, per la definizione di onda piana, per $\theta \neq 0$ l'ampiezza è nulla, si conclude:

$$\xi_A = -\xi_B \ , \quad I_A = I_B \qquad \theta \neq 0 \ . \qquad (13.10)$$

Nella nota A in fondo al capitolo è discussa la differenza a $\theta = 0$ in un caso semplice di schermi complementari.

13f. In completa analogia con quanto detto nel paragrafo 12c. per l'interferenza, sottolineano che anche la diffrazione è un fenomeno caratteristico della propagazione delle onde, indipendentemente dalla loro natura. Proprio per esemplificare questo fatto sono stati introdotti due problemi (13.6 e 13.9) sulle onde superficiali in un liquido e sulla diffrazione dei neutroni.

In realtà, la distinzione tra fenomeni di diffrazione e di interferenza non ha una effettiva ragione di essere: alla base ci sono, in entrambi i casi, gli effetti della sovrapposizione di onde emesse da singole sorgenti. Nell'interferenza si tratta di un numero discreto di sorgenti, nella diffrazione si ha una distribuzione continua di sorgenti, ma il modo di procedere è lo stesso.

* * *

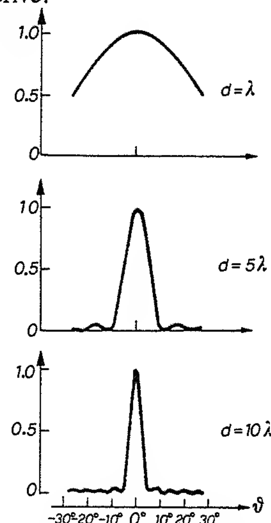
13.1. ***Una fenditura indefinita larga d viene illuminata da un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ. Discutere le differenze tra le figure di diffrazione se la larghezza è eguale a 10 λ, 5 λ, λ.***

Per le tre larghezze date nel testo la (13.2) si scrive:

$$d=\lambda \qquad \frac{I(\theta)}{I_0}=\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi \operatorname{sen}\theta)}{\pi \operatorname{sen}\theta}\right]^2,$$

$$d=5\lambda \qquad \frac{I(\theta)}{I_0}=\left[\frac{\operatorname{sen}(5\pi \operatorname{sen}\theta)}{5\pi \operatorname{sen}\theta}\right]^2,$$

$$d=10\lambda \qquad \frac{I(\theta)}{I_0}=\left[\frac{\operatorname{sen}(10\pi \operatorname{sen}\theta)}{10\pi \operatorname{sen}\theta}\right]^2.$$



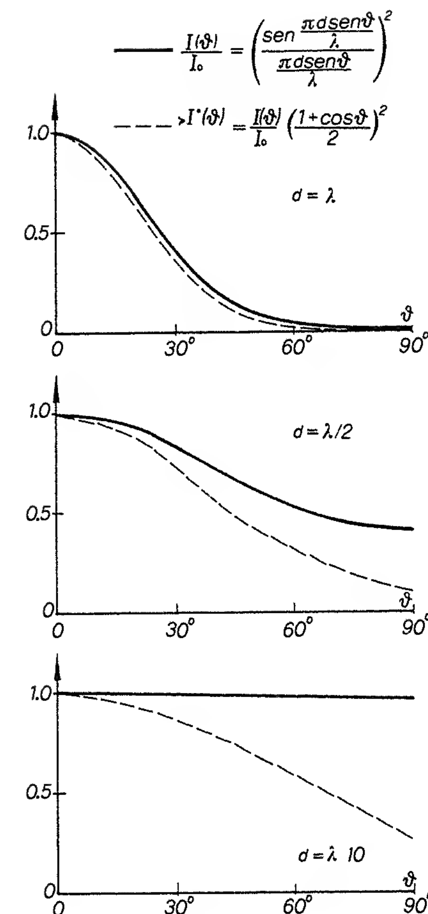
Gli andamenti nell'intorno del massimo centrale sono riportati in figura. Nel secondo e terzo caso si osserva una successione di bande chiare e scure (frange di diffrazione). l'intensità dei massimi secondari è però piuttosto piccola, come mostra la (13.5) La larghezza angolare totale $\Delta\theta$ della frangia centrale è data dalla (13.6), essa diminuisce all'aumentare di d rispetto a λ Ciò si può capire considerando che all'aumentare di d aumenta il numero di sorgenti elementari che concorrono alla formazione delle frange e ricordando (vedi per esempio il problema 12.22) che in generale tanto maggiore è il numero di onde che interferiscono tanto più nette sono le frange. Invece per $d=\lambda$ $\Delta\theta=180°$· la figura di diffrazione consta di un'unica frangia e si ha illuminazione in tutte le direzioni al di là della fenditura

13.2. ***Descrivere la formazione del sistema di frange di diffrazione prodotte da una fenditura indefinita di larghezza di eguale a λ, λ/2, λ/10, dando una rappresentazione grafica di I(θ). Descrivere inoltre l'influenza del fattore k(θ) che compare nel principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff.***

Notiamo innanzitutto che in base alla (13.2) quando d è minore di λ non si hanno minimi di intensità: $I(\theta)$ diminuisce monotonamente al crescere di θ con una rapidità determinata dal rapporto d/λ. In figura sono rappresentate le due funzioni

$$\frac{I(\theta)}{I_0}=\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\pi d \operatorname{sen}\theta/\lambda}\right]^2, \qquad \frac{I^*(\theta)}{I_0}=\frac{I(\theta)}{I_0}\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2,$$

la prima con linea continua e la seconda con linea tratteggiata; è evidente l'influenza del fattore di inclinazione $k(\theta)$, tanto più importante quanto più



piccolo è d rispetto a λ Infatti, se non si tenesse conto di $k(\theta)$, al diminuire del rapporto d/λ l'intensità decrescerebbe sempre più lentamente all'aumentare dell'angolo θ: per $d=\lambda/10$ essa sarebbe uniforme entro il 2% in tutto lo spazio al di là della fenditura.

Ad ogni modo il fattore di inclinazione non altera l'osservazione degli effetti che vedremo nei prossimi problemi, in quanto ha come unico risultato quello di diminuire l'intensità in maniera monotona in funzione dell'angolo. Per questo motivo non lo prenderemo più in considerazione.

Vogliamo notare infine che i risultati dei problemi 13.1 e 13.2 dipendono solo dal rapporto d/λ e valgono quindi per ogni problema in cui si interponga uno schermo con una fenditura davanti a un fronte d'onda piano, indipendentemente dalla natura fisica dell'onda.

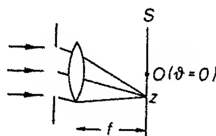
13.3. ***Su una fenditura indefinita di larghezza $d = 4$ μm incide un'onda piana in cui sono presenti con eguale intensità tutte le lunghezze d'onda dal violetto ($\lambda_V = 0.4$ μm) al rosso ($\lambda_R = 0.7$ μm). Subito dopo la fenditura c'è una lente convergente di focale $f = 20$ cm e la figura di diffrazione è osservata su uno schermo che coincide col piano focale della lente. L'intensità per $\theta = 0$ vale $I_0 = 0.3$ W/cm^2. Descrivere la formazione delle frange colorate che si osservano sullo schermo nell'intorno del centro.***

Nel centro O dello schermo S, in direzione $\theta = 0$, si osserva la stessa composizione spettrale dell'onda incidente, in quanto la funzione $I(\theta)$ che descrive l'andamento dell'intensità nella figura di diffrazione ha un massimo per $\theta = 0$ indipendentemente dalla lunghezza d'onda

Sappiamo da precedenti problemi (11 19, 12.13, 12.15, 12.23) che la distribuzione di intensità nell'onda incidente in funzione della lunghezza d'onda si scrive

$$\frac{dI}{d\lambda} = F(\lambda) = \frac{I}{\lambda_R - \lambda_V}$$

se I è l'intensità totale. L'onda piana si può cioè pensare come sovrapposizione di infinite onde piane di lunghezza d'onda compresa tra λ_V e λ_R, ognuna delle quali produce una figura di diffrazione che ha nel centro O un massimo di intensità

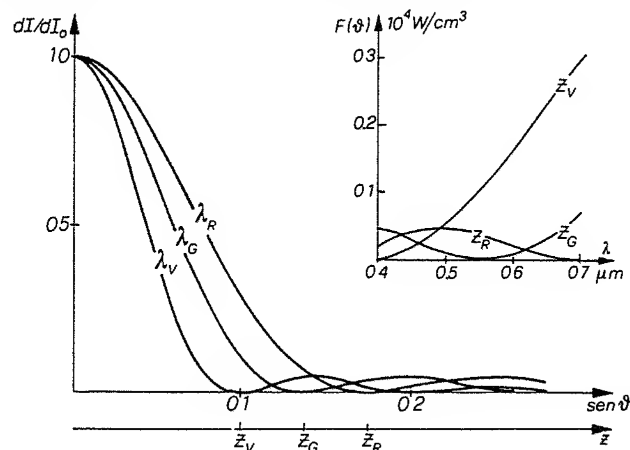


$$dI_0 = \frac{I_0}{\lambda_R - \lambda_V}\, d\lambda = 10^4\, d\lambda\, \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

e la cui intensità varia con l'angolo secondo la legge

$$dI = dI_0 \left[\frac{\text{sen}(\pi d \,\text{sen}\,\theta/\lambda)}{\pi d \,\text{sen}\,\theta/\lambda}\right]^2 = dI_0 \left[\frac{\text{sen}(4\pi \,\text{sen}\,\theta/\lambda)}{4\pi \,\text{sen}\,\theta/\lambda}\right]^2$$

con λ espressa in μm. In figura è rappresentata dI/dI_0 in funzione di $\text{sen}\,\theta$ per tre diversi valori di λ ($\lambda_V = 0\ 4$, $\lambda_G = 0.55$, $\lambda_R = 0.7$ μm).



Fissato un valore di θ, e quindi un punto dello schermo che dista $z = f \text{tg}\,\theta$ dal centro O, il valore dell'intensità dipende dalla lunghezza d'onda, il che equivale a dire che la composizione spettrale della luce osservata varia da punto a punto sullo schermo in accordo con la legge

$$F(\lambda, \theta) = \frac{dI}{d\lambda} = 10^4 \left[\frac{\text{sen}(4\pi \,\text{sen}\,\theta/\lambda)}{4\pi \,\text{sen}\,\theta/\lambda}\right]^2 \frac{\text{W}}{\text{cm}^3} \quad (\lambda \text{ in μm})$$

Anche questa funzione è rappresentata in figura in corrispondenza ai tre valori di $\text{sen}\,\theta$ nei quali si ha il primo minimo di diffrazione per λ_V, λ_G, λ_R.

$$\lambda_V = 0.4 \text{ μm} \quad , \ \text{sen}\,\theta_V = \frac{\lambda_V}{d} = 0.1 \quad , \ z_V = f \text{tg}\,\theta_V = 2.00 \text{ cm} \quad ,$$

$$\lambda_G = 0.55 \text{ μm} \quad , \ \text{sen}\,\theta_G = \frac{\lambda_G}{d} = 0.1375 \quad , \ z_G = f \text{tg}\,\theta_G = 2\ 78 \text{ cm} \quad .$$

$$\lambda_R = 0\ 7 \text{ μm} \quad , \ \text{sen}\,\theta_R = \frac{\lambda_R}{d} = 0.175 \quad , \ z_R = f \text{tg}\,\theta_R = 3.56 \text{ cm}$$

Nel punto di coordinata z_V, il più vicino al centro, sono depresse le lunghezze d'onda nell'intervallo (0 4-0.5) μm rispetto a quelle contenute nell'intervallo (0.6-0.7) μm che predominano e che determinano il colore rossastro osservato In z_G abbiamo la soppressione della banda (0 45-0 65) μm; in z_R predomina la banda (0.45-0.55) μm che determina un colore giallastro. Si ha una successione di colori dopo il bianco centrale analoga a quella vista nel problema 12 4· i colori ottenuti sono ancora di sottrazione. In ogni caso l'intensità diminuisce allontanandosi dal centro; dette I_V, I_G, I_R le intensità rispettivamente nei punti z_V, z_G, z_R, valutate calcolando per via grafica l'area sotto la curva $F(\lambda)$, si ha $I_R/I_V \sim I_G/I_V \sim 1/5$

13.4. ***Su una fenditura indefinita di larghezza d incide un'onda piana monocromatica ($\lambda_1 = 400$ nm) e la figura di diffrazione è osservata su una lastra fotografica posta nel piano focale di una lente convergente di distanza focale $f = 70$ cm, collocata subito dopo la fenditura. La frangia centrale è larga $\Delta z_1 = 3.5$ cm. Successivamente la fenditura è illuminata con luce di lunghezza d'onda λ_2 e la frangia centrale della corrispondente figura di diffrazione è larga $\Delta z_2 = 5.0$ cm. Calcolare i valori di d e di λ_2.***

La relazione tra larghezza angolare e larghezza lineare misurata sulla lastra è $\Delta z = f \Delta\theta$ e quindi $\Delta\theta_1 = \Delta z_1/f = 5 \cdot 10^{-2}$ rad $= 2\ 9°$, $\Delta\theta_2 = \Delta z_2/f = 4.0°$; esse risultano piccole e la (13.6) può essere approssimata diventando $\Delta\theta = 2\lambda/d$. Di conseguenza la larghezza sulla lastra è

$$\Delta z = f\Delta\theta = \frac{2f\lambda}{d} \quad . \tag{a}$$

Risolvendo la (a) rispetto a d e utilizzando i dati relativi a λ_1,

$$d = \frac{2f\lambda_1}{\Delta z_1} = 16\ \mu\text{m} \quad .$$

Risolvendo invece la (a) rispetto a λ e usando i dati per λ_2,

$$\lambda_2 = \frac{d\Delta z_2}{2f} = 571\ \text{nm} \quad .$$

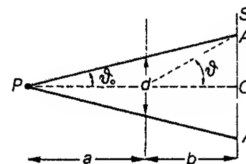
Notiamo che possiamo ricavare λ_2 senza conoscere d, direttamente dalla (a):

$$\lambda_2 = \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}\,\lambda_1 \quad ,$$

come dire che si può compiere una misura *relativa* di lunghezza d'onda confrontando semplicemente le larghezze delle frange centrali di diffrazione ad una fenditura Però la determinazione sperimentale di Δz è poco precisa in quanto, come si può osservare dalle figure del problema 13.1, l'intensità luminosa nell'intorno del primo minimo varia molto lentamente e quindi le posizioni di tali punti non si possono misurare con grande precisione.

13.5. ***Una sorgente luminosa puntiforme P emette radiazioni di lunghezza d'onda $\lambda = 500$ nm. A distanza $a = 3$ m da P è posto uno schermo con una fenditura indefinita larga d e dietro a questo, a distanza $b = 1.5$ m, un altro schermo S (vedi figura). Determinare d in maniera tale che il limite dell'immagine della fenditura sullo schermo S, calcolabile secondo le regole dell'ottica geometrica, coincida con il limite della frangia centrale della figura di diffrazione prodotta dalla fenditura.***

La distanza del limite A dell'immagine dal centro O, determinata con le leggi dell'ottica geometrica, si ricava dalla relazione



$$\frac{OA}{d/2} = \frac{a+b}{a} \quad .$$

Poiché presumibilmente $d \ll a$, l'apertura θ_0 del cono di raggi che arriva alla fenditura è molto piccola e possiamo considerare con buona approssimazione i raggi paralleli. Sappiamo che l'angolo θ al quale si annulla l'intensità della frangia centrale di diffrazione è $\operatorname{sen}\theta \approx \lambda/d$ per cui $OA = b\theta = b\lambda/d$. La condizione richiesta si scrive allora

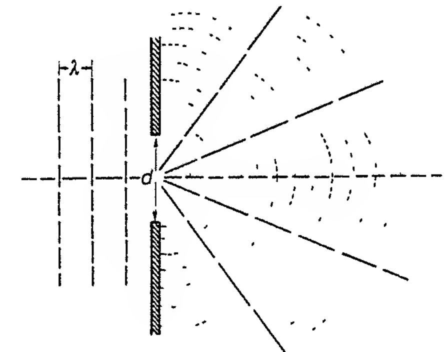
$$\frac{a+b}{a}\,\frac{d}{2} = \frac{b\lambda}{d} \quad \Rightarrow \quad d = \left[\frac{2ab\lambda}{a+b}\right]^{1/2} = 1\ \text{mm} \quad .$$

Si verifica come l'approssimazione $d \ll a$ fosse legittima.

13.6. ***Un'onda piana di lunghezza d'onda $\lambda = 0.5$ m si propaga sulla superficie di un liquido e urta contro un ostacolo nel quale è praticata un'apertura di larghezza $d = 1.25$ m. Descrivere la propagazione dell'onda al di là dell'ostacolo.***

Abbiamo osservato più volte che i fenomeni di interferenza e diffrazione sono caratteristici di ogni tipo di onde, indipendentemente dal fatto che si tratti di onde elettromagnetiche o elastiche o di altro genere (si veda anche il problema 13.9). Il caso ora proposto si esamina pertanto con gli stessi criteri del problema 13.1: l'intensità in funzione dell'angolo θ formato tra la normale all'apertura e la direzione di osservazione è data da

$$I(\theta) = I_0\,\frac{\operatorname{sen}^2(2.5\pi\operatorname{sen}\theta)}{(2.5\pi\operatorname{sen}\theta)^2} ,$$



essendo appunto $d/\lambda = 2.5$. I minimi si hanno nelle direzioni

K	± 1	± 2
$\operatorname{sen}\theta$	$\pm 2/5$	$\pm 4/5$
θ	$\pm 23.6°$	$\pm 53.1°$

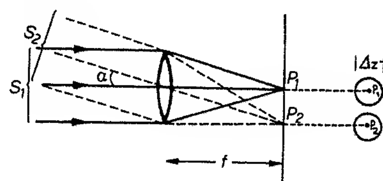
I massimi secondari si hanno per $\operatorname{sen}\theta = \pm 3/5$, $\theta = \pm 36.9°$ e la loro intensità è $I_m = 0.045 I_0$, secondo la (13.5). Nella figura sono tracciate le direzioni in cui si hanno massimi e minimi di intensità.

Situazioni analoghe si possono avere con le onde sonore udibili in aria, che hanno lunghezze d'onda variabili tra ~ 16 m e ~ 1.7 cm; si vede come questi valori siano confrontabili con le dimensioni degli ostacoli e delle aperture normali, per cui i fenomeni di diffrazione sono molto importanti, diversamente da quanto avviene usualmente per le onde luminose.

13.7. ***Due stelle S_1 e S_2 molto vicine tra loro si trovano a una distanza angolare α e sono osservate con un telescopio il cui obbiettivo ha un diametro $d = 20$ cm e una distanza focale $f = 40$ cm. Supponendo che la luce emessa dalle stelle abbia una lunghezza d'onda $\lambda = 600$ nm, calcolare la minima distanza angolare α_R che deve separare le due stelle affinché esse possano essere distinte dal telescopio e la minima distanza a cui si formano le immagini di S_1 e S_2 nel piano focale dell'obbiettivo. Se nel piano focale c'è una lastra fotografica, discutere quale deve essere la dimensione della grana della pellicola affinché in tali condizioni le due stelle appaiano effettivamente separate sulla fotografia.***

Sulla lente che costituisce l'obbiettivo arrivano, provenienti da S_1 e S_2, due onde piane di luce monocromatica, formanti tra loro un angolo α (vedi

figura). Per ognuna di queste onde la lente si comporta come un foro circolare: l'immagine di ogni stella è un disco luminoso di diffrazione, la cui apertura angolare è data dalla (13.7) nell'approssimazione $\lambda \ll d$, cioè $\theta = 1.22\lambda/d$, e il cui diametro nel piano focale è, secondo (13.8) e con la stessa approssimazione

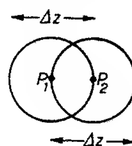


$$\Delta z = f \Delta \theta = 2.44 \frac{\lambda}{d} f = 2.9 \text{ μm} .$$

La distanza tra i centri P_1 e P_2 dei due dischi è $h = f\alpha$, variabile con la distanza angolare α delle due stelle. Quando h è grande rispetto a Δz le due immagini sono completamente separate; quando h è dello stesso ordine o più piccolo di Δz le due immagini tendono a sovrapporsi fino a risultare non più distinguibili. Il valore minimo che può assumere h affinché le due immagini si possano considerare distinte, cioè separate dall'obbiettivo, è quello per cui il massimo di intensità di un disco coincide con il minimo dell'altro (*criterio di Rayleigh*, illustrato in figura).

$$h_{min} = f\alpha_R = \frac{\Delta z}{2} = 1.22 \frac{\lambda f}{d} ,$$

$$\alpha_R = 1.22 \frac{\lambda}{d} . \qquad \text{(a)}$$



Ad α_R si dà il nome di *potere risolutivo angolare della lente*; questo tipo di definizione verrà usato in seguito anche per altri strumenti ottici Nel caso specifico

$$\alpha_R = 3\ 66 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \quad , \quad h_{min} = 1\ 46 \text{ μm} \quad .$$

In una pellicola fotografica gli elementi sensori sono i grani di bromuro d'argento che, quando vengono illuminati, si scindono in bromo e argento. Se i due dischi di diffrazione che costituiscono le immagini di S_1 e S_2 colpiscono il medesimo sensore, quest'ultimo reagisce come se fosse colpito da una sola immagine. In base al risultato numerico ottenuto sopra, per distinguere le immagini occorrerebbe una pellicola con un diametro dei grani dell'ordine di 1 μm. Vedremo nel prossimo problema una situazione analoga.

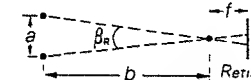
13.8. ***Due fari di automobile, distanti*** $D = 1.3$ **m,** ***mettono luce di lunghezza d'onda*** $\lambda = 500$ **nm;** ***essi sono guardati da un osservatore, il cui occhio è normale e ha una pupilla con diametro*** $d = 0.5$ **cm.** ***Calcolare qual è la distanza massima*** L_{max} ***a cui si può trovare l'automobile affinché i due fari vengano distinti per il solo effetto della diffrazione. Discutere come le caratteristiche della retina, su cui si formano le immagini dei due fari, intervengano nel limitare*** L_{max}.

Il problema è del tutto analogo al precedente 13.7, la separazione angolare dei fari è $\theta = D/L$ e deve risultare maggiore del potere risolutivo dell'occhio:

$$\frac{D}{L} \geqslant 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad \Rightarrow \quad L \leqslant \frac{dD}{1.22\lambda} = L_{max} = 10.7 \text{ Km} \quad .$$

Questo valore non ha alcun riscontro nella pratica, per cui deve esserci qualche altro fattore che pone un limite più basso.

La retina, posta nel piano focale dell'occhio, contiene piccolissime strutture sensibili, chiamate coni e bastoncelli, che ricevono l'immagine e la trasmettono al cervello attraverso il nervo ottico



Per essere distinte due immagini non devono colpire lo stesso sensore Sperimentalmente è noto che l'occhio normale, o *emmetrope*, riesce a separare le immagini di due punti distanti tra loro $a = 10^{-2}$ cm e posti a distanza $b = 25$ cm dall'occhio stesso l'angolo di osservazione corrispondente (vedi figura) è $\beta_R = a/b = 4 \cdot 10^{-4}$ rad, che prende il nome di *angolo di visione distinta*. Per risultare distinti, ovvero per colpire due sensori diversi, due punti devono essere separati angolarmente di un angolo maggiore di β_R Nel caso dei due fari

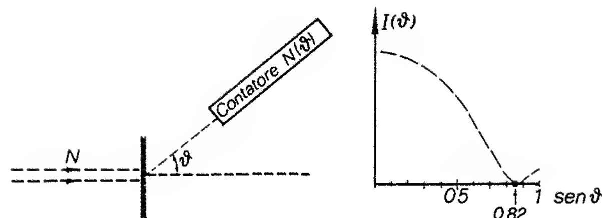
$$\frac{D}{L} \geqslant \beta_R \quad \Rightarrow \quad L \quad \leqslant \quad \frac{D}{\beta_R} = L_{max} = 3.25 \text{ Km}$$

Riprenderemo la questione del potere risolutivo dell'occhio nel problema 14.24

I due problemi 13.7 e 13.8 chiariscono come in un sistema ottico il dettaglio ovvero la qualità dell'informazione siano limitati dal sensore che ha la risoluzione più bassa (ed è naturale generalizzare questo argomento a qualsiasi sistema di misura). Non ha alcun senso cercare di migliorare la qualità di alcuni componenti senza agire contemporaneamente su quello che pone il limite. Per esempio è inutile adoperare una macchina fotografica con un obiettivo di grande apertura per ridurre gli effetti della diffrazione, ma con una pellicola a grana grossa.

13.9. ***Un fascio di neutroni di energia cinetica*** $E_n = 50$ **MeV** ***incide su un sottile bersaglio di carbonio. Detto N il numero di neutroni incidenti, con un contatore di neutroni si misura il numero*** $N(\theta)$ ***di neutroni diffusi ad un certo angolo*** θ ***e si fa il grafico dei dati sperimentali per la quantità*** $I(\theta) = N(\theta)/N$ ***ottenendo, in funzione di*** $\text{sen}\,\theta$, ***la curva in figura. Calcolare il raggio del nucleo dell'atomo di carbonio.***

L'andamento di $I(\theta)$ suggerisce la possibilità di trovarsi di fronte a un fenomeno di diffrazione· come se il fascio di neutroni fosse un'onda piana che incide su bersagli costituiti da dischi opachi (i nuclei del carbonio) In effetti, secondo quanto esposto nel paragrafo 16a, una particella di massa m, velocità



v e quantità di moto $p = mv$, può essere trattata come un'onda piana di lunghezza d'onda λ data dalla relazione di De Broglie (16.2)

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad , \qquad \text{(a)}$$

dove h è la costante di Planck e vale $6.63 \cdot 10^{-34}$ Js $= 4.14 \cdot 10^{-15}$ eVs.

Calcoliamo la quantità di moto con formule non relativistiche in quanto l'energia cinetica dei neutroni è molto minore della loro massa a riposo (939.6 MeV/c²):

$$E_n = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p = (2mE_n)^{1/2} = 306.5 \, \frac{\text{MeV}}{\text{c}} = 1.63 \cdot 10^{-19} \, \text{Kg} \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad ,$$

$$\lambda = 4.05 \cdot 10^{-15} \, \text{m} = 4.05 \, \text{fm} \quad ,$$

con fm $= 10^{-15}$ m si è indicato il fermi, che è l'unità di misura delle lunghezze appropriata in questi casi.

Ciò che si osserva sperimentalmente è la diffrazione di queste onde di materia prodotta dai nuclei di carbonio che si comportano come dischi opachi di diametro D. In base al principio di Babinet (paragrafo 13e.) il minimo di $I(\theta)$ osservato a $\text{sen}\,\theta = 0.82$ coincide con il primo minimo di diffrazione per cui

$$\text{sen}\,\theta_0 = 1.22 \, \frac{\lambda}{D} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1.22 \, \lambda}{\text{sen}\,\theta_0} = 6.03 \, \text{fm}$$

Il raggio del nucleo del carbonio risulta così pari a $D/2 = 3$ fm $= 3 \cdot 10^{-15}$ m

Quanto minori sono le dimensioni dei sistemi da studiare tanto minore deve essere la lunghezza d'onda e quindi, secondo la (a), maggiore la quantità di moto. I primi studi sulla struttura elettrica dei protoni e dei neutroni sono stati compiuti utilizzando elettroni con energie dell'ordine di 1 GeV ovvero lunghezze d'onda dell'ordine di 1 fm. Aumentando l'energia e così diminuendo la lunghezza d'onda si è arrivati a scoprire che dentro i protoni e i neutroni esistono delle particelle, chiamate *quark u* e *quark d*, che appaiono per ora come i costituenti elementari della materia insieme agli elettroni; per i quark e gli elettroni si possono cioè fissare dei limiti superiori per le dimensioni dell'ordine di 10^{-17} m. È in costruzione presso Amburgo un acceleratore che attraverso urti tra elettroni e protoni di altissima energia dovrebbe permettere di capire se elettroni e quark sono puntiformi fino al livello di 10^{-19} m.

13.10. ***Dato un reticolo di diffrazione con N fenditure, larghe d e di passo p, illuminato con luce di lunghezza d'onda λ, discutere le differenze tra le figure di interferenza nel caso d ≪ λ e nel caso d > λ.***

Riprendiamo la formula (13.9) che dà la variazione di intensità, cominciando dal caso $d \ll \lambda$. La fenditura si comporta come una sorgente di onde cilindriche, se trascuriamo l'attenuazione dovuta al fattore di inclinazione. La (13.9) diventa

$$R(\theta) = \frac{1}{N^2} \left[\frac{\text{sen}(N\pi p \,\text{sen}\,\theta/\lambda)}{\text{sen}(\pi p \,\text{sen}\,\theta/\lambda)} \right]^2 \quad , \qquad \text{(a)}$$

in quanto il fattore di diffrazione vale circa 1 se $d \ll \lambda$; siamo ricondotti all'interferenza di N sorgenti, vista nel problema 12.26, di cui ricordiamo i risultati. Si hanno massimi di intensità con $R(\theta) = 1$ per

$$\text{sen}\,\theta = K \, \frac{\lambda}{p} \quad , \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(b)}$$

e minimi con $R(\theta) = 0$ per

$$\text{sen}\,\theta = K' \, \frac{\lambda}{Np} \quad , \quad K' = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (N-1), \pm (N+1), \ldots \quad ; \qquad \text{(c)}$$

tra due massimi principali ci sono $N - 1$ minimi nulli. La larghezza angolare di un massimo principale, definita sempre come distanza tra i due minimi adiacenti, è data da

$$\Delta(\text{sen}\,\theta) = \frac{2\lambda}{Np} \quad . \qquad \text{(d)}$$

Gli $(N-2)$ massimi secondari compresi tra due massimi principali si hanno per

$$\text{sen}\,\theta = (2K'' + 1) \, \frac{\lambda}{2Np} \quad , \quad K'' = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \text{(e)}$$

e la loro intensità, rispetto a quella dei massimi principali, è data da

$$R_m = \frac{1}{N^2} \left[\text{sen}^2 (2K'' + 1) \, \frac{\pi}{2N} \right]^{-1} \quad . \qquad \text{(f)}$$

Se N è molto grande, come avviene nei reticoli di uso comune, la figura di interferenza consiste di una serie di righe di larghezza angolare

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Np} \qquad \text{(g)}$$

ai lati dei quali ci sono dei massimi di intensità trascurabile ai fini pratici:

$$R_m = \frac{4}{\pi^2} \, \frac{1}{(2K'' + 1)^2} \qquad (R_1 = 0.045, \; R_2 = 0.016, \; \ldots) \quad .$$

Passando a considerare il caso $d > \lambda$, ovvero tenendo conto della larghezza finita delle fenditure, notiamo che le posizioni degli estremi, date da (b), (c).

(e), non cambiano in quanto caratteristiche del fattore di interferenza, ovvero del rapporto λ/p. L'effetto della larghezza finita è quello di introdurre una *modulazione di ampiezza* della figura di interferenza. In particolare, nei massimi principali non è più $R(\theta) = 1$, bensì

$$R(\theta) = R_K = \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi d K/p)}{\pi d K/p}\right]^2 \quad ; \tag{h}$$

si ha dipendenza dal rapporto d/p e dal numero d'ordine K; escluso il caso del massimo centrale negli altri massimi è sempre $R_K < 1$.

13.11. ***Due reticoli ideali, con fenditure di larghezza $d \ll \lambda$ e passo $p = 2\lambda$, sono costituiti uno da $N_1 = 2$ fenditure, l'altro da $N_2 = 5$ fenditure. Essi vengono illuminati dalla stessa onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ e su uno schermo posto nel piano focale di una lente si osservano gli effetti prodotti. Dare una rappresentazione grafica di come varia l'intensità sullo schermo, discutendo le principali differenze tra i due casi e calcolare il rapporto tra le intensità dei massimi principali prodotti dai due sistemi.***

L'intensità in funzione di θ, secondo la (a) del problema 13 10, si scrive·

$$N_1 = 2 \quad R_2(\theta) = \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sen}^2(4\pi \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2(2\pi \operatorname{sen}\theta)} = \cos^2(2\pi \operatorname{sen}\theta) \quad , \tag{a}$$

$$N_2 = 5 \quad R_5(\theta) = \frac{1}{25}\,\frac{\operatorname{sen}^2(10\pi \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2(2\pi \operatorname{sen}\theta)} \tag{b}$$

Notiamo che la (a) coincide con l'espressione ricavata nel problema 12.1 per i fori di Young; in effetti il porre $d \ll \lambda$ riconduce il fenomeno alla pura interferenza tra due sorgenti I massimi principali dei due reticoli sono nelle stesse posizioni: queste infatti dipendono solo dal passo e non dal numero di fenditure In base alla (b) del problema 13.10

$$\operatorname{sen}\theta_{\max} = K\,\frac{\lambda}{p} = 0.5\ K \quad \Rightarrow \quad K = 0, \pm 1, \pm 2 \quad .$$

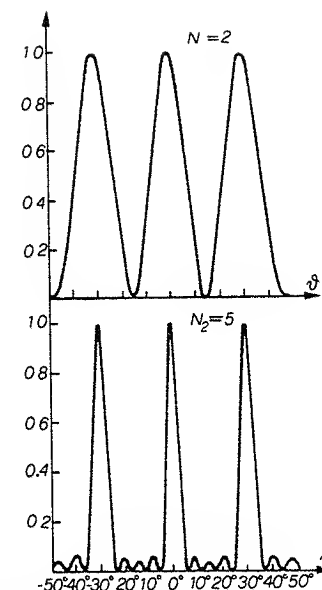
Oltre al massimo centrale si vedono i due massimi del primo ordine a ± 30°, i due massimi del secondo ordine sfuggono praticamente all'osservazione in quanto prodotti a ± 90°. Il reticolo con $N_1 = 2$ non produce massimi secondari, quello con $N_2 = 5$ ne produce tre in ogni intervallo tra due massimi principali Nell'approssimazione $d \ll \lambda$ le intensità dei massimi principali sono eguali a quella del massimo centrale; essendo questa proporzionale al quadrato del numero di fenditure, il rapporto tra le intensità dei massimi dei due reticoli è $(N_2/N_1)^2 = 6.25$ In figura è riportato l'andamento delle funzioni $R_2(\theta)$ e $R_5(\theta)$

La larghezza angolare $\Delta\theta$ della frangia luminosa centrale si ricava dalla (d) del problema 13.10:

$$\Delta\theta = 2\operatorname{arcsen}\frac{\lambda}{Np} = 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{2N} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\theta_2 \simeq 29° \quad , \quad \Delta\theta_5 \simeq 11.5°$$

Queste sono le larghezze anche delle frange del primo ordine.



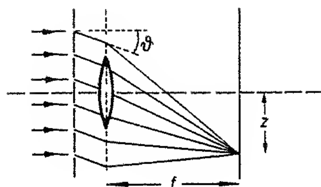
All'aumentare del numero N di fenditure le frange diventano sempre più strette, come si vede dall'espressione della larghezza $\Delta\theta$; inoltre compare un maggior numero di massimi secondari con intensità però trascurabile, per cui si può assumere che tra due frange consecutive ci sia buio. Il restringersi delle frange al crescere di N dipende dal fatto che con N aumenta il numero di sorgenti la cui interferenza produce le frange Abbiamo già discusso ampiamente questa caratteristica peculiare dei sistemi interferenziali nel problema 12.26

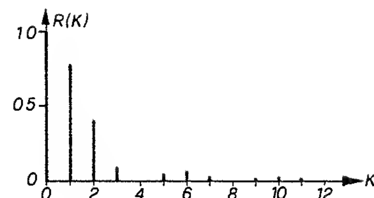
13.12. ***Un reticolo con $N = 5000$ fenditure, di larghezza $d = 2$ µm e passo $p = 8$ µm, viene illuminato con un'onda piana monocromatica ($\lambda = 0.6$ µm). Il sistema di frange da esso prodotto è osservato su uno schermo posto nel piano focale di una lente di distanza focale $f = 100$ cm, collocata immediatamente dopo il reticolo (vedi figura). Calcolare quante frange vengono effettivamente osservate, la loro intensità e la loro larghezza.***

Se la larghezza d delle fenditure fosse molto minore di λ osserveremo sullo schermo massimi di eguale intensità per tutti i valori di θ tali che $p\operatorname{sen}\theta = K\lambda$, cioè per $\operatorname{sen}\theta = \lambda K/p$ Da $\operatorname{sen}\theta \leq 1$ ricaviamo $K_{\max} \leq p/\lambda = 13.3$ Avremo quindi sullo schermo una frangia centrale con 13 frange a destra e 13 a sinistra, egualmente luminose Come discusso nel problema 13 10 la larghezza finita delle fenditure comporta una diminuzione dell'intensità dei massimi principali secondo la legge

$$R_K = \left[\frac{\operatorname{sen}(\pi d K/p)}{\pi d K/p}\right]^2 = \left[\frac{\operatorname{sen}(0.25\pi K)}{0.25\pi K}\right]^2 \quad .$$

I valori in funzione del numero d'ordine K sono riportati in figura; l'intensità decresce molto rapidamente con l'ordine e in particolare mancano completamente i massimi di ordine 4, 8, 12. Questa mancanza di massimi di determinati ordini è un fatto caratteristico che si verifica quando $d\operatorname{sen}\theta = m\lambda$, con m intero non nullo, e contemporaneamente $p\operatorname{sen}\theta = K\lambda$, cioè quando un minimo





(nullo) del fattore di diffrazione coincide con un massimo del fattore di interferenza: i massimi di ordine $K=(p/d)m$ sono quelli assenti. Tale relazione è nel nostro caso $K=4m$ e perciò mancano i massimi di ordine 4,8,12.

In conclusione, saranno presumibilmente ben visibili i massimi fino al terzo ordine, le cui intensità sono superiori al 10% dell'intensità del massimo centrale. In effetti, proprio per le ragioni esposte, nei reticoli ordinari non si osservano più di tre o quattro ordini di massimi, mentre in teoria ne vengono prodotti molti di più. Le posizioni angolari dei massimi ben visibili sono:

$$\begin{array}{lll} K=1 & \operatorname{sen}\theta_1=0.075 & \theta_1=4.30^\circ \\ K=2 & \operatorname{sen}\theta_2=0.150 & \theta_2=8.63^\circ \\ K=3 & \operatorname{sen}\theta_3=0.225 & \theta_3=13.00^\circ \end{array}$$

La larghezza angolare di queste frange, secondo la (g) del problema 13.10, vale

$$\Delta\theta=\frac{2\lambda}{Np}=3\cdot 10^{-5}\ \text{rad}=1.7\cdot 10^{-3}\ \text{gradi} \quad .$$

Sullo schermo le posizioni dei massimi si hanno per una distanza dal centro data da

$$z_K=f\operatorname{tg}\theta_K\simeq f\operatorname{sen}\theta_K\simeq f\theta_K$$

$$\Rightarrow \quad z_1=7.5\ \text{cm} \quad , \quad z_2=15.0\ \text{cm} \quad , \quad z_3=22.5\ \text{cm} \quad .$$

La larghezza delle frange è $\Delta z=f\Delta\theta=3\cdot 10^{-3}$ cm $=30$ μm. Esse risultano sottili e ben distanziate e per questo motivo si chiamano *righe*.

13.13. ***Un reticolo possiede 10^3 fenditure per centimetro ed è largo 2 cm. Calcolarne la dispersione D e il potere risolutivo R in funzione dei parametri caratteristici. In particolari, per la riga del sodio di lunghezza d'onda $\lambda=589$ nm calcolare D e il più piccolo intervallo di lunghezza d'onda che il reticolo può risolvere nei primi tre ordini. Discutere l'influenza della larghezza finita delle fenditure su D e su R.***

Supponiamo dapprima $d\ll\lambda$ e ricaviamo D e R in queste condizioni. Si definisce *dispersione* del reticolo la quantità

$$D=\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}=\frac{d\theta}{d\lambda} \quad ;$$

calcolata per i valori degli angoli a cui corrispondono i massimi, la dispersione misura la separazione angolare tra i massimi di un certo ordine prodotti da radiazioni con lunghezze d'onda poco diverse. Differenziando la (b) del problema 13.10 $p\cos\theta d\theta=Kd\lambda$ e pertanto

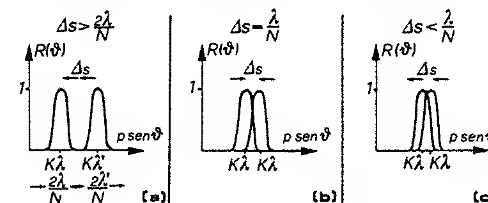
$$D=\frac{d\theta}{d\lambda}=\frac{K}{p\cos\theta}=\left[\left(\frac{p}{K}\right)^2-\lambda^2\right]^{-1/2} \quad , \qquad \text{(a)}$$

con θ determinato appunto dalla $\operatorname{sen}\theta=K\lambda/p$. Per ottenere una separazione elevata, ovvero una grande dispersione, bisogna che il passo p del reticolo sia il più piccolo possibile e che l'osservazione sia fatta all'ordine K più alto possibile.

Per la definizione del potere risolutivo, rispetto a due lunghezze d'onda molto vicine, ci serviamo del criterio di Rayleigh, già enunciato nel problema 13.7. Il massimo di ordine K per una certa λ cade all'angolo θ determinato da $p\operatorname{sen}\theta=K\lambda$; l'intensità nell'intorno di questo massimo si annulla quando $p\operatorname{sen}\theta=K\lambda\pm\lambda/N$. Se ora consideriamo la lunghezza d'onda $\lambda'=\lambda+\Delta\lambda$, questa produce un massimo separato da quello relativo a λ di una quantità

$$\Delta s=\Delta(p\operatorname{sen}\theta)=K\Delta\lambda \quad .$$

Si veda la figura: la separazione di cui si parla è intesa nella coordinata $p\operatorname{sen}\theta$ ovvero nella differenza di cammino ottico tra le onde emesse da due fenditure



successive. L'intensità nell'intorno del massimo di λ' si annulla a una distanza da esso di $\pm\lambda'/N=\pm(\lambda+\Delta\lambda)/N\simeq\pm\lambda/N$. Quando $\Delta s>2\lambda/N$, caso a, le due frange sono completamente separate e distinguibili; quando $\Delta s<2\lambda/N$ le due frange tendono a sovrapporsi fino a confondersi se $\Delta s<\lambda/N$, caso c. Diciamo che il valore minimo che può assumere Δs affinché le due frange si possano considerare distinte dal reticolo è quello per cui $\Delta s=K\Delta\lambda=\lambda/N$, ovvero quello per cui il massimo di intensità di una frangia coincide con il minimo dell'altra, caso b. Si chiama *potere risolutivo* del reticolo la quantità

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=KN \quad ; \qquad \text{(b)}$$

esso dipende dal numero di fenditure e dall'ordine K, ma non dalla lunghezza d'onda. Con un determinato reticolo per avere un grande potere risolutivo bisogna che l'osservazione sia fatta all'ordine K più elevato possibile.

La larghezza finita delle fenditure comporta, come osservato nel problema 13.12, che l'ordine massimo effettivamente visibile non superi di solito il terzo o il quarto. Raccogliamo in una tabella tutti i dati richiesti per $\lambda = 589$ nm facendo variare K da 1 a 3; il numero di fenditure è $N = 2 \cdot 10^3$ e il passo è $p = 10^{-3}$ cm $= 10$ µm. Utilizziamo la (b) del problema 13.10 e le (a) e (b); nell'ultima colonna è riportata $\Delta\lambda_{min} = \lambda/R$, cioè il più piccolo intervallo nell'intorno della λ data tra due lunghezze d'onda risolvibili.

K	$\operatorname{sen}\theta$	θ	D (rad/cm)	R	$\Delta\lambda$ (nm)
1	0.0589	3.38°	$1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	0.295
2	0.1178	6.77°	$2 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	0.147
3	0.1767	10.18°	$3 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	0.098

13.14. ***Eccitando i livelli atomici dell'atomo di sodio è possibile realizzare una sorgente luminosa il cui spettro contiene tra l'altro le due radiazioni di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 589.0$ nm e $\lambda_2 = 589.6$ nm (doppietto del sodio). Un fascio di luce emesso da questa sorgente incide su un reticolo di diffrazione e il sistema di righe così prodotto è osservato su una lastra fotografica posta nel piano focale di una lente con $f = 100$ cm. Si desidera che il doppietto del sodio venga risolto al prim'ordine e che le due righe relative a λ_1 e λ_2 siano separate sulla lastra di $\Delta z = 100$ µm. Determinare la larghezza L del reticolo e il numero n di fenditure per centimetro; determinare inoltre quanto devono essere larghe le fenditure affinché i massimi del prim'ordine abbiamo un'intensità pari al 70% di quella del massimo centrale.***

Usiamo i risultati del problema 13 13 Il potere risolutivo richiesto è

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589}{0.6} \simeq 10^3$$

e poiché si vuole la separazione già al prim'ordine ($K = 1$) il reticolo deve possedere $N = R = 10^3$ fenditure. Se si richiede una distanza tra le due righe sulla lastra fotografica pari a $\Delta z = 100$ µm, la separazione angolare deve valere

$$\Delta\theta = \frac{\Delta z}{f} = 10^{-4} \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = 1.7 \cdot 10^3 \ \frac{\text{rad}}{\text{cm}} \quad .$$

Risolvendo la (a) del problema 13.13 in p, con $K = 1$, si ottiene

$$p = \left[\left(\frac{1}{D}\right)^2 + \lambda_1^2\right]^{1/2} \simeq 6 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 6 \text{ µm} \quad .$$

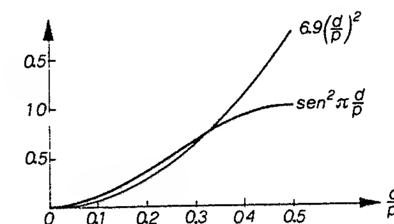
Noto il passo e il numero di fenditure si ricava subito la larghezza.

$$L = pN = 0.6 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{N}{L} = \frac{1}{p} = 1667 \quad \text{fenditure/cm} \quad .$$

Il rapporto tra l'intensità del massimo del prim'ordine ($K = 1$) e quella del massimo centrale è dato, in funzione della larghezza d delle fenditure, dalla (h) del problema 13.10; se tale rapporto deve valere 0.7 allora

$$\operatorname{sen}^2\pi\frac{d}{p} = 0.7\pi^2\left(\frac{d}{p}\right)^2 = 6.9\left(\frac{d}{p}\right)^2 .$$

La soluzione di questa equazione può essere trovata per via grafica, rappresentando in funzione di d/p le espressioni a primo e terzo membro, come mostrato in figura. Si ottiene $d/p = 0.32$ e quindi la larghezza delle fenditure deve valere $d = 1.9$ µm.



13.15. ***Un fascio di luce monocromatica ($\lambda = 550$ nm) incide normalmente su un reticolo di diffrazione e il sistema di frange è osservato nel piano focale di una lente. Si formano righe luminose adiacenti al massimo centrale per $\operatorname{sen}\theta_1 = 0.20$, $\operatorname{sen}\theta_2 = 0.40$, $\operatorname{sen}\theta_3 = 0.60$; in particolare la terza riga risulta avere un'intensità eguale al 25% di quella del massimo centrale. Determinare il passo p del reticolo, la larghezza minima d delle sue fenditure, la dispersione massima D e la massima separazione angolare $\Delta\theta$ che si otterrebbe per il doppietto del sodio ($\lambda_1 = 589.0$ nm, $\lambda_2 = 589.6$ nm).***

Le posizioni angolari di due massimi consecutivi sono date da

$$p\operatorname{sen}\theta_K = K\lambda \quad , \quad p\operatorname{sen}\theta_{K+1} = (K+1)\lambda \quad ;$$

sottraendo membro a membro

$$p = \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta_{K+1} - \operatorname{sen}\theta_K} = \frac{\lambda}{0.2} = 2\ 75 \text{ µm} \quad .$$

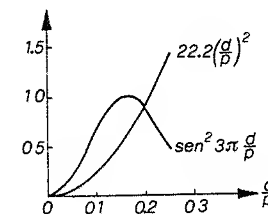
Quindi in teoria si dovrebbero osservare massimi a tutti gli angoli determinati da

$$\operatorname{sen}\theta_K = \frac{K\lambda}{p} = 0.2\ K \quad \Rightarrow \quad -5 \leqslant K \leqslant 5 \quad ,$$

che corrisponde a un massimo centrale e a massimi principali fino al quinto ordine.

Le intensità dei massimi principali riferite a quella del massimo centrale sono date dalla (h) del problema 13.10; per $K = 3$

$$R_3 = \frac{\operatorname{sen}^2(3\pi d/p)}{(3\pi d/p)^2}$$



Procedendo come nel problema 13 14 il valore di

d/p per cui $R_3 = 0.25$ si ricava dal grafico in figura e risulta 0.2; quindi $d = 0.55$ μm $= \lambda$. Nei massimi di ordine quarto e quinto $R_4 = 0.05$, $R_5 = 0$; in pratica la dispersione massima si ottiene per $K = 3$ e vale, secondo la (a) del problema 13.13, $D = 1.36 \cdot 10^4$ rad/cm.

La separazione angolare massima per il doppietto del sodio si ottiene osservando i massimi del terzo ordine e risulta

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = 8.2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 4.6 \cdot 10^{-2} \text{ gradi} \quad .$$

A rigore la dispersione, che è funzione di λ, non sarebbe la stessa a 550 nm e a 589 nm; il calcolo esatto dà $D = 1.44 \cdot 10^4$ rad/cm, che certamente non cambia l'ordine di grandezza del risultato.

13.16. *A causa di un difetto della macchina che incide una lastra di vetro, larga* $L = 14.4$ mm, *per ricavare un reticolo, questo ha una fenditura mancante ogni otto. Il reticolo senza difetti produrrebbe il primo massimo a* $\theta_I = 23.12°$ *quando è illuminato con* $\lambda = 589$ nm. *Calcolare l'intensità dei massimi principali del reticolo difettoso.*

Il problema si può risolvere con un'applicazione del principio di Babinet (paragrafo 13e.). Le fenditure mancanti costituiscono un sistema di N_2 strisce opache, distanziate di $p_2 = 8p_I$, se p_I è il passo del reticolo senza difetti Questo insieme di strisce opache, in base a (13.10), produce eccetto che per $\theta = 0$ un'ampiezza $A'(\theta) = -A_2(\theta)$, eguale e contraria a quella del sistema complementare, che è un reticolo di passo p_2. L'ampiezza prodotta dal reticolo difettoso, che per il principio di sovrapposizione si può pensare come somma dell'ampiezza $A_1(\theta)$ del reticolo senza difetti e dell'ampiezza $A'(\theta)$ del sistema di strisce opache, è dunque data da

$$A(\theta) = A_1(\theta) - A_2(\theta) \qquad \text{(a)}$$

Il problema è ricondotto al calcolo delle ampiezze di due reticoli di passo diverso e alla loro sovrapposizione.

Il reticolo senza difetti ha passo $p_1 = \lambda/\text{sen}\,\theta_1 = 1.5$ μm e produce solo un altro massimo principale per $\theta_2 = 51.75°$. Il numero di fenditure è $N_1 = L/p_1 = 9600$; i massimi sono larghi $\Delta\theta_I = 2\lambda/p_I N_I = 8.18 \cdot 10^{-5}$ rad $= 4.7 \cdot 10^{-3}$ gradi. Si ha un classico spettro con pochi massimi principali intensi e ben separati. Detta I_0 l'intensità di una singola fenditura, nei massimi principali $I_1 = N_1^2 I_0$.

Il sistema di strisce opache, ovvero il reticolo di passo $p_2 = 8p_I = 12$ μm, produce invece un gran numero di massimi: da $p_2 \text{sen}\,\theta = K\lambda$ si ha per K un valore massimo possibile di 20. Il primo massimo è prodotto a 2.81°, il secondo a 5.63°, e così via; l'ottavo massimo a 23.12° coincide col primo massimo principale del reticolo senza difetti Il numero di fenditure del secondo reticolo è $N_2 = L/p_2 = 1200 = N_1/8$ e le intensità dei suoi massimi principali, $I_2 = N_2^2 I_0$, sono molto più piccole di quelle del primo reticolo; il rapporto $I_1/I_2 = (N_1/N_2)^2 = 64$. Le larghezze dei massimi sono invece le stesse perché $p_1 N_1 = p_2 N_2$.

Calcoliamo adesso l'intensità risultante dalla sovrapposizione delle ampiezze dei due reticoli. Ricordiamo che l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza e che l'ampiezza totale è data dalla (a):

ret. senza difetti $\quad I_1 = \eta\,[A_I(\theta)]^2$

strisce opache $\quad I_2 = \eta\,[A_2(\theta)]^2$

$\Rightarrow$ *ret. difettoso* $I = \eta\,[A_1(\theta) - A_2(\theta)]^2$

Rispetto al reticolo senza difetti abbiamo

$$\frac{I}{I_1} = 1 + \left(\frac{A_2}{A_I}\right)^2 - 2\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = 1 + \frac{I_2}{I_1} - 2\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^{1/2} \quad .$$

Nei massimi principali del primo reticolo, che corrispondono all'ottavo e al sedicesimo massimo principale del secondo,

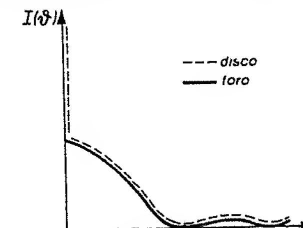
$$\frac{I}{I_1} = 1 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 - 2\,\frac{N_2}{N_1} = 1 + \frac{1}{64} - \frac{1}{4} = 0.766 \quad .$$

La conseguenza principale del difetto è una riduzione al 76.6% dell'intensità dei massimi, al di fuori di questi i cambiamenti sono ben poco visibili.

* * *

NOTE

A. Un problema classico in cui si prova che il principio di Babinet non è valido per $\theta = 0$ è quello dell'onda piana che investe un disco opaco di diametro D. La figura di diffrazione per $\theta \neq 0$ è eguale a quella prodotta da un foro di diametro D praticato in uno schermo opaco e consiste perciò di una macchia centrale luminosa con un primo minimo all'angolo $\theta \sim 1.22\ \lambda/D$ se $\lambda \ll D$. La differenza sostanziale sta nell'intensità a 0°: mentre per il foro questa ha un valore ridotto perché la maggior parte dell'energia incidente è assorbita dallo schermo, nel caso del disco opaco si ha un massimo molto pronunciato, come è mostrato nel disegno qualitativo della figura e come si può calcolare quantitativamente applicando il principio di Huygens-Fresnel-Kirchhoff.



È curiosa la storia legata a questo punto molto luminoso che si forma dietro un disco opaco. Nel 1818 Fresnel presentò la propria teoria della diffrazione, basata chiaramente sulla natura ondulatoria della luce. Poisson, che era a favore della teoria corpuscolare, dedusse dalla teoria di Fresnel che dietro un disco opaco doveva esserci un punto luminoso e considerò questa come prova

evidente dell'infondatezza della teoria di Fresnel. Invece Arago fece l'esperimento e trovò il punto luminoso; storicamente questo era stato scoperto circa 50 anni prima da Maraldi, ma di ciò non erano a conoscenza né Fresnel né Poisson né Arago.

B. Sono stati usati finora nomi come righe o frange per indicare un aspetto caratteristico di certe figure di interferenza o di diffrazione; d'altra parte il termine riga è stato usato anche per indicare alcune precise lunghezze d'onda emesse da atomi (doppietto del sodio, righe dell'idrogeno).

Se si esamina lo spettro emesso da una sorgente con uno strumento come il reticolo di diffrazione o lo spettrometro a prisma descritto nel prossimo capitolo si trova in effetti che ci sono casi in cui lo spettro consiste di un numero discreto di lunghezze d'onda caratterizzate da un ben preciso valore, con lo strumento si osserva un corrispondente numero di righe che sono sì l'immagine della fenditura, ma dimostrano la monocromaticità delle singole componenti del fascio incidente; altrimenti si avrebbe un'immagine diffusa con colorazione variabile.

Analogamente l'aspetto a righe della figura di interferenza dell'interferometro di Fabry-Perot o di un reticolo di diffrazione è certamente dovuto alle caratteristiche dello strumento, ma testimonia il fatto che si sta analizzando un fascio con componenti monocromatiche.

In altre parole, col termine riga si vuole mettere in evidenza l'aspetto dello spettro misurato con uno strumento, ma anche indicare una caratteristica fisica della sorgente e cioè l'emissione a seguito di una ben precisa transizione tra due livelli energetici (si veda anche il capitolo sedicesimo).

* * *

CAPITOLO 14

OTTICA GEOMETRICA

14a. I fenomeni di interferenza e di polarizzazione sono una manifestazione diretta del carattere ondulatorio delle radiazioni elettromagnetiche. Tuttavia, anche senza una conoscenza di questi fatti è possibile stabilire per la luce alcune semplici proprietà, dette *geometriche* per distinguerle da quelle *fisiche* viste sopra. Sostanzialmente esse consistono nelle leggi della riflessione e della trasmissione della luce nel passaggio da un mezzo ad un altro e si basano sul concetto di raggio, cioè della propagazione rettilinea della luce in un mezzo omogeneo e isotropo. La spiegazione di tali fenomeni avviene naturalmente nell'ambito della teoria ondulatoria, però l'uso di questa costituirebbe, nella trattazione dei problemi di ottica geometrica, una inutile complicazione (a parte i casi connessi col potere risolutivo, come vedremo).

Quando un'onda colpisce la superficie di separazione di due mezzi diversi, essa viene in parte riflessa e in parte trasmessa: i rapporti tra intensità incidente, riflessa e trasmessa dipendono dallo stato di polarizzazione della luce, dagli indici di rifrazione e dall'angolo di incidenza, come si è visto nel capitolo 11. In particolare:

a) il raggio incidente, il raggio riflesso e la normale alla superficie nel punto di incidenza giacciono nello stesso piano σ;

b) l'angolo di riflessione è eguale all'angolo di incidenza (entrambi misurati convenzionalmente rispetto alla normale);

c) su σ giace anche il raggio trasmesso;

d) detto n_1 l'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga l'onda incidente, θ_i l'angolo di incidenza, n_2 l'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga l'onda trasmessa, θ_t l'angolo di trasmissione (θ_i e θ_t essendo misurati sempre rispetto alla normale), vale la relazione

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t \quad . \tag{14.1}$$

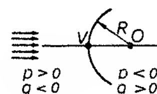
Se $n_1 < n_2$, $\theta_i > \theta_t$, il raggio trasmesso si avvicina alla normale; viceversa, se $n_1 > n_2$, $\theta_i < \theta_t$ e il raggio trasmesso si allontana dalla normale. In questo caso, quando $\operatorname{sen}\theta_i = n_2/n_1$, θ_t vale $\pi/2$; per valori di θ_i superiori all'angolo limite $\theta_i^* = \arcsen\,(n_2/n_1)$ non può esserci trasmissione, bensì solo riflessione (fenomeno della *riflessione totale*). Ciò avviene, ad esempio, nel passaggio acqua-aria, $n_1 = 1.33$, $n_2 = 1$: l'angolo limite risulta $\theta_i^* = 48.59°$.

14b. Negli strumenti ottici si cerca di ottenere, ad ogni singola superficie di discontinuità, solo riflessione (*superficie catottriche o specchi*) oppure solo trasmissione (*superficie diottriche o diottri*). Inoltre, quasi sempre, ci si limita a superficie piane o sferiche.

Per chiarezza, conviene ricordare alcune definizioni. Consideriamo un generico sistema: se i raggi luminosi uscenti da un punto (oggetto) vengono fatti convergere in un punto (immagine), il sistema si dice *stigmatico* rispetto a quella coppia di punti e i punti stessi sono detti coniugati. L'immagine di un oggetto data dal sistema si dice *reale* quando è individuabile fisicamente come punti di incontro dei raggi emessi dall'oggetto; si dice invece *virtuale quando per essa passano i prolungamenti dei raggi, non i raggi stessi*, quando cioè è individuabile solo geometricamente.

Nei sistemi diottrici a causa del fenomeno della *dispersione* (l'indice di rifrazione è funzione della lunghezza d'onda, crescendo in generale dal rosso al violetto) un fascio di luce complessa viene scisso nelle sue componenti e si forma tutta una serie distinta di immagini colorate; se però con opportuni accorgimenti si riesce ad assicurare lo stigmatismo il sistema si dice *acromatico*, il problema non esiste per i sistemi catottrici che sono per loro natura acromatici

Infine, se di figure oggetto contenute in un piano il sistema dà figure immagini contenute in un piano, con un determinato rapporto di similitudine (ingrandimento), il sistema stesso si dice *aplanatico* rispetto alla detta coppia di piani



Prendiamo ora una superficie di discontinuità, che nella figura è assunta per comodità sferica, e fissiamo alcune convenzioni sui segni delle distanze e degli angoli che seguiremo sempre

1. La luce incidente proviene da sinistra.
2. Per oggetti posti a sinistra del vertice V le distanze p da V (distanze oggetto) sono positive; per oggetti posti a destra di V esse sono negative
3. Per le distanze immagine q vale il contrario di quanto stabilito al punto 2.
4. Il raggio di curvatura R della superficie sferica è positivo se il centro di curvatura è a destra di V, come in figura, negativo se il centro di curvatura è a sinistra di V, nei due casi si parla di superficie sferica convessa o concava, rispettivamente.
5. Gli angoli che i raggi luminosi formano con l'asse o col raggio di curvatura sono positivi se la pendenza è positiva (da zero a 90° in senso antiorario), negativi se la pendenza è negativa (da zero a 90° in senso orario).
6. Le distanze dall'asse sono positive per punti al di sopra dell'asse, negative per punti al di sotto, se si tratta di oggetti; per le immagini vale il viceversa

Data una superficie di discontinuità tra due mezzi e un oggetto che invia luce alla superficie, si pone il problema di calcolare se e dove si forma l'immagine. Anche limitandosi a superficie piane o sferiche la soluzione non è semplice e la risposta è in generale negativa; non si ha cioè stigmatismo e l'immagine di un punto luminoso non è più un punto, ma una regione estesa. È possibile realizzare uno stigmatismo approssimativo solo se ci si riduce a considerare esclusivamente *fasci di raggi parassiali*, cioè fasci di piccola apertura, quasi paralleli e coincidenti con l'asse.

14c. Lo strumento ottico più semplice è lo *specchio piano*: esso dà per riflessione un'immagine virtuale di un punto P che si trova nella posizione Q simmetrica di P rispetto allo specchio. Il risultato si può estendere ai punti di un oggetto esteso e si trova che lo specchio piano dà un'immagine virtuale, diritta, non ingrandita e speculare (cioè tra oggetto e immagine c'è la stessa relazione che tra mano destra e sinistra). Si noti che per vedere l'immagine di P non è necessario che lo specchio intersechi il segmento PQ.

Lo specchio piano è un sistema stigmatico, acromatico e aplanatico per qualunque punto o piano e per fasci di qualunque apertura; è l'unico strumento a possedere senza approssimazioni tutte queste proprietà.

Per tutti gli altri strumenti che trattiamo in questo paragrafo e nel successivo ci poniamo invece in condizioni parassiali.

Nel caso di riflessione su una superficie sferica (*specchio sferico*) la relazione tra distanza oggetto p e distanza immagine q è

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \tag{14.2}$$

se R è il raggio di curvatura della superficie sferica. Lo stigmatismo si vede dal fatto che compaiono solo distanze e non anche gli angoli che i raggi formano con l'asse, lo strumento è inoltre rigorosamente acromatico Per $R \to \infty$ si ottiene lo specchio piano la cui equazione risulta giustamente $p = q$.

Se nella (14.2) l'oggetto è all'infinito ($p = +\infty$, raggi paralleli tra loro e all'asse) l'immagine si forma per $q = R/2$; viceversa, per avere l'immagine all'infinito, la distanza oggetto deve valere $p = -R/2$. La quantità

$$f = -\frac{R}{2} \tag{14.3}$$

si dice *distanza focale* dello specchio sferico e la (14.2) si scrive anche

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad . \tag{14.4}$$

Quando invece si ha trasmissione su una superficie sferica (*diottro sferico*), indicando con n_1 l'indice di rifrazione a sinistra del vertice e con n_2 quello a destra, l'equazione risulta

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad . \tag{14.5}$$

Lo strumento è stigmatico, ma non acromatico in quanto compaiono nell'equazione gli indici di rifrazione. Il rapporto $(n_2 - n_1)/R$ si dice potere convergente o diottrico. Per $R \to \infty$ (14.5) diviene

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p \tag{14.6}$$

che è l'equazione del *diottro piano*.

Sempre nella (14.5) quando l'oggetto è all'infinito l'immagine si forma a una distanza $q = n_2 R/(n_2 - n_1)$, mentre se si pone l'oggetto a distanza $p = n_1 R/(n_2 - n_1)$ l'immagine si forma all'infinito. Le due quantità

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} \quad , \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} \tag{14.7}$$

si dicono rispettivamente *distanza focale anteriore e posteriore* del diottro sferico. Esse sono sempre diverse, il loro rapporto valendo $f_1/f_2 = n_1/n_2$. La (14.5) si può riscrivere così:

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1 \quad . \tag{14.8}$$

Le equazioni (14.2, 14.4, 14.5, 14.8) si dicono scritte nella *forma gaussiana.*

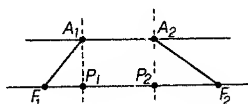
14d. Un blocco di materiale trasparente delimitato da due superficie diottriche in genere sferiche aventi l'asse in comune costituisce una *lente semplice*, più lenti semplici aventi l'asse in comune costituiscono una lente composta ovvero quello che più in generale si chiama *sistema diottrico centrato* (qualcuna delle superficie diottriche può anche essere piana).

Se una lente semplice, formata da un materiale con indice di rifrazione n_2, è immersa in un mezzo con indice n_1, abbiamo, sempre nell'approssimazione parassiale, le seguenti equazioni:

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad , \quad \frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{q_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad , \quad p_2 = t - q_1 \quad ; \tag{14.9}$$

le prime due si applicano alla prima e alla seconda superficie diottrica, la terza dà il legame tra distanza immagine q_1 del primo diottro, spessore t della lente e distanza oggetto p_2 del secondo diottro ed esprime il fatto che l'immagine fornita dal primo diottro funge da oggetto per il secondo.

Il punto F_1 dell'asse in cui occorre mettere l'oggetto per ottenere l'immagine all'infinito si dice primo fuoco della lente, invece il punto F_2 dell'asse in cui si forma l'immagine di un oggetto posto all'infinito è detto secondo fuoco della lente. Con riferimento alla figura prendiamo una direzione parallela all'asse: considerata come entrante ha per coniugata la direzione A_2F_2, mentre considerata come uscente ha per coniugata la direzione F_1A_1. I punti A_1 e A_2 sono evidentemente coniugati. Poiché in approssimazione parassiale è anche assicurato l'aplanatismo, i piani passanti per A_1 e A_2 e ortogonali all'asse della lente sono coniugati: tutte le loro coppie di punti che si trovano nelle stesse condizioni di A_1 e A_2 godono delle proprietà di questi. Tali piani si chiamano *piani principali* della lente e le loro intersezioni P_1 e P_2 con l'asse sono dette *punti principali*. Alle distanze $f_1 = F_1P_1$ e $f_2 = F_2P_2$ si dà il nome, rispettivamente, di prima e seconda distanza focale della lente. Qualora, come abbiamo supposto, il mezzo a destra e a



sinistra della lente sia lo stesso, si dimostra (vedi problema 14.13) che $f_1 = f_2 = f$ e che l'equazione della lente si scrive

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad . \tag{14.10}$$

Le distanze oggetto e immagine sono misurate rispetto al primo e al secondo piano principale. La quantità f è detta distanza focale o semplicemente *focale* della lente. Le considerazioni svolte finora valgono anche per le lenti composte.

Molto spesso, nella pratica, si può trascurare per una lente semplice lo spessore t; si parla in tal caso di *lente sottile*. Le (14.9) danno subito la (14.10) con

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad . \tag{14.11}$$

Le distanze p e q sono misurate dal centro della lente; i punti F_1 e F_2 sono equidistanti dalla lente e i piani principali coincidono tra loro e col piano della lente.

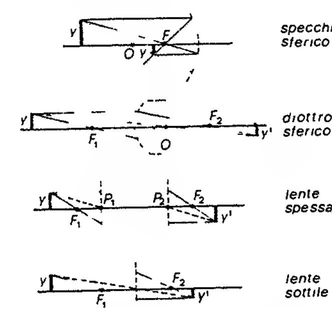
L'inverso della distanza focale si chiama *potere convergente* di una lente.

14e. In generale la dimensione trasversale y' dell'immagine non è eguale a quella y dell'oggetto; si definisce *ingrandimento trasversale* I appunto il rapporto di tali dimensioni:

$$I = \frac{y'}{y} \quad . \tag{14.12}$$

Esso è caratteristico dello strumento ed è una funzione delle distanze oggetto e immagine, oltre che eventualmente dei vari indici di rifrazione. I è positivo quando l'immagine è capovolta, negativo quando è diritta.

Per esplicitare la (14.12) occorre costruire l'immagine a partire dall'oggetto. Ci si serve allo scopo di alcuni raggi particolari, dei quali si sa tracciare subito il percorso. Precisamente, si può sfruttare il fatto che un raggio parallelo all'asse passa per un fuoco e che un raggio passante per un fuoco dopo la riflessione o trasmissione è parallelo all'asse. Nella figura sono mostrati quattro esempi. Nei primi due casi si può anche utilizzare il raggio passante per il centro di curvatura, che non viene deviato. Nella lente spessa il raggio incidente passante per P_1 viene trasmesso passando per P_2 e mantenendo la stessa inclinazione; viene cioè spostato lateralmente, ma non deviato. Se la lente è sottile, il raggio passante per il centro non viene né deviato né spostato lateralmente.



Dallo studio di coppie di triangoli simili si ricavano le relazioni esplicite per l'ingrandimento; esse possono avere vari aspetti per uno stesso strumento e

si sceglie quello più adatto al problema da risolvere.

$$\textit{specchio sferico: } I = \frac{q-R}{p+R} = -\frac{R}{2p+R} = \frac{2q-R}{R} = \tag{14.13}$$

$$= \frac{f}{p-f} = -\frac{q+f}{f} = -\frac{q}{p}$$

$$\textit{diottro sferico: } I = \frac{q-R}{p+R} = \frac{n_1 R}{(n_2-n_1)p - n_1 R} = \frac{(n_2-n_1)q - n_2 R}{n_2 R} = \tag{14.14}$$

$$= \frac{f_1}{p-f_1} = \frac{q-f_2}{f_2} = \frac{n_1 q}{n_2 p}$$

$$\textit{lente: } I = \frac{q-f}{f} = \frac{f}{p-f} = \frac{q}{p} \tag{14.15}$$

Quando il sistema è formato da più sistemi semplici (specchi, diottri, lenti) l'ingrandimento trasversale totale è il prodotto degli ingrandimenti dei singoli sistemi.

Anche la dimensione longitudinale di un oggetto non è in generale eguale a quella dell'immagine, per cui si definisce l'*ingrandimento longitudinale* come

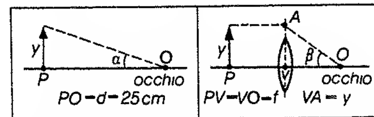
$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} \quad ;$$

p_1 e p_2 si riferiscono ai punti estremi dell'oggetto e, similmente, q_1 e q_2 ai punti estremi dell'immagine. Pure l'ingrandimento longitudinale è funzione di p, q e degli indici di rifrazione.

La migliore percezione dei particolari di un oggetto ad occhio nudo si ha quando l'oggetto si trova alla cosiddetta *distanza di visione distinta*, pari a circa 25 cm per un occhio normale. Se la dimensione trasversale dell'oggetto è y, esso è visto dall'occhio sotto un angolo α dato da $\mathrm{tg}\,\alpha = y/d$; ad α si dà il nome di angolo visuale. Per migliorare la capacità di percezione dell'occhio l'oggetto deve apparire sotto un angolo β maggiore di α. Il rapporto

$$V = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{14.17}$$

si dice *ingrandimento visuale o angolare*. Nella pratica lo scopo è raggiunto con le lenti di ingrandimento e soprattutto con i microscopi per oggetti vicini e accessibili, con i cannocchiali ed i telescopi per oggetti lontani.



La funzione della lente di ingrandimento è illustrata in figura. se l'oggetto è posto all'incirca nel fuoco anteriore di una lente di focale $f < d$ e l'occhio nel fuoco posteriore, $\mathrm{tg}\,\beta = y/f$ e l'ingrandimento visuale vale $V = \mathrm{tg}\,\beta/\mathrm{tg}\,\alpha = d/f = 25/f$ se f è espressa in centimetri I valori comunemente ottenuti con una sola lente semplice arrivano al massimo a $V = 3$ (cioè $f \simeq 8$ cm), oltre intervengono i difetti della lente e la qualità dell'immagine è rovinata.

14f. Per quanto grande possa essere l'ingrandimento e pur supponendo corrette le aberrazioni, con gli strumenti ottici non si riesce ad andare oltre una certa percezione massima dei particolari di un oggetto. Il limite è posto dalla diffrazione, cioè dalla natura ondulatoria della luce, e dipende dal fatto che i fasci utilizzati hanno sempre una sezione limitata, per via di diaframmi o dei contorni stessi delle lenti utilizzate.

Ricordiamo quanto visto nel paragrafo 13c. e nei problemi 13.6 e 13.7 a proposito della diffrazione prodotta da un'apertura circolare di diametro $D = 2R$, illuminata con un onda piana di lunghezza d'onda λ.

1) La figura di diffrazione è un disco luminoso, di apertura angolare 2θ ricavabile dalla

$$\mathrm{sen}\,\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D} = 0.61\,\frac{\lambda}{R} \quad , \tag{14.18}$$

circondata da anelli successivamente scuri e chiari. Poiché l'85% dell'energia cade nel disco centrale, trascureremo in seguito il resto della figura; l'importante è che l'immagine di un punto non è puntiforme.

2) Due punti luminosi si dicono distinguibili quando il massimo centrale della figura di diffrazione dell'uno cade nel primo minimo della figura di diffrazione dell'altro (*criterio di Rayleigh*). All'inverso della distanza tra i due punti in tale situazione si dà il nome di *potere risolutivo lineare* σ. Angolarmente le immagini dei due punti sono separate dall'angolo θ dato dalla (14.18) e si dice *potere risolutivo angolare* la quantità

$$\varrho = \frac{1}{\theta} \simeq \frac{R}{0.61\lambda} \quad . \tag{14.19}$$

Se l'indice di rifrazione del mezzo terminale è n, nelle formule precedenti invece di λ va posto λ/n.

È molto importante notare che i risultati valgono anche se i raggi non provengono da infinito: il parametro che conta non è la distanza dell'oggetto, ma il diametro del diaframma.

14g. Le grandezze nuove incontrate in questo capitolo sono i vari poteri: essi misurano la capacità di un sistema ottico nel compiere una determinata funzione, che può essere quella di far convergere i raggi luminosi o di distinguere punti molto vicini; le dimensioni e le unità di misura sono:

potere convergente	$1/f$	diottrie $= \mathrm{m}^{-1}$
potere risolutivo angolare	ϱ	rad^{-1}
potere risolutivo lineare	σ	m^{-1}
potere dispersivo (1)	D	adimensionale

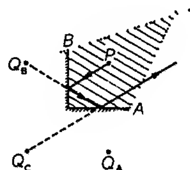
Le figure che si trovano nel testo non soddisfano certamente l'ipotesi parassiale; esse sono state esagerate trasversalmente per comodità di rappresentazione.

* * *

(1) Si veda il problema 14 6

14.1. ***Due specchi piani sono posti a 90° tra loro; nel punto P della figura è collocata una sorgente luminosa puntiforme. Determinare dove si forma l'immagine della sorgente data dallo specchio A e dallo specchio B.***

Le proprietà dello specchio sono descritte nel paragrafo 14c. Consideriamo lo specchio A: esso riflette sia la luce proveniente direttamente da P (dando l'immagine Q_A) sia quella riflessa dallo specchio B e che sembra provenire dall'immagine Q_B: questa costituisce un oggetto per lo specchio A che ne dà un'immagine nel punto Q_C. Quindi lo specchio A dà due immagini di P Ripetendo il ragionamento per lo specchio B si verifica che anch'esso dà due immagini di P, una in Q_B e l'altra di nuovo in Q_C. I punti P, Q_A, Q_B, Q_C stanno ai vertici di un rettangolo. Ponendosi di fronte agli specchi le immagini che si vedono sono due o tre a seconda che il punto di osservazione cada nella zona di intersezione dei fasci emessi dalle immagini e delimitati dagli specchi oppure no, zona che in figura è indicata con un tratteggio.



Si confronti, senza cercare però profonde analogie, con il risultato del problema 1.15.

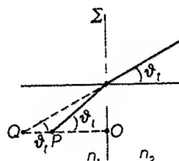
14.2. ***Un diottro piano è costituito da una superficie piana Σ che separa due mezzi indefiniti con indice di rifrazione n_1 e n_2. Una sorgente puntiforme P è posta nel mezzo n_1 a distanza p da Σ. Calcolare dove si trova l'immagine Q di P. Esaminare inoltre il comportamento del sistema se la luce incidente è formata da un fascio parassiale convergente.***

Abbiamo visto nel paragrafo 14c. che l'equazione del diottro piano (14.6) si ottiene come limite di quella del diottro sferico per $R \to \infty$:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = 0 \quad , \quad q = -\frac{n_2}{n_1} p \quad . \tag{a}$$

Senza passare per questa via, con riferimento alla figura notiamo che un raggio luminoso emesso da P viene deviato nell'attraversare Σ: guardando dal mezzo n_2 la sorgente sembra essere nel punto Q (se $n_1 < n_2$) I moduli delle distanze $p = PO$ e $q = QO$ sono legati dalla relazione

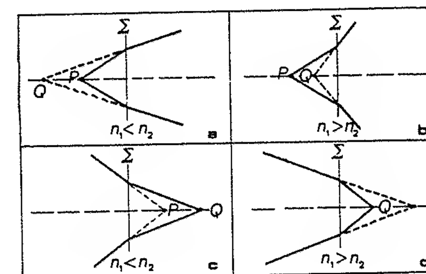
$$\frac{p}{q} = \frac{\operatorname{tg}\theta_t}{\operatorname{tg}\theta_i} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t \cos\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_t} = \frac{n_1}{n_2}\,\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} \quad , \tag{b}$$



dove si è usata la (14.1). Al variare del raggio considerato ovvero dell'angolo θ_i il rapporto non resta costante perché non resta costante $\cos\theta_i / \cos\theta_t$ e quindi, anche se è fissata la posizione di P non lo è quella di Q. Ciò vuol dire che i raggi trasmessi non hanno un'origine comune e non si forma un'immagine definita: lo strumento non è stigmatico. Però, nell'ipotesi parassiale (θ_i e θ_t molto piccoli) il rapporto dei coseni vale praticamente 1 e dalla (b) si riottiene la (a); occorre solo avere l'avvertenza di aggiungere un segno meno in quanto, secondo le convenzioni adottate nel paragrafo 14b., la distanza immagine è negativa.

Di un oggetto reale il diottro piano dà un'immagine virtuale, più lontana se $n_1 < n_2$ e più vicina se invece $n_1 > n_2$. Per esempio, guardando un oggetto che si trova sott'acqua ($n_1 = 1.33$, $n_2 = 1$) questo appare a una profondità $q = p/1.33$ inferiore a quella reale.

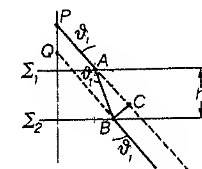
Nel caso finora esaminato la superficie diottrica Σ era colpita da un fascio di luce divergente da un punto oggetto reale (parti a e b della figura). Con un



opportuno sistema ottico è possibile fare arrivare su Σ un fascio di raggi sempre parassiali, ma convergenti (parti c e d della figura). Questi raggi, una volta trasmessi, passano fisicamente per Q, che è un'immagine reale; i prolungamenti delle direzioni originarie si incontrano invece in P che risulta per la superficie diottrica un *oggetto virtuale*. L'equazione è sempre la (a), con p negativo e q positivo.

Si verifichi per esercizio che l'ingrandimento trasversale del diottro piano è unitario mentre quello longitudinale risulta $-(n_2/n_1)$.

14.3. ***Una lastra di vetro ($n_2 = 1.5$) a facce piane e parallele, spessa h = 4.5 cm, è immersa in aria ($n_1 = 1$). Un punto luminoso P invia sulla lastra un fascio di raggi parassiali. Calcolare dove si forma l'immagine di P. Calcolare inoltre per un raggio generico lo spostamento trasversale subito nell'attraversare la lastra in funzione dell'angolo di incidenza.***



Un raggio generico che colpisca la lastra con un angolo di incidenza diverso da zero è trasmesso da questa secondo una direzione parallela a quella incidente, come è evidente dalla figura essendo appunto la lastra a facce piane e parallele e identico il mezzo da entrambe le parti.

Lo spostamento trasversale è

$$BC = AB\,\mathrm{sen}(\theta_i - \theta_t) = \frac{h}{\cos\theta_t}\,\mathrm{sen}(\theta_i - \theta_t) \quad . \tag{a}$$

La differenza $\delta = \theta_i - \theta_t$ è la deviazione che avviene nel passaggio aria-vetro, essa non è costante al variare dell'angolo di incidenza, bensì cresce con questo. Limitandoci al caso parassiale si ha infatti

$$\delta = \theta_i - \theta_t = \theta_i - \frac{n_1}{n_2}\,\theta_i = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\,\theta_i \quad .$$

Il risultato resta vero anche per angoli grandi, pur non sussistendo più linearità tra δ e θ_i. Sempre nel caso parassiale la (a) diventa

$$BC = h\,\delta = h\,\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)\,\theta_i \quad .$$

La posizione del punto Q è determinata da

$$PQ = \frac{BC}{\mathrm{sen}\,\theta_i} = \frac{BC}{\theta_i} = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) h = \Delta$$

e risulta indipendente da θ_i. Lo strumento è dunque stigmatico e dà di un oggetto reale un'immagine virtuale distante Δ da P e situata tra P e la lastra se $n_2 > n_1$ e oltre P se $n_1 > n_2$ (p.e. lastra d'aria tra due blocchi di vetro).

14.4. ***Data la lastra piana del problema 14.3 si ricavi, per analogia con quanto esposto nel paragrafo 14d. in relazione alle lenti, l'equazione generale della lastra e si esamini in particolare il comportamento se il fascio di luce incidente è convergente.***

La lastra è formata da due superficie diottriche Σ_1 e Σ_2 alle quali applichiamo la (14.6):

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q_1} = 0 \quad , \quad \frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{q} = 0 \quad ;$$

p è la distanza dell'oggetto da Σ_1 che dà un'immagine a distanza q_1; questa immagine funge da oggetto per Σ_2, da cui dista $p_2 = h - q_1$. L'immagine finale si forma a distanza q da Σ_2. Facendo sistema tra le relazioni scritte si ottiene

$$q = -p - \frac{n_1}{n_2}\,h \quad . \tag{a}$$

Se si riferiscono sia p che q a Σ_1 o a Σ_2 si ritrova per la distanza tra oggetto e immagine l'espressione Δ calcolata nel problema 14.3.

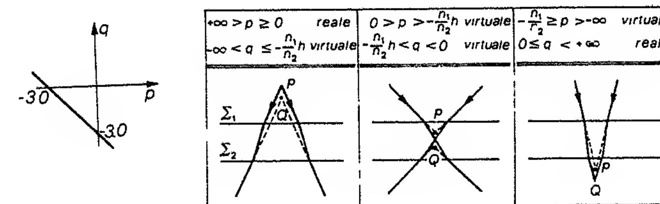
La (a) è l'equazione della lastra a facce piane e parallele per illuminamen-

Nel caso proposto l'equazione (a) ha l'espressione numerica

$$p + q = -3 \text{ cm}$$

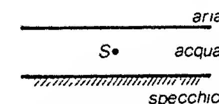
e la distanza tra oggetto e immagine risulta $\Delta = 1.5$ cm.

Il grafico di (b) è riportato in figura insieme alle tre situazioni possibili ottenute spostando l'oggetto tra $+\infty$ e $-\infty$, le ultime due comportano un fascio incidente convergente.



14.5. ***Uno strato d'acqua copre uno specchio piano; ad una certa profondità è posta una sorgente puntiforme che emette luce isotropicamente. Calcolare quale percentuale della luce emessa può uscire dall'acqua ($n = 4/3$).***

Il sistema è mostrato in figura. Consideriamo prima la luce emessa dalla sorgente verso il semipiano superiore. Poiché l'indice di rifrazione dell'acqua è maggiore di quello dell'aria, alla superficie acqua-aria si verifica *riflessione totale* per incidenza superiore all'angolo θ_0 tale che $\mathrm{sen}\,\theta_0 = 1/n = 0.75$, cioè $\theta_0 = 48.59°$. Allora dall'acqua può uscire solo la luce compresa entro l'angolo solido di vertice S e semiapertura θ (vedi appendice A.8); a rigore non tutta uscirebbe perché una parte verrebbe sempre riflessa e una parte assorbita. Supponendo però di trascurare questi fatti la percentuale che esce rispetto al totale è



$$\frac{2\pi(1 - \cos\theta_0)}{4\pi} = \frac{1 - \cos\theta_0}{2} = 0.17 \quad .$$

Teniamo ora conto dell'esistenza dello specchio; i raggi uscenti da S che colpiscono lo specchio con angolo di incidenza $\theta < \theta_0$, una volta riflessi possono uscire dall'acqua; quelli per cui invece $\theta > \theta_0$ non escono e in definitiva c'è un altro 17% di luce che esce e si raggiunge in totale il 34%. Il resto dell'energia resta intrappolato nell'acqua a causa della riflessione totale.

Si osservi che se consideriamo la luce che compie il percorso inverso essa può raggiungere dall'aria un osservatore S posto sott'acqua solo entro un cono che ha, nell'acqua, semiapertura pari a θ_0: come dire che il mondo esterno, di apertura 180°, viene compresso dentro questo cono, di apertura 97.18°. Luce

P_1P_4 1 cm $\to Q_1Q_4$ 2.27 cm , P_2P_3 1 cm $\to Q_2Q_3$ 2.50 cm ,

P_1P_2 1 cm $\to Q_1Q_2$ 5.7 cm , P_3P_4 1 cm $\to Q_3Q_4 \sim 5.7$ cm .

La forma quadrata è distorta in un trapezio; il lato Q_3Q_4 è ancora rettilineo. Infatti la distanza dall'asse del punto generico del tratto Q_3Q_4 è

$$y' = -y\frac{q}{p} = -y\frac{25+q}{25} = -\frac{25+q}{25}\ \text{cm} \quad (y = 1\ \text{cm}) \quad ,$$

cioè lineare nell'ascissa q.

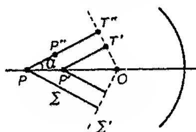
L'ingrandimento longitudinale vale 5.7; ricorrendo all'equazione dello specchio scritta nella forma $q = Rp/(2p+R)$ si trova che la (14.16) diventa $\Delta q/\Delta p = I_1 I_2$ ovvero, al limite,

$$\frac{dq}{dp} = I^2 \quad , \tag{a}$$

dove I è calcolato in un punto generico dell'intervallo dp. L'ingrandimento longitudinale non è così eguale a quello trasversale· ne consegue una deformazione degli oggetti non giacenti in un piano ortogonale all'asse. Solo se $I_1 \approx I_2 \approx 1$ si ha eguaglianza: ciò avviene per piccoli oggetti posti in prossimità del centro di curvatura, dove oggetto e immagine sono quasi coincidenti, o del vertice.

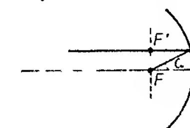
14.10. ***Una particella carica provoca l'emissione di radiazioni luminose quando si muove in un mezzo materiale con velocità v superiore a quella v' della luce nel mezzo. Il fenomeno si dice effetto Cerenkov; le radiazioni sono emesse ad un angolo α rispetto alla traiettoria dato da $\cos\alpha = v'/v = c/nv$. Supponendo che la particella si muova rettilineamente con velocità $v = 0.996c$ entro un gas con pressione e temperatura tali da dare un indice di rifrazione $n = 1.008$, calcolare che tipo di immagine viene data da uno specchio sferico con focale $f = 1.5$ m e asse coincidente con la direzione del moto.***

La traiettoria, lo specchio e il punto P in cui la particella si trova ad un certo istante, p.e. $t = 0$, sono mostrati in figura. La radiazione Cerenkov è emessa nella direzione PT'' e in tutte le altre direzioni passanti per P e formanti angolo α con la traiettoria, direzioni che stanno su una superficie conica Σ di vertice P e semiapertura α; la velocità della luce nel gas è $v' = c/n$, inferiore alla velocità v della particella e legata a questa da $v' = v\cos\alpha$, per cui quando la particella giunge nel punto P' al tempo $t = \tau$ lo spazio percorso dalla luce emessa in P è $PP'' = PP'\cos\alpha$. Ne segue che la radiazione emessa in P e quella emessa in P' arrivano nello stesso istante nei punti T'' e T' appartenenti alla superficie conica Σ' di semiapertura $90° - \alpha$ e vertice O; questo rappresenta il punto in cui si trova la particella nell'istante in cui le radiazioni emesse



dai punti precedenti della traiettoria raggiungono Σ'. Si può dimostrare che Σ' è una superficie di egual fase ovvero una superficie d'onda della radiazione emessa.

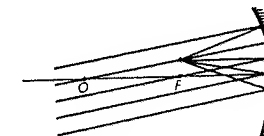
Da un punto di vista ottico-geometrico abbiamo in conclusione questa situazione: in ciascun piano passante per l'asse ci sono due fasci di raggi paralleli; l'uno formante l'angolo α e l'altro l'angolo $-\alpha$ con l'asse Se α è piccolo lo specchio è stigmatico e fa convergere tutti i raggi che formano angolo α con l'asse in un unico punto immagine F' Per trovare F' usiamo in particolare il raggio emesso nel fuoco F e il fatto che, a causa dell'aplanatismo, F' giace in un piano normale all'asse e passante per F La costruzione è mostrata in figura per il fascio α e si trova



$$FF' = f\,\text{tg}\,\alpha \simeq f\alpha = \frac{R}{2}\alpha \quad . \tag{a}$$

il fascio $-\alpha$ è focalizzato nel punto F'' simmetrico di F' rispetto a F

Il luogo dei punti F' che si otterrebbero al variare dell'angolo α è detto piano focale dello specchio; in effetti si può considerare piana solo una piccola areola attorno a F, in corrispondenza ai limiti entro i quali lo strumento è aplanatico. Riassumendo, mentre un fascio di raggi paralleli all'asse converge nel fuoco, un fascio di raggi paralleli tra loro e formanti con l'asse angolo α converge in un punto del piano focale individuato dalla (a), come mostrato in figura



Nel caso in esame α è costante, ma la radiazione è emessa in tutti gli infiniti piani passanti per l'asse, essa viene focalizzata dallo specchio nel proprio piano focale e l'immagine è una circonferenza di raggio $R\alpha/2$. Particelle con velocità diversa emettono ad angoli α diversi e la luce corrispondente viene focalizzata su circonferenze di raggio diverso.

Su tali proprietà si basa un metodo di identificazione di particelle. In un fascio selezionato magneticamente tutte le particelle hanno la stessa quantità di moto p; se le masse sono diverse, diverse sono le velocità e con un contatore a effetto Cerenkov si compie l'ulteriore selezione sulla velocità e quindi sulla massa

Numericamente $\cos\alpha = c/nv = 0.996$, $\alpha = 0\ 089$ rad, $FF' = f\alpha = 13\ 4$ cm.

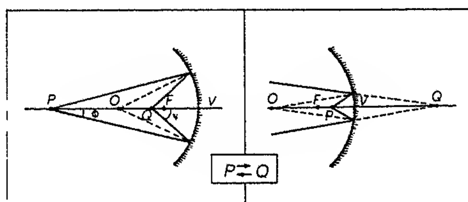
14.11. ***Una superficie diottrica convessa di raggio R separa due mezzi con indici di rifrazione n_1 e n_2. Studiare le posizioni dell'immagine di un oggetto puntiforme al variare della posizione di questo sull'asse del diottro nei due casi $n_1 < n_2$ e $n_1 > n_2$. Ripetere lo studio per una superficie concava. Trovare infine un'espressione per l'ingrandimento longitudinale.***

Ci rendiamo allora conto che dal caso c ne discende un altro, con tale operazione di scambio; precisamente:

d) $0 \geqslant p > -\infty$, $0 \geqslant q \geqslant R/2$ immag. reale

L'oggetto è oltre lo specchio, cioè virtuale; è una situazione già vista nei problemi precedenti e corrisponde a illuminazione con luce convergente: i raggi incidenti, riflessi dallo specchio, danno luogo a un'immagine reale, ma i prolungamenti delle direzioni originarie si incontrano dietro lo specchio.

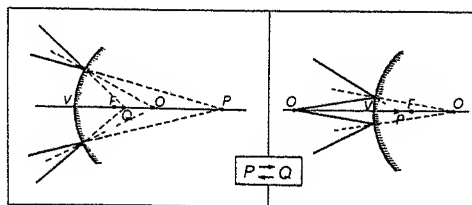
I quattro casi studiati sono rappresentati nelle due figure: a e b in quella di sinistra, c e d in quella di destra.



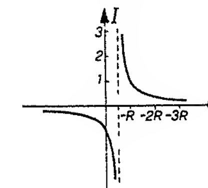
In maniera analoga si potrebbe procedere per lo specchio convesso, mostrato in figura, ma sarebbe un inutile esercizio analitico perché in realtà, quando con lo specchio concavo abbiamo spostato l'oggetto da $+\infty$ a $-\infty$, fatto riflettere i raggi sulla superficie sferica e calcolato la posizione dell'immagine, abbiamo esaurito tutte le possibilità offerte dallo strumento. Infatti la situazione oggetto reale per lo specchio convesso è quella d, mentre la situazione oggetto virtuale corrisponde alle a, b, c. Scriviamo pertanto:

$a \to e)$ $-R \geqslant p > -\infty$, $R \geqslant q \geqslant R/2$ ogg. virt. imm. virt.
$b \to f)$ $-R/2 \geqslant p \geqslant -R$, $+\infty > q \geqslant R$ ogg. virt. imm virt
$c \to g)$ $0 \geqslant p \geqslant -R/2$, $0 \geqslant q > -\infty$ ogg virt. imm. reale
$d \to h)$ $+\infty > p \geqslant 0$, $R/2 > q \geqslant 0$ ogg. reale imm. virt.

Le varie possibilità sono mostrate nella figura.



L'ingrandimento trasversale di uno specchio sferico è dato dalla (14.13). Il suo andamento in funzione di p nel caso dello specchio concavo è mostrato in figura, dalla quale si deduce che in corrispondenza ai casi già esaminati abbiamo:



a) $I > 0$ immagine capovolta e rimpicciolita

b) $I > 0$ » » » ingrandita

c) $I < 0$ » diritta » »

d) $I < 0$ » » » rimpicciolita .

Lasciamo come esercizio le analoghe deduzioni per lo specchio convesso; diciamo solo che nel caso h (oggetto reale) l'immagine virtuale è diritta e rimpicciolita. Un esempio di quest'ultima situazione si ha negli specchi che vengono collocati in incroci stradali dove non si ha una buona visibilità; invece un esempio del caso c è il classico piccolo specchio concavo da barba

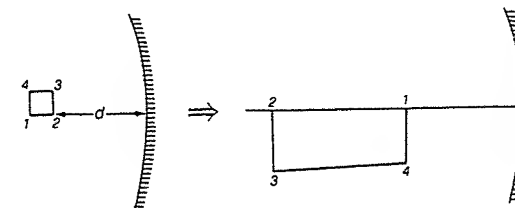
14.9. ***Un piccolo quadrato di lato $d = 1$ cm è posto sull'asse di uno specchio sferico concavo di raggio 50 cm nella posizione indicata in figura; la distanza P_2V è $d = 35$ cm. Determinare dove si forma e che aspetto ha l'immagine del quadrato data dallo specchio.***

L'equazione dello specchio (14.2 o 14.4) si scrive numericamente

$$q = \frac{25p}{25 - p} \text{ cm} \quad \text{oppure} \quad p = \frac{25q}{25 + q} \text{ cm}$$

e le immagini (reali) dei punti P_1 ($p_1 = 36$ cm) e P_2 ($p_2 = 35$ cm) cadono nei punti Q_1 ($q_1 = -81.8$ cm) e $Q_2(q_2 = -87.5$ cm). Gli ingrandimenti relativi alle posizioni di P_1 e P_2 sono, per la (14.13),

$$I(P_1) = I_1 = -\frac{q_1}{p_1} = 2.27 \quad , \quad I(P_2) = I_2 = -\frac{q_2}{p_2} = 2.50 \quad .$$



L'immagine risulta capovolta, sia verticalmente che longitudinalmente (si noti che la figura è in scala per i rapporti tra le lunghezze dei lati, ma non per le distanze dallo specchio). Numericamente:

Si tratta essenzialmente di eseguire uno studio sistematico come quello del problema 14.8 per lo specchio sferico. L'equazione è la (14.5); le (14.7) danno le due distanze focali. Indichiamo schematicamente i quattro casi possibili:

① $n_1 < n_2$, $R > 0$

② $n_1 > n_2$, $R > 0$

③ $n_1 < n_2$, $R < 0$

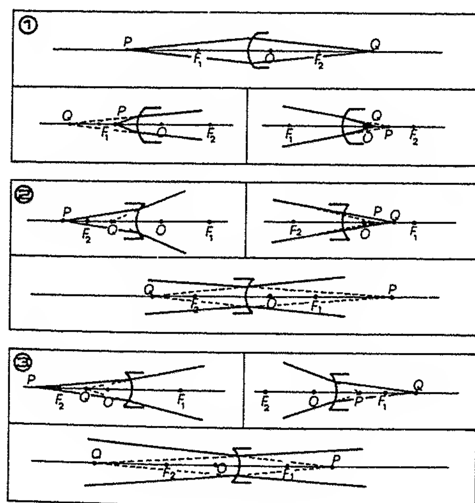
④ $n_1 > n_2$, $R < 0$

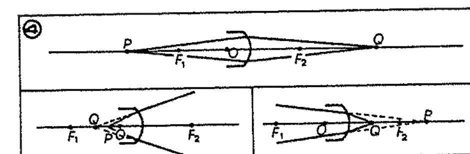
Già dalle figure si vede che risolti i casi ① e ② sono risolti rispettivamente i casi ④ e ③, che si ottengono dai primi scambiando l'oggetto con l'immagine e R con $-R$ (c'è simmetria rispetto al vertice). Inoltre anche il secondo caso si può ricavare dal primo con la trasformazione $p \to -q$, $q \to -p$. Infatti la (14.5) nei due casi si scrive

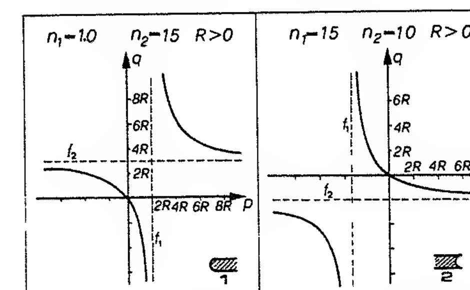
$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad , \quad \frac{n_2}{p} + \frac{n_1}{q} = \frac{n_1 - n_2}{R}$$

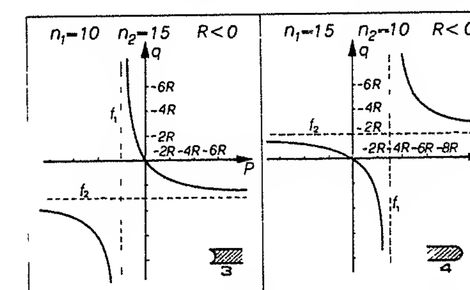
e si vede che si passa dalla prima alla seconda appunto con lo scambio suddetto. Alla fine basta dunque lo studio di un solo caso, che lasciamo come esercizio.

I vari risultati sono schematizzati nelle figure seguenti.









I diottri si dicono *convergenti* o *divergenti* a seconda che il *potere diottrico* $(n_2 - n_1)/R$ sia positivo o negativo; sono convergenti i diottri del tipo ① e ④, divergenti quelli degli altri due tipi. Nei diottri convergenti i fuochi sono reali, in quelli divergenti sono virtuali. I piani ortogonali all'asse nei punti F_1 e F_2 si chiamano piani focali; i loro punti godono di proprietà analoghe a quelle viste nel problema 14.10: essi sono cioè le immagini di punti all'infinito che inviano raggi paralleli tra loro, ma non all'asse del sistema.

Come per gli altri strumenti visti finora si dimostra che in condizioni parassiali oltre allo stigmatismo c'è anche aplanatismo, per cui ha senso parlare di ingrandimento trasversale; non c'è invece acromatismo, per la presenza nelle equazioni dell'indice di rifrazione. Le espressioni dell'ingrandimento trasversale sono date dalle (14.14); per l'ingrandimento longitudinale si procede esattamente come nel problema 14.9; a partire da (14.16) utilizzando (14.14-14.15) si trova

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = -\frac{n_2}{n_1} I_1 I_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dp} = -\frac{n_2}{n_1} I^2 \ .$$

Concludiamo con un'osservazione. se si esaminano i vari risultati ottenuti o citati in questo problema si vede subito che ponendo $n_2 = -n_1$ si riottengono tutte le formule relative allo specchio sferico. La ragione del segno meno sta nel fatto che, a differenza di quanto avviene nella trasmissione, dopo la riflessione la luce si propaga da destra a sinistra, il che, nelle nostre convenzioni, equivale all'adozione di un segno meno.

14.12. *Una sfera cava di raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 5$ cm è fatta di vetro ($n_2 = 1.5$) ed è riempita di mercurio. Di un punto luminoso posto sull'asse e distante $p = 30$ cm dal vertice V il sistema dà un'immagine virtuale posta all'interno della sfera a distanza $q'' = 3.18$ cm dal vertice V. Calcolare il raggio interno R_1. Se l'oggetto è una freccia lunga 1 cm, ortogonale all'asse, quanto è alta l'immagine?*

La luce che colpisce il sistema incontra un primo diottro aria-vetro di caratteristiche note ($n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, $R_2 = 5$ cm), uno specchio sferico convesso costituito dalla superficie del mercurio con raggio incognito R_1 e poi, dopo la riflessione, un secondo diottro vetro-aria simmetrico del primo L'immagine di ciascuno strumen.o funge da oggetto per il successivo Abbiamo.

primo diottro

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{n_2 R_2 p}{(n_2 - n_1)p - n_1 R_2} = 22.5 \text{ cm}$$

$$p' = (R_2 - R_1) - q = -(R_1 + 17.5) \text{ cm}$$

specchio sferico

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'} = -\frac{2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad q' = \frac{R_1(R_1 + 17.5)}{R_1 + 35} \text{ cm} .$$

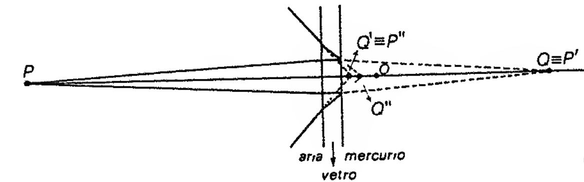
La prima immagine è reale e si forma nel punto Q al di fuori della sfera, essa diviene l'oggetto virtuale P' per lo specchio che ne dà un'immagine Q' virtuale: infatti essendo $R_1 > 0$ anche $q' > 0$ e l'immagine Q' è dietro lo specchio. Q' a sua volta è l'oggetto reale P'' per il diottro vetro-aria che ne dà un'immagine virtuale Q'' in posizione nota Risolviamo allora l'equazione del diottro facendo attenzione al fatto che $q'' = -3.18$ cm e $R_2^* = -R_2 = -5$ cm:

$$\frac{n_2}{p''} + \frac{n_1}{q''} = \frac{n_1 - n_2}{R_2^*} \quad \Rightarrow \quad p'' = \frac{n_2 R_2^* q''}{(n_1 - n_2)q'' - n_1 R_2^*} = 3.62 \text{ cm} \quad ;$$

giustamente risulta $p'' > 0$ in quanto P'' è un oggetto reale. Abbiamo detto che P'' coincide con Q', però uno è misurato rispetto al vertice del diottro e l'altro rispetto al vertice dello specchio; pertanto

$$p'' = (R_2 - R_1) + q' \quad \Rightarrow \quad q' = p'' - (R_2 - R_1) = R_1 - 1.38 \text{ cm} \quad .$$

Eguagliando questa espressione a quella precedentemente trovata per q' si ricava $R_1 = 3$ cm. In figura sono mostrati il percorso di alcuni raggi e la posizione dei vari punti oggetto e immagine (la dimensione trasversale è molto esagerata).



L'ingrandimento trasversale totale è eguale al prodotto dei singoli ingrandimenti:

$$I = \frac{n_1 q}{n_2 p} \cdot \left(-\frac{q'}{p'}\right) \cdot \frac{n_2 q''}{n_1 p''} = -\frac{q q' q''}{p p' p''} = -5.2 \cdot 10^{-2} \quad .$$

L'immagine finale della freccia è virtuale, diritta e rimpicciolita di circa un fattore 20.

14.13. *Una lente semplice spessa è costituita da una sfera di vetro ($n_2 = 1.5$) immersa in aria; il raggio della sfera è $R = 10$ cm. Determinare la posizione dei piani principali e la distanza focale della lente.*

Cominciamo col calcolare le posizioni dei fuochi della lente; per far questo consideriamo le (14.9) che scriviamo:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1.5}{q_1} = 0.05 \quad , \quad p_2 = 20 - q_1 \quad , \quad \frac{1.5}{p_2} + \frac{1}{q_2} = 0.05 \quad .$$

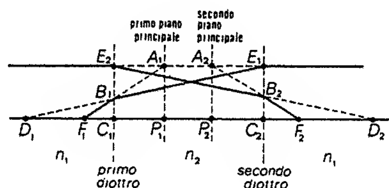
Posto $p_1 = +\infty$ nella prima, $q_1 = 30$ cm, $p_2 = -10$ cm, $q_2 = 5$ cm: il fuoco posteriore F_2 è reale e dista 5 cm dal vertice destro della lente, ovvero 15 cm dal centro. Se invece poniamo $q_2 = +\infty$, $p_2 = 30$ cm, $q_1 = -10$ cm, $p_1 = 5$ cm: il fuoco anteriore F_1 della lente è reale e dista 5 cm dal vertice sinistro, ovvero 15 cm dal centro. Questa simmetria nella posizione dei fuochi è dovuta alla simmetria della lente. Nel caso generale, con R_1 e R_2 qualsiasi e distanza t tra i diottri qualsiasi, si trova, sempre dalle (14.9):

$$\text{fuoco anteriore } p_1(F_1) = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1} \, \frac{(n_2 - n_1)t + n_2 R_2}{(n_2 - n_1)t + n_2(R_2 - R_1)} \quad , \qquad \text{(a)}$$

$$\text{fuoco posteriore } q_2(F_2) = -\frac{n_1 R_2}{n_2 - n_1} \, \frac{(n_2 - n_1)t - n_2 R_1}{(n_2 - n_1)t + n_2(R_2 - R_1)} \quad ;$$

le distanze sono misurate rispetto ai vertici dei due diottri. Si vede che $p_1 = q_2$ solo se $t = 0$ (lente sottile) oppure se $R_1 = -R_2$ (lente simmetrica). In quest'ultimo caso, se inoltre $t = 2R$ si ottiene $p_1 = q_2 = (n_2 - 2n_1)R/2(n_1 - n_2)$ che è la formula risolutiva per la nostra lente sferica.

Abbiamo dunque trovato espressioni generali e particolari per le distanze dei fuochi dalle superficie diottriche che delimitano la lente; però le distanze focali sono le distanze dai piani principali. Riprendiamo allora la figura del paragrafo 14d. con maggiori particolari, specificando che·



— F_1 è il fuoco anteriore, F_1P_I è la distanza focale f_I;
— D_I è l'immagine di F_I data dal primo diottro e fa da oggetto per il secondo diottro (con immagine all'infinito) per cui $C_ID_I = q_I < 0$, $C_2D_I = p_2 > 0$;
— F_2 è il fuoco posteriore, F_2P_2 è la distanza focale f_2;
— D_2 è l'immagine del punto all'infinito data dal primo diottro e fa da oggetto per il secondo diottro (con immagine in F_2) per cui $C_ID_2 = q_I > 0$, $C_2D_2 = p_2 < 0$

Si noti che lavoriamo contemporaneamente su due situazioni: in una l'oggetto è all'infinito e l'immagine in F_2, nell'altra l'oggetto è in F_I e l'immagine all'infinito; però usiamo gli stessi simboli p_I, q_I, p_2, q_2 senza aggiungere altre notazioni per distinguere i due casi in quanto il significato è ogni volta evidente.

Per trovare la distanza focale f_I consideriamo due coppie di triangoli simili:

$$B_1C_1F_I \text{ simile a } A_IP_IF_I \quad \Rightarrow \quad \frac{B_1C_1}{A_IP_1} = \frac{C_1F_I}{P_IF_I} = \frac{p_I}{f_I} \quad ,$$

$$B_IC_ID_1 \text{ simile a } E_1C_2D_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{B_IC_1}{E_IC_2} = \frac{C_1D_I}{C_2D_I} = -\frac{q_I}{p_2} \quad ;$$

il segno meno occorre perché q_1 e p_2 sono di segno opposto. Siccome $A_IP_1 = E_1C_2$ abbiamo

$$f_1 = -p_2\,\frac{p_I}{q_1} \quad . \tag{b}$$

Procedendo in modo analogo per il secondo fuoco si trova

$$f_2 = -q_1\,\frac{q_2}{p_2} \tag{c}$$

Utilizzando le (a) e la $p_2 = t - q_1$ si arriva a dimostrare che

$$f_1 = f_2 = f = \frac{n_1n_2R_1R_2}{(n_2-n_1)\;[(n_2-n_1)t + n_2(R_2-R_1)]} \quad . \tag{d}$$

Il primo piano principale giace perciò a distanza f da F_1 sulla destra e il secondo piano principale giace a distanza f da F_2 sulla sinistra. I fuochi. pur non essendo in generale equidistanti dalle superficie che delimitano la lente, lo sono rispetto ai piani principali.

Per la sfera di vetro, dalla (d) con $R_I = -R_2 = R$ e $t = 2R$, si ottiene

$$f = \frac{n_2R}{2(n_2-n_1)} = 15 \text{ cm} \quad ;$$

vista la posizione dei fuochi si constata che i due piani principali coincidono tra loro e passano per il centro della sfera che costituisce l'unico punto principale del sistema.

Se si misurano le distanze oggetto a partire dal primo piano principale e quelle immagine dal secondo si dimostra che l'equazione della lente spessa diviene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{e}$$

e che questa relazione resta valida anche per una lente composta.

Nella pratica, quando si acquista una lente viene data dal costruttore la distanza focale per cui è facile ricavare la posizione dei piani principali con una misura sperimentale che determini la posizione dei fuochi. Se invece non è nota la focale si può compiere questa misura: si individua la coppia di punti P e Q per i quali l'ingrandimento è eguale a 1; dalla (14.15) si ha $p - f = = f = q - f$ ovvero $PF_1 = f = QF_2$; se si erano prima determinati i fuochi si arriva alla focale.

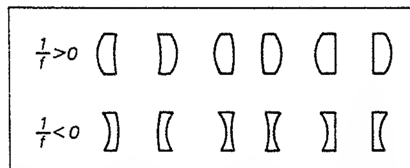
14.14. ***Ricavare dal problema* 14.13 *il caso della lente sottile* ($t = 0$). *In base al potere convergente* $1/f$ *una lente si dice convergente o positiva se* $1/f > 0$ *oppure divergente o negativa se* $1/f < 0$. *Studiare per una lente sottile, di indice di rifrazione* n_2 *immersa in un mezzo di indice* n_1, *le varie possibilità che si hanno in funzione di* n_1, n_2, R_1, R_2.**

Se $t = 0$ i fuochi sono simmetrici rispetto alla lente, come già notato a proposito della (a) del problema 14.13; la distanza dalla lente risulta $n_1R_1R_2/[(n_2 - n_I)\ (R_2 - R_1)]$. Dalla (d) dello stesso problema si vede che questa è anche l'espressione della distanza focale. Pertanto i piani principali coincidono tra loro e col piano della lente e il centro della lente è l'unico punto principale; queste proprietà sono vere per qualunque valore dei raggi R_1 e R_2 purché il mezzo a destra sia eguale al mezzo a sinistra della lente. Quindi, per una lente sottile

$$f = \frac{n_1}{n_2-n_1}\;\frac{R_1R_2}{R_2-R_1} \quad , \quad \frac{1}{f} = \frac{n_2-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{a}$$

L'equazione della lente è sempre la (14 10) con il valore di f appena dato, analogamente, resta valida la (14.15) per l'ingrandimento.

Quando $n_2 > n_1$, la positività o negatività di una lente dipende dall'essere $1/R_1$ maggiore o minore di $1/R_2$. In figura sono indicati i vari casi possibili.



Una semplice regola mnemonica è la seguente: una lente più spessa al centro che al bordo è convergente, più stretta al centro che al bordo è divergente.

Se $n_2 < n_1$ i risultati si scambiano.

Nella tabella sono presentate le varie situazioni possibili per le distanze oggetto e immagine; notiamo che nelle lenti convergenti i fuochi sono reali mentre nelle divergenti sono virtuali.

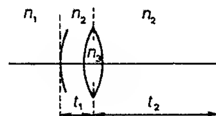
$+\infty > p > f$	ogg. reale	$f < q < +\infty$	imm. reale	$\frac{1}{f} > 0$
$f > p > 0$	» reale	$-\infty < q < 0$	» virtuale	
$0 > p > -\infty$	» virtuale	$0 < q < f$	» reale	
$+\infty > p > 0$	ogg. reale	$f < q < 0$	imm. virtuale	$\frac{1}{f} < 0$
$0 > p > f$	» virtuale	$0 < q < +\infty$	» reale	
$f > p > -\infty$	» virtuale	$-\infty < q < f$	» virtuale	

14.15. ***L'occhio umano si può schematizzare nel modo seguente: una superficie diottrica sferica di raggio $R = 0.8$ cm, la cornea, che separa l'aria dall'umore acqueo spesso $t_1 = 0.5$ cm e con indice di rifrazione $n_2 = 1.34$; quindi una lente sottile biconvessa simmetrica, il cristallino, di raggio R_c e indice di rifrazione $n_3 = 1.44$ seguita dall'umore vitreo, spesso $t_2 = 2.0$ cm e con indice di rifrazione n_2, alla fine del quale si trova la retina. Tutte le superficie diottriche considerate hanno lo stesso asse. Si abbia un oggetto sull'asse, posto prima a distanza infinita (punto remoto), poi a distanza $d = 25$ cm (punto prossimo) dal vertice della cornea. Calcolare nei due casi quale deve essere il raggio di curvatura R_c del cristallino affinché l'immagine si formi sempre sulla retina.***

Dobbiamo essenzialmente trattare il diottro aria-umore acqueo e la lente sottile immersa in un mezzo con lo stesso indice di rifrazione a sinistra e a destra della lente. Le equazioni sono, rispettivamente:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad ,$$

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{n_3 - n_2}{n_2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad .$$



I raggi R_1 e R_2 valgono R_c e $-R_c$; p' è $t_1 - q$ e $q' = t_2$ dovendo l'immagine formarsi sulla retina; a ciò appunto provvede la variabilità di R_c.

Numericamente.

$$\frac{1}{p} + \frac{1.34}{q} = 0.43 \quad , \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{2.0} = \frac{0.15}{R_c} \quad .$$

Nei due casi proposti:

$$p = +\infty \quad , \quad q = 3.12 \text{ cm} \quad , \quad p' = -2.62 \text{ cm} \quad ,$$

$$p = 25 \text{ cm} \quad , \quad q = 3.44 \text{ cm} \quad , \quad p' = -2.94 \text{ cm} \quad .$$

Le immagini date dal diottro cadono entrambe oltre la retina, per cui è necessaria la convergenza apportata dal cristallino, che nel secondo caso deve essere più forte; nel secondo caso cioè il raggio deve essere minore che nel primo. Risolvendo l'equazione della lente con i valori dati per p' e q' si trova:

$$R_c(+\infty) = 1.27 \text{ cm} \quad , \quad f = 8.47 \text{ cm} \quad , \quad \frac{1}{f} = 11.8 \text{ diottrie}$$

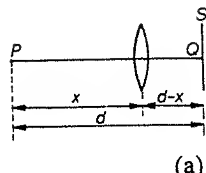
$$R_c(25 \text{ cm}) = 0\ 94 \text{ cm} \quad , \quad f = 6.27 \text{ cm} \quad , \quad \frac{1}{f} = 15.9 \text{ diottrie}$$

Come informazione diciamo che la focale di tutto il sistema quando è accomodato all'infinito è 2.38 cm e che il primo piano principale si trova 0.71 cm oltre la cornea e il secondo 0.12 cm, si parla in tal caso di piani principali incrociati.

L'occhio normale (emmetrope) è capace di focalizzare oggetti posti tra il punto remoto e il punto prossimo. L'occhio ipermetrope ha il punto prossimo più lontano di 25 cm, mentre l'occhio miope ha il punto remoto a distanza finita. Il primo è troppo poco convergente, nel senso che riesce a dare immagini solo per oggetti relativamente lontani, mentre per oggetti vicini la convergenza non è sufficiente a formare l'immagine sulla retina; per correggere tale difetto occorre una lente convergente. L'occhio miope è invece troppo convergente: per punti lontani esso non forma l'immagine sulla retina e occorre una lente divergente per correggerlo.

14.16. ***Un oggetto puntiforme luminoso P è posto a distanza d da uno schermo S. Se si interpone una lente sottile tra l'oggetto e lo schermo si nota che, a seconda della focale, ci sono due, una o nessuna posizione della lente tali che l'immagine dell'oggetto si formi sullo schermo. Determinare nei vari casi che rapporto sussiste tra f e d. In particolare, se $d = 50$ cm e se ci sono due posizioni, distanti 10 cm tra loro, nelle quali la lente dà l'immagine sullo schermo, calcolare quanto vale la focale della lente.***

Scriviamo così l'equazione della lente:



$$\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad x^2-dx+df=0$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{d \pm (d^2-4df)^{1/2}}{2} \quad .$$

È allora possibile che P sia l'oggetto e Q sia l'immagine solo se $d \geq 4f$. Precisamente:

$d > 4f$ due posizioni x_1 e x_2, simmetriche rispetto al punto mediano,
$d = 4f$ una posizione, $x = d/2$,
$d < 4f$ nessuna posizione.

Nel caso numerico proposto $x_2 - x_1 = 10$ cm; dalla (a) $x_2 - x_1 = (d^2 - 4df)^{1/2}$ e quindi

$$f=\frac{d^2-(x_2-x_1)^2}{4d}=12 \text{ cm} \quad .$$

Questo problema mostra un metodo pratico per la determinazione, almeno approssimativa, della distanza focale di una lente sottile convergente.

14.17. ***Due lenti sottili immerse in aria, una convergente e una divergente, hanno lo stesso asse e sono fatte dello stesso materiale ($n_2 = 1.75$). I raggi di curvatura delle quattro superficie diottriche sono tutti eguali in modulo a $R = 30$ cm. Un fascio di raggi paralleli all'asse colpisce prima la lente convergente e poi quella divergente. Determinare per quali valori della distanza t tra le due lenti il sistema dà un'immagine reale e per quali una virtuale. Discutere il caso generale di due lenti sottili separate da una distanza t.***

Essendo i raggi di curvatura eguali, la prima lente deve essere biconvessa ($R_1 = 30$, $R_2 = -30$ cm) e la seconda biconcava ($R_1 = -30$, $R_2 = 30$ cm) Le focali sono

$$f_1 = f^* = 20 \text{ cm} \quad , \quad f_2 = -f^* = -20 \text{ cm}$$

e il sistema di equazioni delle due lenti è

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f^*} \quad , \quad p_2 = t - q_1 \quad , \quad \frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=-\frac{1}{f^*} \quad .$$

Nel caso proposto $p_1 = +\infty$, $q_1 = f^*$, $p_2 = t - f^*$, $q_2 = f^*(f^* - t)/t$. Si conclude:

1) $t = 0$ — $q_2 = \infty$ — lenti addossate, effetto nullo,
2) $0 < t < f^*$ — $q_2 > 0$ — immagine reale,

3) $t = f^*$ — $q_2 = 0$ — effetto della seconda lente nullo,
4) $t > f^*$ — $q_2 < 0$ — immagine virtuale

Nel caso più generale occorre calcolare le posizioni dei fuochi e il valore della focale per poter dire di conoscere il sistema. Le equazioni sono

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1} \quad , \quad p_2 = t - q_1 \quad , \quad \frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2} \quad .$$

Ponendo $p_1 = +\infty$, $q_1 = f_1$, $p_2 = t - f_1$ e risolvendo in q_2 si ha la distanza dalla seconda lente del fuoco posteriore F_2 del sistema:

$$q_2(F_2)=\frac{f_2(t-f_1)}{t-f_1-f_2} \quad . \tag{a}$$

Ponendo invece $q_2 = +\infty$, $p_2 = f_2$, $q_1 = t - f_2$ e risolvendo in p_1 si ha la distanza dalla prima lente del fuoco anteriore F_1 del sistema:

$$p_1(F_1)=\frac{f_1(t-f_2)}{t-f_1-f_2} \tag{b}$$

Stiamo seguendo essenzialmente il procedimento del problema 14.13, di cui possiamo usare la (b) oppure la (c) insieme rispettivamente alla (b) o alla (a) di questo problema Così facendo otteniamo. per esempio con la coppia (c) e (a)

$$f=-q_1\frac{q_2}{p_2}=-f_1\frac{f_2(t-f_1)}{t-f_1-f_2}\,\frac{1}{t-f_1}=\frac{f_1f_2}{f_1+f_2-t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{t}{f_1f_2} \quad . \tag{c}$$

Note le posizioni di F_1, F_2 e la focale si può risalire alla posizione dei piani principali. In particolare due lenti sottili addossate si comportano come un'unica lente la cui focale è data da

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2} \quad . \tag{d}$$

Per un sistema complesso non si può dedurre una conclusione sulla convergenza o divergenza dal segno di f, come per una lente sottile Nel nostro caso per esempio dalla (c) si conclude che essendo $f_1 = -f_2$ la focale f è sempre positiva, ma sappiamo che il sistema non è sempre convergente; ciò vuol dire che i fuochi sono esterni rispetto ai piani principali, ma non necessariamente rispetto alle due lenti. In numeri risulta $f = 400/t$ cm se t è espresso in centimetri e si possono ritrovare i risultati già visti avendo in più l'informazione sulla focale.

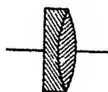
Il sistema di due lenti, una positiva e una negativa, messe in modo da dare un'immagine reale, è usato nei teleobiettivi.

14.18. *Una lente sottile piano-concava ($n_2 = 1.33$) è costituita da un materiale deformabile per cui la parte concava può cambiare forma. Ad essa viene addossata una lente sottile biconvessa di vetro, la cui focale vale* **15.8** cm. *In queste condizioni la focale del sistema è* **21.6** cm. *Se si gira la lente in modo che presenti al materiale deformabile l'altra superficie, la focale diviene* **21.3** cm. *Calcolare l'indice di rifrazione n_3 del vetro della lente.*

Avendo due lenti sottili a contatto utilizziamo la (d) del problema 14.17, con f focale complessiva, f_1 focale (variabile) della lente piano-concava e f_2 focale (fissa) della lente di vetro. Poiché f e f_2 sono noti, nella prima situazione troviamo $f_1 = -58.8$ cm, nella seconda $f_1 = -61.2$ cm. La focale di una lente sottile è data dalla (14.11): ora però uno dei due raggi è infinito per cui $f_1 = -n_1 R_2/(n_2 - n_1)$. Posto $n_1 = 1$ troviamo che i due raggi di curvatura del materiale deformabile e pertanto i raggi di curvatura delle due facce della lente biconvessa sono

$$R_2' = 19.4 \text{ cm} \quad , \quad R_2'' = 20.2 \text{ cm} \quad .$$

Sempre in base alla (14.11) applicata ora alla lente sottile biconvessa abbiamo



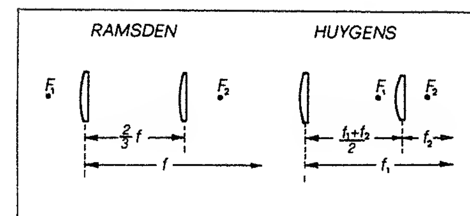
$$n_3 = 1 + \frac{R_2' R_2''}{f_2(R_2'' - R_2')} = 1.63 \quad ;$$

in questo calcolo bisogna assumere i due raggi di segno opposto, p.e. $R_2' = 19.4$ cm e $R_2'' = -20.2$ cm oppure $R_2' = 20.2$ cm e $R_2'' = -19.4$ cm (si ricordi che la lente è convergente e quindi $R_2' > 0$, $R_2'' < 0$ nella nostra situazione si possono scambiare i valori, ma non i segni).

14.19. *Sono dati i due sistemi ottici mostrati in figura; il primo è costituito da due lenti piano-convesse eguali, ciascuna di focale f, distanti $2f/3$ (oculare di Ramsden), il secondo da due lenti piano-convesse, una con focale tripla dell'altra, distanti la semisomma delle focali (oculare di Huygens). Con questi oculari si vuole guardare l'immagine data da un precedente sistema ottico, facendo sì che i raggi uscenti dall'oculare siano paralleli (l'oculare serve appunto per osservare con l'occhio le immagini date dagli obiettivi). Dire dove deve cadere l'immagine data dall'obiettivo nei due casi; calcolare inoltre le focali dei due oculari.*

Affinché i raggi uscenti siano paralleli l'immagine da osservare, che funge da oggetto per il sistema, deve cadere nel piano focale anteriore; occorre quindi calcolare la posizione dei fuochi dei due oculari. Il risultato è dato dalla (b) del problema 14.17, $p = f_1(t - f_2)/(t - f_1 - f_2)$.

Nell'oculare di Ramsden le due lenti sono eguali per cui $f_1 = f_2 = f$ e inoltre $t = 2f/3$; pertanto $p = f/4$: l'immagine da osservare deve cadere davanti alla prima lente (detta di campo) a $f/4$ da questa. In tal senso deve essere



regolata la posizione dell'oculare rispetto all'obiettivo. La focale totale si ricava dalla (c) del problema 14.17:

$$\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f} - \frac{2}{3}\frac{f}{f^2} = \frac{4}{3f} \quad \Rightarrow \quad f^* = \frac{3}{4} f \quad .$$

Nell'oculare di Huygens $f_1 = 3f$, $f_2 = f$, $t = (f_1 + f_2)/2 = 2f$ e quindi $p = -3f/2$. L'immagine data dall'obiettivo deve cadere oltre la prima lente di una quantità pari a metà della distanza focale della lente medesima e in tal senso va regolata la posizione dell'oculare rispetto all'obiettivo. La focale risulta

$$\frac{1}{f^*} = \frac{1}{3f} + \frac{1}{f} - \frac{2f}{3f^2} = \frac{2}{3f} \quad \Rightarrow \quad f^* = \frac{3}{2} f = \frac{3}{2} f_2 \quad .$$

L'oculare di Ramsden è convergente, quello di Huygens è divergente; col primo si possono anche guardare oggetti reali mentre ciò non è possibile col secondo (naturalmente se si vuole che i raggi escano paralleli).

14.20. *Due lenti sottili convergenti biconvesse, con l'asse ottico in comune, sono poste a una distanza* $t = 50$ cm *tra loro. Ciascuna lente è simmetrica e i raggi di curvatura valgono rispettivamente* $R = 40$ cm *e* $R' = 20$ cm; *l'indice di rifrazione del vetro delle lenti è* $n_2 = 1.5$. *Lo spazio tra di esse è riempito da un mezzo con indice n_3. Un fascio di raggi paralleli colpisce il sistema e l'immagine fornita, reale, cade* **6.2** cm *oltre la seconda lente. Calcolare il valore di n_3.*

Non possiamo applicare questa volta l'equazione delle lenti sottili perché il mezzo a sinistra di una lente non è eguale a quello di destra. Dobbiamo pertanto utilizzare le equazioni dei singoli diottri. Per la prima lente:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad , \quad p' = -q \quad , \quad \frac{n_2}{p'} + \frac{n_3}{q'} = \frac{n_3 - n_2}{-R} \quad .$$

Sommando la prima e la terza, tenendo conto della seconda, si ottiene

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_3}{q'} = \frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R} \quad ,$$

che costituisce l'equazione cercata. Si nota subito che le distanze focali anteriore e posteriore non sono eguali, bensì $f_1/f_2 = n_1/n_3$.

Il sistema delle due lenti obbedisce alle equazioni:

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_3}{q} = \frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R} \qquad \frac{n_3}{q} = \frac{2 - n_3}{40}$$

$$p' = t - q \quad \underset{(p = +\infty)}{\Rightarrow} \quad p' = 50 - q$$

$$\frac{n_3}{p'} + \frac{n_1}{q'} = \frac{2n_2 - n_1 - n_3}{R'} \qquad \frac{n_3}{p'} + \frac{1}{6.2} = \frac{2 - n_3}{20}$$

essendosi utilizzati i simboli p e q per la prima lente, p' e q' per la seconda e i valori numerici del testo. Sviluppando

$$q = \frac{40n_3}{2 - n_3} \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{100 - 90\, n_3}{2 - n_3} \quad , \quad p' = -\frac{124n_3}{7.6 + 6.2\, n_3} \quad .$$

Eguagliamo le due espressioni di p' e otteniamo $341n_3^2 - 92n_3 - 380 = 0$, che ammette una sola soluzione fisica, $n_3 = 1.2$.

14.21. ***Il sistema ottico di un microscopio è formato da un obiettivo di focale $f_1 = 1.2$ cm e da un oculare convergente di focale $f_2 = 5$ cm. Se l'oggetto dista $p = 1.4$ cm dall'obiettivo, calcolare la distanza tra le lenti e l'ingrandimento visuale totale.***

L'immagine dell'oggetto data dall'obiettivo deve cadere nel piano focale anteriore dell'oculare (vedi problema 14.19: così per ogni punto dell'immagine esce dall'oculare un fascio di raggi paralleli). Dall'equazione dell'obiettivo $1/p + 1/q = 1/f_1$ con $p = 1.4$ cm e $f_1 = 1.2$ cm si ricava $q = 8.4$ cm; la distanza tra le lenti è quindi $q + f_2 = 13.4$ cm.

Lo schema del microscopio con questi numeri è riportato in figura. Se l'oggetto è alto y l'angolo visuale è dato da $\mathrm{tg}\,\alpha = y/d = y/25$ se d è la distanza di visione distinta (25 cm) e y è espresso in centimetri. Con l'aiuto del microscopio l'angolo sotto cui è visto l'oggetto diviene $\mathrm{tg}\,\beta = -y'/f_2$ per cui l'ingrandimento visuale (14.17) è

$$V = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -\frac{y'}{y}\,\frac{d}{f_2} = -I_1 V_2 \quad ,$$

dove I_1 è l'ingrandimento trasversale dell'obiettivo e V_2 l'ingrandimento visuale dell'oculare. Il segno meno, derivante dal fatto che α e β hanno segno opposto, indica che l'immagine è capovolta.

È evidente il miglioramento apportato dall'aggiunta dell'obiettivo rispetto alla lente di ingrandimento (paragrafo 14e.) che in pratica consta solo dell'oculare: prima di essere vista attraverso l'oculare l'immagine dell'oggetto è ingrandita dall'obiettivo (per cui conviene che p sia di poco maggiore di f_1).

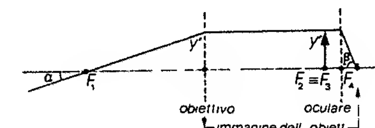
Nel caso proposto, in modulo, $V = (q/p)\,(d/f_2) = 30$.

In un microscopio reale l'obiettivo e l'oculare sono sistemi complessi di lenti corrette per le aberrazioni; il principio di funzionamento è però quello qui delineato.

14.22. ***Un telescopio astronomico è costituito da due lenti convergenti, l'obiettivo e l'oculare, il primo di focale $f_1 = 100$ cm, il secondo di focale $f_2 = 10$ cm. Calcolare la distanza tra le lenti e l'ingrandimento visuale del telescopio; determinare inoltre dove si forma l'immagine dell'obiettivo data dall'oculare e di quanto è ingrandita trasversalmente.***

La luce proviene praticamente da infinito, con angoli tra zero e α, e l'immagine data dall'obiettivo si forma nel suo piano focale posteriore; questo deve coincidere col piano focale anteriore dell'oculare, per cui la distanza tra le lenti, ovvero la lunghezza del telescopio, è $f_1 + f_2 = 110$ cm. Dalla figura si deduce che l'angolo visuale α si calcola da $\mathrm{tg}\,\alpha = y'/f_1$, mentre l'angolo sotto cui l'immagine è vista dall'occhio si ricava da $\mathrm{tg}\,\beta = -y'/f_2$ (segno meno $\rightarrow$ immagine capovolta). Pertanto

$$V = -\frac{f_1}{f_2} = -10 \quad .$$



L'obiettivo del telescopio non è usato per ingrandire, ma semplicemente per formare un'immagine reale che viene guardata con l'oculare.

La posizione dell'immagine dell'obiettivo data dall'oculare si calcola dall'equazione $1/p + 1/q = 1/f_2$ con $p = f_1 + f_2$ e risulta $q = f_2(f_1 + f_2)/f_1 \simeq f_2$ essendo $f_1 \gg f_2$; l'ingrandimento $I = q/p$ è eguale a f_2/f_1. Numericamente

$$q = 11 \text{ cm} \quad , \quad I = 0.1 \quad .$$

Se la limitazione del fascio incidente è fatta con l'obiettivo, cioè se i raggi più estremi accettati sono quelli che passano vicino al bordo di questo, è allora evidente che conoscere dove si forma l'immagine dell'obiettivo e quanto è grande dà le dimensioni massime del fascio uscente in quel punto. Poiché d'altra parte l'occhio viene messo generalmente vicino al fuoco F_4, un confronto tra il diametro dell'immagine dell'obiettivo e quello della pupilla dell'occhio (1) indica quanta luce viene effettivamente utilizzata per la visione. Quando f_1,

(1) Diaframma ad apertura variabile, circondato dall'iride, posto tra la cornea e il cristallino, come diametro tipico si può assumere 2 mm

f_2 e diametro dell'obiettivo sono tali che il diametro del fascio uscente coincide con il diametro della pupilla, si è nelle condizioni di *ingrandimento normale*.

In un sistema ottico formato da molti elementi per stabilire quale lente o diaframma limiti di più il fascio incidente basta *riportarli nello spazio oggetti*: questo vuol dire considerare ciascuna particolare apertura come immagine rispetto al sistema ottico costituito da tutti gli elementi che stanno alla sua sinistra e calcolare la posizione e le dimensioni dell'oggetto corrispondente. La più piccola di queste aperture oggetto, nel senso di essere quella vista sotto l'angolo minore dall'oggetto luminoso che si vuole guardare, si dice *pupilla di entrata* e la sua immagine data dal sistema si dice *pupilla di uscita*. Nel nostro esempio la pupilla di entrata è l'obiettivo stesso e la pupilla di uscita la sua immagine data dall'oculare. In un sistema complesso è la pupilla di uscita che va confrontata con la pupilla dell'occhio.

Il sistema ottico descritto è detto *cannocchiale di Keplero*; il fatto di capovolgere le immagini lo rende più adatto ad usi astronomici che terrestri.

14.23. ***In un cannocchiale di Keplero (problema* 14.22*) l'oculare ha focale* $f_2 = 7$ cm *mentre l'obiettivo può avere tre focali diverse,* 70, 49 *o* 28 cm*; immediatamente prima dell'obiettivo c'è un diaframma che funge da pupilla d'entrata e il cui diametro è* $d = 14$ mm. *Assumendo per la pupilla dell'occhio un diametro* $d_0 = 2$ mm, *calcolare nei tre casi qual è l'illuminazione media dell'immagine retinica rispetto all'osservazione ad occhio nudo.***

Ricordando i risultati del problema 14.22 e chiamando d' il diametro della pupilla di uscita, compiliamo la seguente tabella

f_1(cm)	f_2(cm)	V	d(mm)	$I(d)$	d'(mm)	d_0(mm)
70	7	10	14	1/10	1.4	2.0
49	7	7	14	1/7	2.0	2 0
28	7	4	14	1/4	3.5	2.0

Se l'occhio raccoglie senza strumento una certa quantità di luce che viene distribuita sull'immagine retinica, con lo strumento la luce raccolta è $(d/d_0)^2$ volte superiore. Questa entra tutta o in parte nell'occhio a seconda del rapporto tra d' e d_0: precisamente, se $d' \leq d_0$ entra tutta, se $d' > d_0$ ne entra la percentuale $(d_0/d')^2$ per cui la luce raccolta è $(d/d_0)^2\ (d_0/d')^2 = (d/d')^2$ volte superiore. Questa luce si distribuisce su un'area che è V^2 volte maggiore di quella della visione ad occhio nudo; la conclusione sull'illuminazione media dell'immagine si ha dal confronto tra i valori della quantità di luce entrante nell'occhio e della superficie dell'immagine retinica, con riferimento all'occhio nudo. Pertanto:

	luce raccolta	luce entrante nell'occhio	area	illuminamento medio
occhio nudo	1	1	1	1
$d' < d_0$	49	49	100	0.49
$d' = d_0$	49	49	49	1
$d' > d_0$	49	16	16	1

L'uso dello strumento non porta dunque alcun vantaggio per quel che riguarda l'illuminazione media. Conviene scartare la terza possibilità e porsi in condizioni di ingrandimento normale ($d' = d_0$) oppure nel primo caso in cui la diminuzione di illuminazione è compensata dal maggior ingrandimento. Quest'ultima è una situazione che si realizza talvolta nei microscopi: potendosi utilizzare una forte illuminazione del preparato e quindi dell'occhio, si adotta una pupilla di uscita molto piccola, il che corrisponde a ingrandimento visuale molto grande.

Il risultato trovato sull'illuminazione media non è vero solo per il particolare strumento considerato, ma è vero in generale; inoltre si dimostra che è vero punto per punto oltre che in media, sempre che si tratti di oggetti estesi (¹). Quando invece l'oggetto da esaminare e la sua immagine sono puntiformi, come avviene per una stella, allora il fatto fondamentale è la raccolta complessiva di luce: l'uso di uno strumento porta ad un miglioramento proporzionale a $(d/d_0)^2$.

14.24. ***Per calcolare il potere risolutivo dell'occhio si supponga che la deviazione dei raggi avvenga solo sulla cornea (le variazioni di indice di rifrazione oltre di essa sono piccole). Il diametro della pupilla è*** $2R = 2$ **mm** ***e la distanza della pupilla dalla retina è*** $t = 25$ **mm*; l'indice di rifrazione a sinistra della cornea è*** $n_1 = 1$, ***a destra è*** $n_2 = 1.34$. ***Determinare qual è la distanza minima tra due punti ancora distinguibili dall'occhio, quando essi siano alla distanza di visione distinta (*****25 cm*****); la luce usata abbia*** $\lambda = 550$ **mm.**

La limitazione dei fasci luminosi avviene a livello della pupilla; noto il suo raggio la (14.18) si scrive, tenuto conto che l'immagine si forma nell'umore vitreo,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0.61\lambda}{n_2 R} = 0.25 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 0.25 \cdot 10^{-3}\ \text{rad} = 0.014° \quad .$$

I dischetti di diffrazione hanno un diametro pari a $2t\theta = 12.5$ μm, per cui la condizione di risoluzione di Rayleigh richiede come distanza tra il centro di uno e il bordo dell'altro ~ 6.3 μm. Il potere risolutivo angolare, secondo (14.19), è

(¹) A Rostagni, Fisica Generale, UTET 1978, Vol II, pg 570 e seguenti

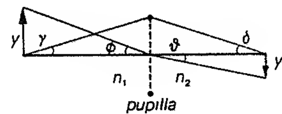
$$\varrho = \frac{1}{\theta} = 4 \cdot 10^3 \ \text{rad}^{-1} \quad .$$

Si noti che questi valori dipendono esclusivamente dai parametri interni dell'occhio; essi sono calcolati con luce gialla, ma cambiano poco entro lo spettro visibile.

Vediamo ora di calcolare qual è la corrispondente distanza minima tra due punti, posti a 25 cm dall'occhio, affinché siano visti distinti. Allo scopo basta usare la formula (14.14) che dà l'ingrandimento di un diottro, con $p = 25$ cm, $q = 2.5$ cm, $y' = 6.3$ μm, $n_2 = 1.34$, e si trova $y = 84.4$ μm. La separazione minima risulta, in questo modello semplificato, di circa un decimo di millimetro alla distanza della visione distinta. In effetti ciò corrisponde ai risultati sperimentali.

In figura è riportato un disegno schematico con le dimensioni trasversali degli oggetti e gli angoli sottesi dal centro della pupilla. Poiché $n_1 \operatorname{sen}\phi = n_2 \operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{sen}\theta = 0.61\ \lambda/n_2 R$, risulta

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{0.61\,\lambda}{n_1 R} = 0.34 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \quad \phi = 0.34 \cdot 10^{-3} \ \text{rad} = 0.019° \quad .$$

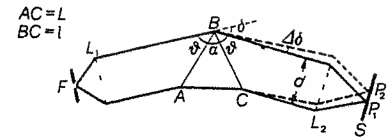
Due punti nello spazio oggetti per essere distinti devono essere visti sotto un angolo che valga almeno ϕ. Se la distanza è 25 cm si ritrova 85 μm, se è 1 Km si ottiene 34 cm e così via.

Più in generale si dimostra che la minima distanza nello spazio oggetti, di indice di rifrazione n_1, a cui devono trovarsi due punti per essere separati da uno strumento con pupilla di entrata di raggio R, è direttamente proporzionale alla lunghezza d'onda e inversamente all'*apertura numerica* dello strumento (definita come il prodotto di n_1 per il seno dell'angolo sotto cui dall'oggetto è visto il raggio della pupilla):

$$y = \frac{0.61\,\lambda}{n_1 \operatorname{sen}\gamma} \quad .$$

All'inverso di y si dà il nome di *potere risolutivo lineare* σ.

14.25. ***La luce proveniente da una sottile fenditura F illuminata, posta nel piano focale di una lente L_1, attraversa un prisma di base L e angolo al vertice α che la devia, e successivamente una lente L_2 che dà della fenditura un'immagine nel proprio piano focale; il diametro di L_2 è d e la superficie di L_2 viene tutta utilizzata (vedi figura). Poiché il materiale di cui è fatto il prisma è dispersivo, se il fascio non è monocromatico radiazioni di lunghezza d'onda diversa sono focalizzate in punti diversi. Supponendo di operare in condizioni di minima deviazione δ, calcolare la dispersione angolare $D = d\delta/d\lambda$ e il potere risolutivo $R = \lambda/\Delta\lambda$ del prisma.***



Ricordiamo dal problema 14.6 che l'angolo di deviazione minima δ di un prisma è dato da

$$\operatorname{sen}\frac{\delta + \alpha}{2} = n \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(a)}$$

se n è l'indice di rifrazione. Lasciamo come esercizio il provare che in condizioni di deviazione minima il fascio di luce si mantiene parallelo alla base L nell'attraversare il prisma. Differenziando la (a) si ottiene

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos\dfrac{\delta+\alpha}{2}} \; \frac{dn}{d\lambda} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Ma $\delta + \alpha = \pi - 2\theta$, $\cos\dfrac{\delta+\alpha}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{d}{l}$, mentre

$\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{L}{2l}$ per cui

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{L}{d}\frac{dn}{d\lambda} \quad . \qquad \text{(c)}$$

D prende il nome di *dispersione angolare* del prisma e gioca lo stesso ruolo della dispersione del reticolo di diffrazione (problema 13.13).

Calcoliamo adesso il potere risolutivo. La radiazione di lunghezza d'onda λ ha come immagine sullo schermo S una riga luminosa di larghezza angolare determinata dalla diffrazione prodotta dalla lente, supponendo che questa si comporti come una fenditura di larghezza d· quindi $\Delta\phi = 2\lambda/d$. Un'altra radiazione con $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ dà una riga ancora larga $\Delta\phi$. se $\Delta\lambda$ è piccola, separata dalla precedente di $\Delta\delta = (L/d)\ (dn/d\lambda)\ \Delta\lambda$. Per il criterio di Rayleigh le due figure si possono considerare distinte solo se $\Delta\delta = \Delta\phi/2 = \lambda/d$. Eguagliando le due espressioni di $\Delta\delta$ si ha che il potere risolutivo vale

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = L\,\frac{dn}{d\lambda} \quad . \qquad \text{(d)}$$

Sia D che R dipendono dalla forma della funzione $n(\lambda)$ Nella maggior parte delle sostanze utilizzate in ottica l'indice di rifrazione è una funzione decrescente della lunghezza d'onda che si rappresenta abbastanza bene con la formula di Cauchy

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \qquad \text{(e)}$$

essendo A e B costanti.

14.26. *La fenditura di uno spettrometro a prisma come quello descritto nel problema 14.25 è illuminata con una sorgente contenente le lunghezze d'onda $\lambda_1 = 589.0$ nm e $\lambda_2 = 589.6$ nm. Il prisma è equilatero ed è costituito da un vetro con $n(\lambda_1) = 1.57$ e $(dn/d\lambda)_{\lambda_1} = 10^3$ cm^{-1}; la focale della lente L_2 è $f = 100$ cm. Nel piano focale di L_2 è posta una lastra su cui vengono fotografate le righe prodotte per dispersione dal prisma. Si opera in condizioni di minima deviazione e si desidera che le due righe vengano risolte. Determinare il lato L del prisma, l'apertura d della lente, la separazione angolare e quella lineare sulla lastra delle due righe. Determinare inoltre quante incisioni per centimetro e quante in totale dovrebbe avere un reticolo di diffrazione per presentare la stessa risoluzione e per avere lo spettro del prim'ordine ad angolo eguale a quello di deviazione minima del prisma.*

Il potere risolutivo richiesto è $R = \lambda/\Delta\lambda \simeq 10^3$ e quindi il lato L del prisma, per la (d) del problema 14.25, deve valere $L = R/(dn/d\lambda) = 1$ cm. Dalla (b) possiamo invece ricavare la dispersione angolare:

$$\text{sen}\,\frac{\delta+\alpha}{2} = n\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = 1.57\,\text{sen}\,30° = 0.785$$

$$\Rightarrow \quad \delta = 43.44° \;,\; \cos\frac{\delta+\alpha}{2} = 0.619 \;,\; D = 1.62 \cdot 10^3\,\frac{\text{rad}}{\text{cm}} \quad .$$

Nota la dispersione la (c) permette di calcolare l'apertura della lente:

$$d = \frac{L}{D}\,\frac{dn}{d\lambda} = 0.62 \text{ cm}$$

Infine $\Delta\delta = D\Delta\lambda = 9.7 \cdot 10^{-5}$ rad e $\Delta z = f\Delta\delta = 9.7 \cdot 10^{-3}$ cm $\simeq 100$ µm.

Ricordiamo che in un reticolo di diffrazione con N fenditure in totale il potere risolutivo all'ordine K è $R = KN$ e che lo spettro di ordine K si ottiene ad un angolo di deviazione dato da $p\,\text{sen}\,\delta = K\lambda$ essendo p il passo del reticolo Il reticolo equivalente dovrebbe quindi avere passo $p = \lambda/\text{sen}\,\delta = 0.86$ µm e un numero di fenditure per centimetro pari a $1/p = 11.7 \cdot 10^3$. Da $R = KN$ con $K = 1$ e $R = 10^3$ risulta $N = 10^3$ per cui la larghezza totale sarebbe appena $Np = 0.86$ mm. Se invece il reticolo fosse largo quanto la base del prisma il suo potere risolutivo al prim'ordine sarebbe $\sim 10^4$, di un ordine di grandezza migliore di quella del prisma.

14.27. *L'atomo di idrogeno, opportunamente eccitato, emette uno spettro di righe; tra queste ce n'è una serie, scoperta da Balmer, che sta nel visibile ed è descritta dalla formula*

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \tag{a}$$

λ è la lunghezza d'onda, R_H una costante detta di Rydberg, n un numero intero che può assumere i valori 3, 4, 5, ... ; se λ è espressa in centimetri $R_H = 1.097 \cdot 10^5$ cm^{-1}. In particolare per $n = 3$ si ottiene la riga H_α ($\lambda_\alpha = 656.3$ nm) e per $n = 4$ la riga H_β ($\lambda_\beta = 486.1$ nm). Anche il deuterio, un isotropo dell'idrogeno con numero di massa 2, eccitato allo stesso modo dell'idrogeno, emette uno spettro di righe con una serie nel visibile descritta dalla

$$\frac{1}{\lambda} = R_D\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad . \tag{b}$$

Il valore di R_D è tale che la riga D_β ottenuta con $n = 4$ differisce dalla corrispondente H_β di 0.13 nm. Supposto che eccitando l'idrogeno si voglia mettere in evidenza l'esistenza del deuterio separando la riga D_β dalla H_β, calcolare il valore del lato di un prisma equilatero capace di risolvere le due righe operando in condizioni di minima deviazione e sapendo che l'indice di rifrazione del vetro usato varia così con λ:

λ(nm)	546.1	589.3	643.8
n	1.6546	1.6499	1.6434

Calcolare inoltre quante righe per centimetro e quante in totale deve avere un reticolo per dare la stessa risoluzione e lo stesso angolo di deviazione nello spettro del secondo ordine.

Il potere risolutivo del prisma dipende da $dn/d\lambda$; determiniamo $n(\lambda)$ calcolando le costanti A e B della formula (e) del problema 14.25 usando i dati del problema. Per esempio sostituiamo il primo e il terzo dato ottenendo il sistema

$$1.6546 = A + B/(0.5461)^2 \quad , \quad 1.6434 = A + B/(0.6438)^2$$

$$\Rightarrow \quad A = 1.6148 \quad , \quad B = 1.191 \cdot 10^{-2}\ \mu\text{m}^2$$

$$\Rightarrow \quad n = 1.6148 + \frac{1.191 \cdot 10^2}{\lambda^2} \quad (\lambda \text{ in } \mu\text{m}) \quad . \tag{c}$$

Per avere un'idea del grado di precisione di questa formula calcoliamo n per $\lambda = 0.5893$ µm; otteniamo $n = 1.6491$ con un errore relativo di $5 \cdot 10^{-4}$.

Applichiamo la (c) alla riga H_β:

$$n = 1.6652 \;,\; \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda_\beta} = -\frac{2B}{\lambda_\beta^3} = -0.2074\ \mu\text{m}^{-1} = -2.074 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1} \quad .$$

Il potere risolutivo è $R = \lambda/\Delta\lambda = 486.1/0.13 = 3.74 \cdot 10^3$ e quindi, secondo la (d) del problema 14.25, la base del prisma deve valere (almeno)

$$L = \frac{R}{|dn/d\lambda|} = 1.80 \text{ cm} \quad .$$

Dalla (a) dello stesso problema si ricava $\delta(H_\beta) = 52.73°$. Ne segue per il passo del reticolo $p = 2\lambda_\beta/\text{sen}\,\delta = 1.2$ µm; le fenditure per centimetro sono $1/p = 8.3 \cdot 10^3$. Il numero totale di fenditure è $N = R/2 = 1870$.

È stato proprio attraverso la separazione delle righe H_β e D_β con uno spettrometro a reticolo di diffrazione che nel 1932 è stato messo in evidenza il deuterio. È interessante il procedimento con cui, attraverso misure di lunghezza d'onda, ne è stata determinata la massa.

Nella teoria di Bohr la costante di Rydberg è proporzionale alla massa ridotta del sistema elettrone-nucleo; nei due casi dell'idrogeno e del deuterio

$$\mu_H = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad , \quad \mu_D = \frac{m_e m_d}{m_e + m_d} \quad .$$

Pertanto, dalla (a) e dalla (b) si ottiene:

$$\frac{1}{\lambda^H_\beta} = K\mu_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda^H_\beta = \frac{16}{3Km_e}\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) \quad ,$$

$$\frac{1}{\lambda^D_\beta} = K\mu_D\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda^D_\beta = \frac{16}{3Km_e}\left(1 + \frac{m_e}{m_d}\right) \quad ,$$

$$\frac{\lambda^H_\beta - \lambda^D_\beta}{\lambda^H_\beta} = \frac{m_e/m_p - m_e/m_d}{1 + m_e/m_p} = \frac{0.13}{486.1} = 2.67 \cdot 10^{-4}$$

Siccome $m_e/m_p = 1/1836$ si ricava $m_e/m_d \sim 1/3600$. Già da questo valore si vede che $m_d \sim 2m_p$: essendo il nucleo del deuterio costituito da un protone e da un neutrone ciò vuol dire che il neutrone ha circa la stessa massa del protone. Misure più precise danno $m_e/m_d = 1/3670$: la massa del nucleo di deuterio risulta così appena inferiore alla somma delle masse del protone e del neutrone (determinata per altra via); la differenza corrisponde all'energia di legame tra protone e neutrone, pari a ~ 2.2 MeV.

La corrispondenza tra il risultato sperimentale della separazione tra λ^H_β e λ^D_β e il valore previsto dalla teoria di Bohr ha costituito per questa una delle verifiche più importanti.

* * *

CAPITOLO 15

RADIAZIONE TERMICA DEI SOLIDI

15a. Quando un'onda elettromagnetica incide sulla superficie di un corpo hanno origine vari processi Detto H l'*irraggiamento*, cioè l'energia che interessa una superficie unitaria nell'unità di tempo, una parte aH viene assorbita, una parte tH viene trasmessa e una parte rH viene riflessa se la superficie è speculare oppure diffusa in tutte le direzioni La conservazione dell'energia richiede $H = aH + tH + rH$ e quindi i *coefficienti di assorbimento a*, di *trasmissione t* e di *diffusione r* soddisfano alla relazione

$$a + t + r = 1 \quad . \tag{15.1}$$

La parte assorbita aH va ad aumentare l'energia interna degli atomi; è noto d'altra parte che un corpo ad una certa temperatura irradia, ovvero emette radiazioni elettromagnetiche attraverso la sua superficie. L'energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie si chiama *potere emissivo* W; in condizioni di equilibrio la temperatura del corpo rimane costante e sussiste la relazione

$$W = aH \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{a} = H \quad ; \tag{15.2}$$

l'energia emessa dal corpo eguaglia quella assorbita. Dalla (15.2) si possono trarre le seguenti conclusioni

1) Poiché l'irraggiamento non dipende dal corpo che riceve e assorbe l'energia, il rapporto W/a è indipendente dalla natura del corpo ed è quindi lo stesso per tutti i corpi alla stessa temperatura.

2) Tale rapporto costante, diciamolo W_{cn}, è eguale al potere emissivo di un corpo che abbia coefficiente di assorbimento eguale a uno ($a = 1 \rightarrow r = t = 0$); questo corpo si chiama *corpo nero* ed è caratterizzato dall'avere il potere emissivo massimo. Infatti, per un corpo generico,

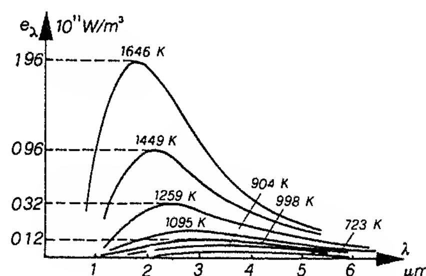
$$W = aW_{cn} \tag{15.3}$$

ed essendo $a < 1$, anche $W < W_{cn}$ La (15.3) mostra dunque che, note le caratteristiche dell'emissione del corpo nero, si conoscono quelle di tutti i corpi di cui sia noto il coefficiente di assorbimento. Spesso nella (15.3) al posto di a si scrive e, detto coefficiente di emissione o *emissività*; è sempre la stessa grandezza, una volta riferita al processo assorbitivo e una volta a quello emissivo.

3) A parità di irraggiamento maggiore è l'energia che viene assorbita, maggiore è quella che viene emessa Si vede inoltre che un corpo è capace di assorbire tutte le radiazioni che è capace di emettere (ma non viceversa!)

Le (15.2) e (15.3) sono note come *legge di Kirchhoff.*

15b. Nello spettro delle radiazioni elettromagnetiche emesse da un corpo nero sono presenti con continuità tutte le lunghezze d'onda tra zero e infinito. Nella figura sono riportati gli spettri di emissione di un corpo nero per diverse



temperature. In ordinata compare il *potere emissivo specifico* definito come

$$w_{\lambda,T} = \frac{dW_{cn}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\Delta W_{cn}}{\Delta\lambda} \quad ; \tag{15.4}$$

è l'energia emessa da un corpo nero per unità di tempo e di superficie e per intervallo unitario di lunghezza d'onda (la definizione si estende ovviamente a qualunque altro corpo). Le curve, dedotte sperimentalmente, hanno un'espressione analitica data dalla *legge di Planck*:

$$w_{\lambda,T} = \frac{c_1\lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \quad , \tag{15.5}$$

$$c_1 = 2\pi hc^2 = 3.74 \cdot 10^{-16}\ \text{Wm}^2 \quad ,$$

$$c_2 = \frac{hc}{K} = 1.44 \cdot 10^{-2}\ \text{mK}$$

La lunghezza d'onda è espressa in metri, la temperatura in Kelvin, il potere emissivo specifico in W/m^3; h è la costante di Planck, $6.63 \cdot 10^{-34}$ Js, K la costante di Boltzmann, $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K, c la velocità della luce nel vuoto, $3 \cdot 10^8$ m/s. Dalla (15.5) si deducono le seguenti leggi.

1) *Prima legge di Wien* (dello spostamento).
Riguarda l'ascissa λ_m del massimo della curva di $w_{\lambda,T}$ e stabilisce che

$$\lambda_m T = 0.29 \cdot 10^{-2}\ \text{mK} \quad . \tag{15.6}$$

Al crescere della temperatura la lunghezza d'onda corrispondente al massimo si sposta verso valori minori, in modo inversamente proporzionale a T.

2) *Seconda legge di Wien* (potere emissivo specifico massimo).
Riguarda l'ordinata $(w_{\lambda,T})_m$; precisamente

$$(w_{\lambda,T})_m = 12.2 \cdot 10^{-6} T^5 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \quad . \tag{15.7}$$

3) *Legge di Stefan-Boltzmann* (potere emissivo)
Riguarda l'area racchiusa da una curva a T costante, ottenibile per integrazione dalla (15.5):

$$W_{cn} = \int_0^\infty w_{\lambda,T}\, d\lambda = \sigma T^4 \quad , \tag{15.8}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 K^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4} \quad \textit{costante di Stefan-Boltzmann.}$$

Da (15.3-15.8) segue che il potere emissivo di un corpo ordinario si può scrivere

$$W = a\sigma T^4 = e\sigma T^4 \quad . \tag{15.9}$$

15c. Le dimensioni delle nuove grandezze introdotte in questo capitolo sono:

irraggiamento	H	W/m^2 ,
potere emissivo	W	W/m^2 ,
potere emissivo specifico	$w_{\lambda,T}$	W/m^3 .

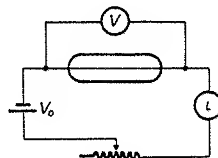
I coefficienti a, e, r, t sono adimensionali. Si faccia attenzione al fatto che nelle formule citate la temperatura deve essere espressa in Kelvin.

* * *

15.1. ***Un filo metallico annerito, di lunghezza $l = 100$ cm e diametro $d = 0.01$ cm, è posto lungo l'asse di un tubo di vetro, nel quale è fatto il vuoto. Il filo è collegato ad un generatore V_0 tramite un reostato. Si aumenta gradualmente la corrente finché, quando il filo è quasi alla fusione, si legge sugli strumenti $V = 40$ V, $I = 6$ A. Assumendo che tutta l'energia venga irradiata, che la radiazione del tubo sia trascurabile e che il coefficiente di assorbimento del filo possa essere in pratica considerato eguale a uno, calcolare la temperatura di fusione T del metallo.***

Alla fusione la potenza dissipata vale $P = VI = 240$ W e viene interamente assorbita dagli atomi che costituiscono il filo metallico per essere emessa attraverso la superficie sotto forma di radiazioni elettromagnetiche. Il potere emissivo del filo vale:

$$W = \frac{P}{\pi d l} = 76.4 \cdot 10^4 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \quad .$$



Poiché $a = 1$ il filo è assimilabile a un corpo nero e dalla (15.8) ricaviamo:

$$T = \left(\frac{W}{\sigma}\right)^{1/4} = 1916 \ \mathrm{K} \quad .$$

15.2. ***Una sferetta di tungsteno ($a = 0.35$) di raggio $r = 1$ cm è sospesa al centro di un grande recipiente cavo, che la circonda completamente; sia il recipiente che la sferetta sono alla stessa temperatura $t = 1727$°C. Calcolare nell'unità di tempo l'energia che arriva sulla sferetta e quella che da essa viene assorbita.***

In condizioni di equilibrio vale la (15.2) con W dato dalla (15.9), pertanto $H = \sigma T^4$. L'irraggiamento della cavità sulla sferetta di tungsteno non dipende né dalla natura del corpo né da quella delle pareti del recipiente, ma solo da T. La potenza P che arriva su tutta la sferetta è

$$P = \Sigma H = \Sigma \sigma T^4 = 4\pi r^2 \sigma T^4 = 1.14 \cdot 10^3 \ \mathrm{W} \quad .$$

Di questa viene assorbita la parte $aP = 400$ W mentre la parte $P - aP = (1 - a)P = rP = 740$ W viene diffusa dalla superficie della sferetta, che è opaca ($t = 0$), e raggiunge necessariamente le pareti del recipiente Il coefficiente r vale $1 - a = 0.65$. Sempre per (15 2) i 400 W assorbiti sono anche emessi dalla sferetta e ritornano alle pareti del recipiente, chiudendo in pari il bilancio energetico.

Il risultato è vero anche per un corpo di forma non sferica, purché la superficie sia ovunque convessa; tale condizione assicura che l'energia irradiata da un punto della superficie non può mai raggiungere un altro punto della stessa.

15.3. ***Una sferetta di tungsteno ($a = 0.35$) di raggio $r = 1$ cm è sospesa al centro di un grande recipiente cavo che la circonda completamente e che si trova a una temperatura $T_0 = 300$ K. Determinare la potenza richiesta per mantenere la sferetta ad una temperatura $T = 2000$ K.***

La situazione fisica è diversa da quella del problema 15.2 in quanto si desidera mantenere la sferetta a una temperatura T diversa da quella T_0 del grande recipiente cavo che la contiene. Però, il fatto che il corpo sia piccolo rispetto alle dimensioni del recipiente implica che le condizioni di emissione di radiazioni elettromagnetiche da parte delle pareti di questo non siano praticamente alterate, anche se $T \gg T_0$. L'irraggiamento da parte della cavità vale $H = \sigma T_0^4$ (vedi problema 15.2) e l'energia assorbita per unità di tempo dalla sferetta vale $a\Sigma\sigma T_0^4$ con $\Sigma = 4\pi r^2$. Il potere emissivo della sferetta è dato da (15.9) e l'energia emessa per unità di tempo da tutta la superficie vale $\Sigma W = a\Sigma\sigma T^4$. L'emissione netta, differenza tra la potenza emessa e quella assorbita, risulta in conclusione

$$P_e - P_a = a\Sigma\sigma(T^4 - T_0^4) = 400 \ \mathrm{W} \quad . \qquad \text{(a)}$$

È questa la potenza che bisogna fornire alla sfera se si vuole mantenerla alla temperatura T. Nel calcolo è stato trascurato il termine $a\Sigma\sigma T_0^4$ che corrisponde all'irraggiamento da parte del recipiente cavo. in effetti $a\Sigma\sigma T_0^4 / a\Sigma\sigma T^4 = (T_0/T)^4 = 5 \cdot 10^{-4}$. Quindi, se un corpo a temperatura elevata è immerso in un ambiente a temperatura ordinaria, l'irraggiamento da parte dell'ambiente non può supplire alla perdita di energia del corpo per irraggiamento.

Se $\Delta T = T - T_0$ è piccolo, sviluppando T^4 in serie di Taylor nell'intorno di T_0 e arrestandosi al primo termine, si ottiene

$$T^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T \quad \Rightarrow \quad P_e - P_a = 4a\Sigma\sigma T_0^3 \Delta T \quad .$$

A parità di ΔT la dissipazione di energia per irraggiamento varia con la terza potenza della temperatura dell'ambiente, fissata invece T_0 la dissipazione è proporzionale a ΔT.

15.4. ***Una sfera ($a = 1$, $\Sigma = 50$ cm²) si trova in un ambiente a temperatura $t_0 = 20$°C. Dall'esame dello spettro di emissione di questa sfera, che si trova a temperatura T, si constata che il massimo del potere emissivo specifico si ha per $\lambda_m = 0.7$ μm. Determinare la potenza richiesta per mantenere la sfera alla temperatura T e il valore massimo di $w_{\lambda,T}$.***

La temperatura T della sfera si ricava da (15.6):

$$T = \frac{0.29 \cdot 10^{-2}}{\lambda_m} = 4143 \ \mathrm{K} \quad ;$$

si noti l'alto valore di T necessario per avere il massimo ai limiti dello spettro visibile. Il potere emissivo specifico massimo si ottiene da (15.7):

$$(w_{\lambda,T})_m = 12.2 \cdot 10^{-6} \ T^5 = 1.49 \cdot 10^{13} \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3} \quad .$$

La potenza richiesta si ricava dalla (a) del problema 15.3 con $a = 1$:

$$P = \Sigma\sigma(T - T_0)^4 \simeq \Sigma\sigma T^4 = 8.35 \cdot 10^4 \ \mathrm{W}$$

15.5 ***Dall'analisi spettrale della radiazione solare si ricava che il massimo del potere emissivo specifico si ha per $\lambda_m = 0.55$ μm. Trattando il sole come un corpo nero stimare la temperatura T della superficie solare e il raggio del sole R; si sa che l'intensità della radiazione sulla terra è $I = 1.53 \cdot 10^3$ W/m² e che la distanza terra-sole è $r = 1.5 \cdot 10^{11}$ m.***

Dalla (15.6) $T = 0.29 \cdot 10^{-2}/\lambda_m = 5273$ K Il potere emissivo del sole è $W = \sigma T^4 = 4.38 \cdot 10^7$ W/m² e la potenza totale emessa è $P = 4\pi R^2 W$ A distanza r questa potenza è distribuita su una superficie $4\pi r^2$ con una intensità che poniamo eguale a quella misurata sulla terra; quindi

$$4\pi R^2 W = 4\pi r^2 I \Rightarrow R = \left(\frac{I}{W}\right)^{1/2} r = 8.87 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Da misure astronomiche si sa che $R = 6.96 \cdot 10^8$ m e la stima risulta così abbastanza buona Utilizzando il valore astronomico di R e procedendo a ritroso si troverebbe per la temperatura della superficie solare il valore 5950 K e λ_m dovrebbe valere 0.49 μm Il calcolo esposto è quindi troppo semplificato e può servire solo per dare gli ordini di grandezza

15.6. ***Un cilindro metallico, di altezza $h = 10$ cm e raggio $r = 2.5$ cm, ha la superficie esterna annerita ($a = 1$) e contiene elio liquido alla temperatura di ebollizione $T = 4.2$ K; la base superiore ha un piccolo foro attraverso cui si può versare l'elio. Il cilindro è posto in una cavità con le pareti mantenute alla temperatura dell'aria liquida $T_0 = 78$ K. Sapendo che il calore di vaporizzazione dell'elio è $c = 20.9 \cdot 10^3$ J/Kg, calcolare quanto elio si perde all'ora attraverso il foro per effetto dell'irraggiamento.***

Pur essendo in condizioni diverse da quelle del problema 15.3, in quanto là il corpo dentro la cavità veniva mantenuto ad una temperatura molto alta rispetto a quella delle pareti, mentre ora il cilindro contenente l'elio è ad una temperatura inferiore rispetto alle pareti, possiamo ancora fare uso della (a) di quel problema specificando il significato dei simboli

L'irraggiamento da parte delle pareti della cavità, alla temperatura T_0. sul cilindro vale $H = \sigma T_0^4$ e la potenza assorbita dal cilindro annerito ($a = 1$) è $\Sigma H = \Sigma\sigma T_0^4$ con $\Sigma = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$, area della superficie totale del cilindro. La potenza emessa dal cilindro alla temperatura T vale $\Sigma W = \Sigma\sigma T^4$ e la potenza netta assorbita dal cilindro è $P = \Sigma\sigma(T_0^4 - T^4)$ Questa volta possiamo trascurare la potenza emessa ($T \ll T_0$) per cui

$$P = \Sigma\sigma T_0^4 = 2\pi r\ (r + h)\ \sigma T_0^4 = 4.12 \cdot 10^{-2}\ \text{W}$$

A seguito di questo assorbimento di energia l'elio evapora con la velocità

$$q = \frac{P}{c} = 1.97 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Kg}}{\text{s}} = 7.1\ \frac{\text{g}}{\text{h}}$$

15.7. ***Un crogiuolo chiuso di grafite a temperatura $t_1 = 27$°C è posto all'interno di un forno le cui pareti sono mantenute ad una temperatura $t_0 = 1727$°C. Trattando il crogiuolo come un corpo nero avente una superficie di area $\Sigma = 50$ cm², calcolare la potenza P inizialmente assorbita dal crogiuolo. Inoltre, se la massa del crogiuolo è $m = 100$ g e il calore specifico medio $c = 1.25$ J/g grado, calcolare in quanto tempo esso raggiunge la temperatura $t_2 = 100$°C.***

Per rispondere alla prima domanda utilizziamo i risultati del problema 15.6: la potenza assorbita dal crogiuolo e proveniente dall'irraggiamento da parte delle pareti è $\Sigma\sigma T_0^4 = 4.54 \cdot 10^3$ W; ancora una volta possiamo trascurare la potenza inizialmente emessa dal crogiuolo, $\Sigma\sigma T_1^4$, perché $T_1 \ll T_0$.

Anche la temperatura T_2 che interessa la seconda domanda è molto minore di T_0 per cui durante il processo di riscaldamento da T_1 a T_2 continuiamo a trascurare la potenza emessa dal crogiuolo e scriviamo l'energia netta assorbita nell'intervallo di tempo $d\tau$ come $dU = Pd\tau = \Sigma\sigma T_0^4 d\tau$ Se non ci sono altre possibilità di scambi di energia con l'esterno l'aumento di energia porta necessariamente a un aumento di temperatura in accordo col primo principio della termodinamica ($dL = 0$)

$$dU = \Sigma\sigma T_0^4 d\tau = dQ = mc\,dT \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{mc}{\Sigma\sigma T_0^4}\,dT$$

Integrando tra gli estremi T_1 e T_2 si ottiene

$$\tau = \frac{mc}{\Sigma\sigma T_0^4}\,(T_2 - T_1) = 2\text{s}$$

Finché la temperatura del crogiuolo resta molto più piccola di T_0 si ha una relazione lineare tra τ e T.

15.8. ***Una scatola cubica, di lato $l = 10$ cm, dalle facce annerite, viene riempita d'acqua ad una temperatura $t_1 = 60$°C e posta entro un grande recipiente cavo, che è mantenuto ad una temperatura molto vicina a $T_0 = 0$ K. Determinare il tempo τ necessario perché la temperatura dell'acqua diminuisca di 50°C.***

Dato l'annerimento delle pareti possiamo supporre, ai fini dell'irraggiamento, che il coefficiente di assorbimento sia eguale a uno. Pur essendo la situazione cavità-corpo scambiata rispetto al problema 15.7, possiamo certo procedere alla stessa maniera. Trascuriamo il termine $\Sigma\sigma T_0^4$ in quanto $T_0 \simeq 0$ e scriviamo l'energia emessa dalla scatola sotto forma di radiazioni elettromagnetiche nel tempo $d\tau$ come $dU = \Sigma\sigma T^4 d\tau$; la superficie Σ vale $6l^2$. Nello stesso intervallo di tempo $d\tau$ la temperatura dell'acqua, in equilibrio in ogni istante con le pareti della scatola, diminuisce di dT e, per il primo principio della termodinamica,

$$\Sigma\sigma T^4 d\tau = -mc\,dT \quad \Rightarrow \quad \tau = -\frac{mc}{\Sigma\sigma}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^4}$$

La massa dell'acqua è $m = 1$ Kg. il suo calore specifico $c = 4.18 \cdot 10^3$ J/Kg · grado, la superficie è $\Sigma = 6 \cdot 10^{-2}$ m² Sviluppiamo l'integrale

$$\tau = \frac{mc}{3\Sigma\sigma}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right) = 6.97 \cdot 10^3 \text{s} \simeq 1^h 56'$$

La perdita di energia per irraggiamento è piuttosto lenta, anche se le pareti della cavità sono quasi allo zero assoluto.

15.9. *Due superficie Σ_1 e Σ_2 opache, piane e parallele, sono poste a distanza piccola rispetto alle loro dimensioni lineari; essi si trovano alle temperature T_1 e T_2 e i loro coefficienti di emissione sono e_1 ed e_2. Calcolare l'energia trasmessa per irraggiamento da una superficie all'altra per unità di area e di tempo. Applicare il risultato alle pareti di un termos, ciascuna di area $\Sigma = 500$ cm², argentate con coefficiente di riflessione $r = 0.9$, calcolando quanta potenza è necessario fornire per mantenere nell'interno un liquido a temperatura $t_2 = 80$°C se l'ambiente esterno è a temperatura $t_1 = 20$°C.*

Essendo le superficie opache ($t_1 = t_2 = 0$) i loro coefficienti di riflessione, in base a (15 1), sono $r_1 = 1 - e_1$, $r_2 = 1 - e_2$ Detto H_1 l'irraggiamento su Σ_2 da parte di Σ_1, sappiamo che la percentuale $r_2 H_1 = (1 - e_2)H_1$ viene riflessa e ritorna verso Σ_1. Il potere emissivo di Σ_2 è $e_2\sigma T_2^4$ e quindi l'energia totale che arriva nell'unità di tempo sull'unità di area di Σ_1, cioè l'irraggiamento H_2 su Σ_1, è

$$H_2 = (1 - e_2)H_1 + e_2\sigma T_2^4 = H_1 + e_2(\sigma T_2^4 - H_1) \qquad \text{(a)}$$

Ragionando in maniera analoga l'irraggiamento H_1 su Σ_2 si scrive

$$H_1 = (1 - e_1)H_2 + e_1\sigma T_1^4 = H_2 + e_1(\sigma T_1^4 - H_2) \quad . \qquad \text{(b)}$$

Riordiniamo le (a) e (b) nelle incognite H_1 e H_2 e otteniamo·

$$H_1 = \frac{e_1\sigma T_1^4 + e_2\sigma T_2^4 - e_1 e_2\sigma T_2^4}{e_1 + e_2 - e_1 e_2} \quad ,$$

$$H_2 = \frac{e_1\sigma T_1^4 + e_2\sigma T_2^4 - e_1 e_2\sigma T_1^4}{e_1 + e_2 - e_1 e_2}$$

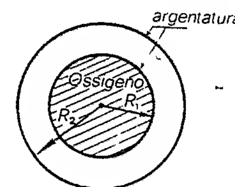
La differenza, cioè l'energia trasferita per irraggiamento nell'unità di tempo dall'unità di area di Σ_2 all'unità di area di Σ_1, vale

$$\Delta H = H_2 - H_1 = \frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\dfrac{1}{e_1} + \dfrac{1}{e_2} - 1} \qquad \text{(c)}$$

Nel caso del termos $e_1 = (1 - r_1) = e_2 = (1 - r_2) = 0.1$, $\Delta H = 24.3$ W/m², l'area vale $5 \cdot 10^{-2}$ m² e la potenza trasferita risulta $P = 1.22$ W, questo è quanto bisogna fornire per sopperire alle perdite per irraggiamento

15.10. *Un grande contenitore Dewar, a forma sferica con raggio interno $R_1 = 1$ m e raggio esterno $R_2 = 1.1$ m, ha le pareti interne, cioè quelle dell'intercapedine, argentate con coefficiente di riflessione $r = 0.95$ (vedi figura). Nel Dewar, che si trova in un ambiente a temperatura $T_0 = 300$ K, è posto ossigeno liquido alla temperatura di ebollizione $T = 90$ K. Sapendo che il calore latente dell'ossigeno è $c = 240$ J/g, calcolare con che velocità si perde ossigeno a causa dell'irraggiamento e di quanto cambierebbe il risultato se le pareti del contenitore fossero annerite, anziché argentate, in modo da avere coefficiente di riflessione praticamente nullo.*

Poiché la distanza tra le pareti argentate del Dewar $d = R_2 - R_1 = 10$ cm è piccola rispetto al raggio delle due superficie sferiche concentriche, è lecito fare uso della relazione (c) del problema 15 9 Pertanto, la potenza trasferita per irraggiamento dalla superficie esterna, alla temperatura T_0. a quella interna, alla temperatura T, è data da



$$P = 4\pi R_1^2 \frac{\sigma(T_0^4 - T^4)}{\dfrac{2}{e} - 1} = 147 \text{ W} \qquad \text{(a)}$$

L'energia assorbita dal contenitore fa evaporare l'ossigeno in esso contenuto, in un secondo ne evapora la quantità

$$q = \frac{P}{c} = 0.61 \text{ g/s}$$

Se nella (a) invece che $e = 1 - r = 0.05$ avessimo $e = 1$ (pareti annerite), il denominatore passarebbe dal valore 39 al valore 1 e le perdite di ossigeno sarebbero 39 volte superiori

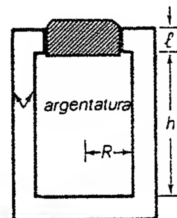
15.11. *Un termos cilindrico, schematizzato in figura, è completamente riempito d'acqua alla temperatura $t_1 = 100$°C. Il coefficiente di riflessione delle pareti è $r = 0.9$; le dimensioni del contenitore interno sono: raggio $R = 3$ cm, altezza $h = 50$ cm; il tappo è di sughero ed è spesso $l = 2$ cm; nell'intercapedine è fatto il vuoto. Supponendo che il termos sia in un*

ambiente alla temperatura $t_0 = 20°C$, calcolare all'istante $\tau = 0$, quando la temperatura dell'acqua è t_1, la perdita di potenza per irraggiamento attraverso le pareti argentate e confrontarla con quella per conduzione attraverso il tappo, la cui conduttività termica è $K = 4.18 \cdot 10^{-2}$ W/m · grado. Determinare in quanto tempo la temperatura dell'acqua scende di un grado per il solo effetto della perdita per irraggiamento.

La perdita per irraggiamento avviene attraverso la superficie laterale di area $\Sigma_1 = 2\pi Rh = 942.5$ cm² e la base di area $\Sigma_2 = \pi R^2 = 28.3$ cm²; la perdita per conduzione attraverso il tappo di area Σ_2 e spessore $l = 2$ cm. Nel primo caso ricorriamo alla (a) del problema 15.10 con $e = 1 - r = 0.1$:

$$P = \frac{\sigma(T_1^4 - T_0^4)}{\frac{2}{e} - 1}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = 3.47 \text{ W}$$

Per calcolare la perdita di energia attraverso il tappo ricordiamo la legge della conduzione del calore, secondo cui la quantità di calore dQ che nel tempo $d\tau$ passa attraverso uno spessore dx di materiale, limitato da due pareti di area Σ che si trovano rispettivamente alla temperatura $t + dt$ e t, è espressa da



$$\frac{dQ}{d\tau} = -K\Sigma\frac{dt}{dx} \quad ,$$

K è la conduttività termica del mezzo. All'istante iniziale

$$\frac{dt}{dx} = \frac{t_1 - t_0}{l} \quad \Rightarrow \quad P_c = K\Sigma\frac{t_1 - t_0}{l} = 0.47 \text{ W} \quad .$$

è la potenza persa per conduzione.

La perdita totale di potenza all'istante iniziale è 3.94 W, dovuta per l'88% all'irraggiamento e per il 12% alla conduzione.

Calcoliamo ora il tempo necessario all'abbassamento di temperatura di un grado, se la sola causa di perdite è l'irraggiamento. Intuitivamente la risposta è immediata: la variazione di temperatura è piccola rispetto alle temperature in gioco per cui possiamo ritenere la potenza costante e quindi

$$P\tau = -mc\Delta T \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{mc}{P}|\Delta T| \quad .$$

Il volume dell'acqua è $\pi R^2 h = \Sigma_2 h = 1415$ cm³ e la massa risulta $m = 1.415$ Kg; il calore specifico è $c = 4.18 \cdot 10^3$ J/Kg · grado; in definitiva il tempo richiesto è $\tau = 1705$ s $= 28'25''$.

Il procedimento più generale è il seguente: quando il contenitore, in un certo istante, è alla temperatura T, la quantità di energia emessa sotto forma di radiazioni elettromagnetiche nell'intervallo di tempo $d\tau$ è

$$dU = \frac{\sigma(\Sigma_1 + \Sigma_2)}{\frac{2}{e} - 1}(T^4 - T_0^4)\,d\tau \quad .$$

Nello stesso tempo l'acqua, in equilibrio termico ad ogni istante con le pareti interne, cede la quantità di calore $-mcdT$; eguagliando e integrando

$$\tau = -\frac{mc(2/e - 1)}{(\Sigma_1 + \Sigma_2)\sigma}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^4 - T_0^4}$$

Nel caso in esame l'intervallo di integrazione è ristretto e possiamo considerare che in esso la funzione integranda sia costante e eguale a $1/(T_1^4 - T_0^4)$. Si riottiene così il risultato precedente.

* * *

CAPITOLO 16

INTERAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE CON LA MATERIA

16a. L'interazione della radiazione elettromagnetica con elettroni, nuclei, atomi, non si può spiegare classicamente, conservando per la radiazione la descrizione ondulatoria utilizzata nei capitoli precedenti. bisogna invece ricorrere a una descrizione quantistica, che si può così riassumere un'onda piana elettromagnetica di intensità I e frequenza ν viene trattata come un fascio di *fotoni* o *quanti di radiazione*, ognuno dei quali ha l'energia

$$W = h\nu \quad . \tag{16 1}$$

con $h = 6\ 63 \cdot 10^{-34}$ Js costante di Planck, e la quantità di moto

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{16 2}$$

Questo fascio di fotoni si muove lungo la direzione di propagazione dell'onda piana con la velocità $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (nel vuoto) Il flusso di fotoni, cioè il numero N di fotoni che passa in un secondo attraverso l'unità di superficie. ortogonale alla direzione di propagazione, è dato da

$$N = \frac{I}{h\nu} \tag{16.3}$$

L'idea dei quanti di energia elettromagnetica fu introdotta da Planck per la spiegazione dello spettro di emissione del corpo nero La relazione tra energia e quantità di moto, che si ricava da (16 1-16 2),

$$W = pc \quad , \tag{16 4}$$

è suggerita invece dall'elettromagnetismo classico Infatti, come si è mostrato nel problema 10 2, questa è la relazione tra energia e quantità di moto trasportate da un'onda piana elettromagnetica

Ricordiamo che l'energia totale W di una particella di massa a riposo m_0 e quantità di moto p è data, nella teoria della relatività, da (9.10)·

$$W = (p^2c^2 + m_0^2c^4)^{1/2} \quad . \tag{16.5}$$

Si vede che la (16.5) si riduce alla (16 4) per $m_0 = 0$· la relazione tra energia e quantità di moto in un fotone è la stessa che per una particella di massa nulla, si può dire che cinematicamente un fotone si comporta come una particella di massa nulla (solo così del resto può avere velocità c)

Quando un fascio di fotoni incide su un bersaglio avvengono vari tipi di interazioni; come chiariremo nei problemi seguenti, ogni interazione è un *processo elementare* nel quale sono interessati un singolo fotone e un singolo elettrone (sia esso libero o legato ad un atomo) quello che si osserva macroscopicamente è l'effetto risultante di un numero grandissimo di questi processi elementari.

16b. Anche i processi di emissione di radiazioni elettromagnetiche da parte di atomi eccitati richiedono il concetto di fotone È noto che l'energia di un elettrone in un atomo può assumere solo determinati valori che costituiscono i cosiddetti livelli di energia Assorbendo energia un elettrone legato all'atomo può passare dal livello di energia occupato ad un livello eccitato cui compete un valore maggiore W_n dell'energia, la vita media di un tale stato è in genere assai corta ($\sim 10^{-8}$s) e l'elettrone ritorna ad un livello di energia inferiore $W_m < W_n$, in questa transizione viene emesso un fotone di energia

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = W_n - W_m \qquad (16\ 6)$$

Alla (16 6) è possibile dare una forma più esplicita nel caso dei cosiddetti *atomi idrogenoidi*, aventi un solo elettrone legato al nucleo. Tali sono, oltre naturalmente all'idrogeno, l'elio ionizzato una volta He^+, il litio ionizzato due volte Li^{++}, ecc Le lunghezze d'onda emesse da questi atomi opportunamente eccitati risultano corrispondere ai salti energetici calcolabili col semplice modello di Bohr visto nel problema 9 5 Precisamente, i valori delle energie possibili sono dati da

$$W_n = -2\ 17 \cdot 10^{-18}\,\frac{Z^2}{n^2}\ \mathrm{J} = -13\ 6\ \frac{Z^2}{n^2}\ \mathrm{eV} \quad . \qquad (16\ 7)$$

dove Z è il numero di protoni nel nucleo e n un numero intero positivo Le lunghezze d'onda emesse obbediscono allora alla formula seguente

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{W_n - W_m}{hc} = 1.097 \cdot 10^7 Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \mathrm{m}^{-1} \qquad (16\ 8)$$

La costante $1\ 097 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$ è detta costante di Rydberg Le lunghezze d'onda sono raggruppabili in serie di righe, ciascuna serie corrispondendo a un valore fisso di m(che è il livello di arrivo) e ad un valore variabile tra $m+1$ e $+\infty$ di n (che è il livello eccitato di partenza)

La quantizzazione della radiazione elettromagnetica è necessaria per la spiegazione dei fenomeni di emissione e assorbimento, ciò non toglie che la radiazione continui a presentare i fenomeni tipicamente ondulatori come l'interferenza e la diffrazione. Questo *dualismo* di comportamento, presentato del resto anche dalle particelle con massa non nulla (vedi problema 13.9) è una caratteristica fondamentale dell'attuale descrizione delle interazioni.

16c. Useremo spesso nel seguito l'unità *elettronvolt* per le energie; ricordiamo che $1\ \mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}$ J e che $1\ \mathrm{J} = 0.62 \cdot 10^{19}$ eV.

Un fotone di energia W, espressa in eV, appartiene a un'onda piana di frequenza

$$\nu = \frac{W}{h} = 2.41 \cdot 10^{14} W \quad \mathrm{Hz} \qquad (16.9)$$

e di lunghezza d'onda nel vuoto

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{W}\ \mathrm{m} = \frac{1\ 24}{W}\ \mu\mathrm{m} \qquad (16.10)$$

In tabella sono mostrati gli spettri e le energie relative alla luce visibile, ai raggi X e ai raggi γ (negli ultimi due casi i limiti sono indicativi).

luce visibile	$0\ 4 \leq \lambda \leq 0.7$	μm ,	$3.10 \geq W \geq 1.77$	eV ,
raggi X	$10^{-6} \leq \lambda \leq 10^{-2}$	μm ,	$1.24 \cdot 10^6 \geq W \geq 124$	eV ,
raggi γ	$\lambda \leq 10^{-4}$	μm .	$W \geq 1.24 \cdot 10^4$	eV .

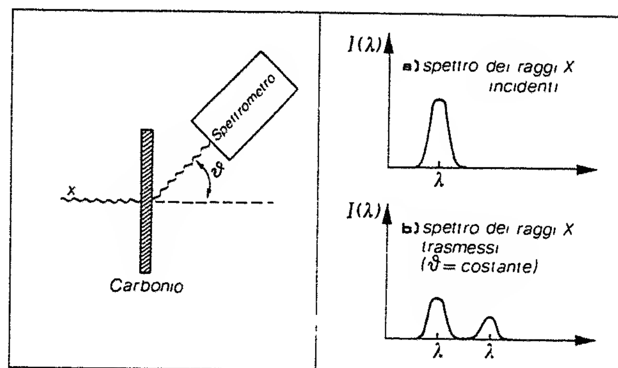
Sia i raggi X che i raggi γ sono radiazioni elettromagnetiche molto energiche. I primi sono emessi in transizioni tra i livelli più interni degli atomi, i secondi derivano da transizioni tra livelli energetici dei nuclei oppure da interazioni e decadimenti di particelle elementari. I raggi γ più energici che si riesce oggi a produrre hanno un'energia dell'ordine di $100\ \mathrm{GeV} = 10^{11}$ eV cui, per la (16 10), corrisponde una lunghezza d'onda dell'ordine di $10^{-17}\mathrm{m} = 10^{-2}$ fm, ovvero una frequenza dell'ordine di 10^{25} Hz

Ricordiamo infine alcuni sottomultipli del metro di cui ci serviremo: nanometro $\mathrm{nm} = 10^{-9}$ m, picometro $\mathrm{pm} = 10^{-12}$ m, femtometro $\mathrm{fm} = 10^{-15}$ m più comunemente chiamato *fermi*

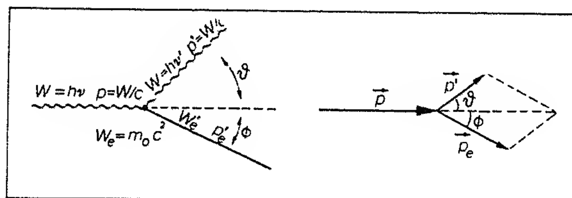
* * *

16.1. ***Nell'esperimento di Compton (1923) un sottile fascio monocromatico di raggi X incide su un bersaglio di carbonio; analizzando a vari angoli θ mediante uno spettrometro di Bragg (problema 16.10) lo spettro delle radiazioni trasmesse dal carbonio, si trova che ovunque questo è composto da due righe: una avente la stessa lunghezza d'onda λ del fascio incidente, l'altra una lunghezza d'onda λ' leggermente diversa. Si nota inoltre che $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ varia con l'angolo θ; in particolare, per $\theta = 90°$, $\Delta\lambda = 2.36$ pm. Calcolare la legge con cui varia $\Delta\lambda$ con θ e verificare il valore a 90°.***

Lo schema dell'esperimento e gli spettri tipici sono mostrati in figura L'assunzione fondamentale per la spiegazione del fenomeno è il ritenere che quello che si osserva sia il risultato di un numero molto grande di processi di diffusione in ognuno dei quali sono interessati un solo fotone e un solo elettro-



ne del bersaglio Supponiamo dapprima che l'elettrone urtato sia libero, il processo di interazione è schematizzato in figura un fotone di energia $W = h\nu = hc/\lambda$ e quantità di moto $\mathbf{p} = (W/c)\mathbf{u}_x$ urta elasticamente contro un elettrone libero in quiete, con quantità di moto $\mathbf{p}_e = 0$ e quindi energia $W_e = m_0c^2$, in base a (16.5). Nell'urto valgono i teoremi di conservazione della quantità di moto e dell'energia. Poiché la direzione del fotone diffuso è diversa



da quella del fotone incidente, esso ha una quantità di moto $\mathbf{p}'$ e un'energia W' diverse da $\mathbf{p}$ e da W; a sua volta l'elettrone, per conservare quantità di moto e energia, deve acquistare una quantità di moto

$$\mathbf{p}'_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}' \qquad (\Leftarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'_e) \tag{a}$$

e un'energia pari alla differenza tra l'energia totale prima dell'urto $W + m_0c^2$ e W'.

$$W'_e = (p'^2_e c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} = W + m_0c^2 - W' \tag{b}$$

Quadrando entrambi i membri della (a) e della (b) si ottiene

$$p'^2_e = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta = \frac{1}{c^2}\,(W^2 + W'^2 - 2WW'\cos\theta) \quad ,$$

$$p'^2_e = \frac{1}{c^2}\,[W^2 + W'^2 - 2WW' + 2m_0c^2(W - W')]$$

Si eguagliano queste due espressioni e si divide per WW' con il risultato

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{m_0c^2}\,(1 - \cos\theta) \quad . \tag{c}$$

Infine, ponendo $W = hc/\lambda$ e $W' = hc/\lambda'$, si arriva alla relazione cercata

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}\,(1 - \cos\theta) = \lambda_C(1 - \cos\theta) \quad . \tag{d}$$

La costante λ_C si chiama lunghezza d'onda Compton dell'elettrone e vale

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0c} = 2.43 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m} = 2\ 43\ \mathrm{pm} \quad , \tag{e}$$

Si noti che per $\theta = 90°$ $\Delta\lambda = \lambda_C$ la corrispondenza col valore sperimentale è molto buona Ad ogni modo la (d) è ben verificata a tutti gli angoli per cui la teoria ora sviluppata spiega perfettamente la presenza della lunghezza d'onda λ' nella radiazione diffusa e la ragione per cui λ' varia con θ secondo la (d)

Per spiegare anche la presenza della lunghezza d'onda λ, eguale a quella dei raggi X incidenti, bisogna ricordare che nella trattazione abbiamo assunto gli elettroni liberi· per questo motivo la particella che rincula nell'urto è l'elettrone e la massa che compare nelle formule è la massa m_0 dell'elettrone Se il fotone urta un elettrone legato all'atomo e l'elettrone rimane attaccato all'atomo, chi rincula non è l'elettrone, ma tutto l'atomo, che ha una massa almeno 2000 volte superiore a m_0 La trattazione che porta alla (d) è ancora valida, ma λ_C e quindi $\Delta\lambda$ sono almeno 2000 volte minori, ovvero $\Delta\lambda$ diventa troppo piccola per essere rivelata sperimentalmente In pratica, un fotone che urta un elettrone legato non subisce una variazione di lunghezza d'onda rivelabile

Riassumendo: quando un'onda elettromagnetica interagisce con gli elettroni di un bersaglio e avviene un processo di diffusione, la radiazione diffusa ha una lunghezza d'onda diversa da quella dell'onda piana e variabile con la direzione di diffusione se l'interazione avviene con un elettrone libero, mentre ha la stessa lunghezza d'onda dell'onda piana se l'interazione avviene con un elettrone legato In quest'ultimo caso si parla di diffusione da parte di un atomo, tale processo serve in particolare a spiegare la diffrazione dei raggi X prodotta da cristalli (vedi problema 16.9)

Il valore di λ_C fa capire perché l'esperimento di Compton sia fattibile soprattutto con raggi X che hanno lunghezza d'onda confrontabile con λ_C. Se si volesse utilizzare luce ordinaria occorrerebbe uno strumento (reticolo, prisma) con un potere risolutivo $\lambda/\Delta\lambda = \lambda/\lambda_C$ dell'ordine di $2 \cdot 10^5$ a $\theta = 90°$ e superiore ad angoli θ minori

C'è infine da notare che trattandosi di un processo di diffusione di fotoni da elettroni liberi l'effetto Compton non dipende dalla natura del bersaglio ovvero la (d) vale sempre con lo stesso valore λ_C dato dalla (e)

16.2. ***Un sottile fascio di raggi X, di lunghezza d'onda $\lambda = 9$ pm, incide su un bersaglio di carbonio. I raggi diffusi sono osservati ad un angolo $\theta = 54°$***

rispetto alla direzione del fascio incidente. Calcolare la lunghezza d'onda λ' dei raggi X diffusi dagli elettroni liberi a quest'angolo, le energie W e W' dei fotoni incidenti e diffusi, l'energia cinetica T_e' dell'elettrone di rinculo e l'angolo ϕ al quale può venire osservato.

La lunghezza d'onda λ' dei fotoni diffusi all'angolo $\theta = 54°$ si ricava dalla (d) del problema 16.1:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta) = 10 \text{ pm} \quad .$$

Le energie dei fotoni incidenti e diffusi si calcolano da (16 10):

$$W = 0.138 \text{ MeV} \quad , \quad W' = 0.124 \text{ MeV}$$

L'energia totale dell'elettrone di rinculo è data dalla (b) del problema 16.1 e l'energia cinetica, secondo (9.9), vale

$$T_e' = W_e' - m_0c^2 = W - W' = 14 \text{ KeV} \quad , \tag{a}$$

la diminuzione di energia del fotone corrisponde all'energia cinetica acquistata dall'elettrone Dalla (c) del problema 16.1 ricaviamo

$$W' = \frac{m_0c^2W}{m_0c^2 + W(1-\cos\theta)} = \frac{W}{1+\alpha(1-\cos\theta)} \quad , \tag{b}$$

avendo posto $\alpha = W/m_0c^2$, la (a) diviene

$$T_e' = \frac{\alpha(1-\cos\theta)}{1+\alpha(1-\cos\theta)}\, W \tag{c}$$

Le (b) e (c) danno l'energia del fotone diffuso e l'energia cinetica dell'elettrone di rinculo in funzione dell'angolo θ di diffusione del fotone e dell'energia incidente W.

Per il calcolo dell'angolo θ dell'elettrone di rinculo si passa dalla relazione vettoriale (a) del problema 16.1 alle relazioni riguardanti le componenti, lungo la direzione del moto del fotone incidente e lungo una direzione a questa ortogonale

$$p_e'\cos\phi = p - p'\cos\theta \quad , \quad p_e'\,\text{sen}\,\phi = p'\,\text{sen}\,\theta$$

Dividendo membro a membro

$$\text{tg}\,\phi = \frac{p'\,\text{sen}\,\theta}{p - p'\cos\theta} = \frac{W'\,\text{sen}\,\theta}{W - W'\cos\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{(1+\alpha)\ (1-\cos\theta)} \quad ,$$

l'ultimo passaggio è stato realizzato utilizzando la (b). In numeri $\text{tg}\,\phi = 1.539$, $\varphi = 57°$

16.3. *Un sottile fascio di raggi X, con lunghezza d'onda* $\lambda = 12.4$ pm, *incide su un bersaglio di carbonio. Gli elettroni di rinculo vengono osservati ad un angolo* $\phi = 60°$ *rispetto alla direzione del fascio incidente. Calcolare l'energia cinetica degli elettroni osservati, la lunghezza d'onda λ' dei fotoni diffusi e il loro angolo di emissione.*

Ricaviamo innanzitutto una relazione che leghi l'energia cinetica T_e' dell'elettrone di rinculo all'angolo ϕ. Quadrando la relazione che dà la conservazione della quantità di moto nella forma $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}_e'$ si ottiene

$$p'^2 = p^2 + p_e'^2 - 2pp_e'\cos\phi \quad \Rightarrow \quad 2\,\frac{W}{c}\,p_e'\cos\phi = \frac{W^2 - W'^2}{c^2} + p_e'^2 \quad .$$

Utilizzando la (a) del problema 16.2, la (9.11) che dà la relazione tra p_e' e T_e', la definizione $\alpha = W/m_0c^2$, arriviamo alla relazione

$$T_e' = \frac{2\alpha W\cos^2\phi}{(1+\alpha)^2 - \alpha^2\cos^2\phi} \quad .$$

Nel nostro caso $W = 100$ KeV, $\alpha = 0.2$, $T_e' = 7$ KeV.

L'energia del fotone diffuso e la lunghezza d'onda corrispondente sono

$$W' = W - T_e' = 93 \text{ KeV} \quad , \quad \lambda' = 13.3 \text{ pm}.$$

Infine, per l'angolo di diffusione dei fotoni si ha

$$\cos\theta = 1 - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_C} = 0.630 \quad , \quad \theta = 51°$$

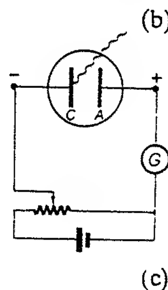
16.4. *Una cellula fotoelettrica con catodo di potassio è inserita in un circuito nel quale, mediante un potenziometro, si può applicare una d.d.p. V tra il catodo C e l'anodo A; l'intensità di corrente I è letta con il galvanometro G. Se si illumina il catodo con la luce gialla prodotta da una lampada al sodio ($\lambda_1 = 589$ nm) si nota che il valore minimo V_{01} per cui $I = 0$ è 0.361 V; illuminando con una lampada a mercurio ($\lambda_2 = 253.7$ nm), si trova $V_{02} = 3.146$ V. Assumendo nota la carica dell'elettrone calcolare la costante di Planck h, il lavoro di estrazione Φ_0 del potassio, la lunghezza d'onda massima λ_0, ovvero la frequenza minima ν_0, capace di produrre effetto fotoelettrico sul potassio. Calcolare infine l'energia cinetica massima T_m e la velocità massima v_m con cui l'elettrone esce dal potassio nei due casi.*

Come è noto, l'effetto fotoelettrico è un processo in cui gli elettroni di conduzione di un metallo assorbono i quanti di energia trasportati dalla luce e possono quindi uscire dal metallo stesso. Detta Φ l'energia richiesta perché un certo elettrone possa uscire dal metallo, quando esso assorbe un fotone di energia $h\nu \geqslant \Phi$ esce dal metallo con un'energia cinetica

$$T = h\nu - \Phi \quad . \tag{a}$$

Non tutti gli elettroni richiedono la stessa energia in quanto in un metallo essi occupano una banda continua di livelli energetici compresi tra un valore minimo e uno massimo: la minima energia richiesta Φ_0 corrisponde agli elettroni che occupano il livello di energia più elevato, detto *livello di Fermi*. Come si vede dalla (a) questi elettroni vengono emessi con l'energia cinetica massima

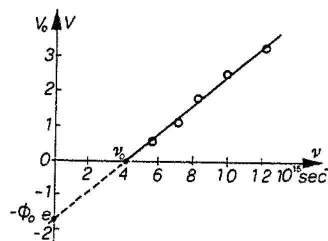
$$T_m = h\nu - \Phi_0 \quad . \tag{b}$$



Applicando V tra il catodo e l'anodo, con le polarità mostrate in figura, si contrasta il moto verso A degli elettroni emessi da C· sperimentalmente, all'aumentare di V si raggiunge un valore V_0 oltre il quale il galvanometro non segna più passaggio di corrente. Ciò indica che neanche l'elettrone più energico ha energia sufficiente per raggiungere l'anodo: per $V = V_0$

$$eV_0 = h\nu - \Phi_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{h}{e}\,\nu - \frac{\Phi_0}{e} \tag{c}$$

La (c), ricavata dalla teoria dell'effetto fotoelettrico di Einstein (1912), è stata verificata da Millikan nel 1919; essa mostra che il potenziale di interdizione V_0 è una funzione lineare della frequenza ν, indipendente dall'intensità della luce incidente sul catodo. La pendenza della retta dà h/e e quindi h, costante di Planck, l'intersezione con l'asse V_0 dà $-\Phi_0/e$ e quindi il lavoro di estrazione Φ_0, infine l'intersezione con l'asse ν dà $\nu_0 = \Phi_0/h$ questa è la frequenza minima della radiazione elettromagnetica che produce effetto fotoelettrico, come si ricava da (b) dovendo essere $h\nu \geqslant \Phi_0$



Per calcolare quanto richiesto dal problema possiamo usare un metodo grafico o analitico, sfruttando in ogni caso il fatto che la retta (c) passa per i punti

$$\lambda_1 = 589.0 \text{ nm} \;\Rightarrow\; \nu_1 = 0.509 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad , \quad V_{01} = 0.361 \text{ V} \quad ,$$
$$\lambda_2 = 253.7 \text{ nm} \;\Rightarrow\; \nu_2 = 1.182 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad , \quad V_{02} = 3.146 \text{ V} \quad ,$$

L'equazione è $V_0 = 4.138 \cdot 10^{-15}\nu - 1.746$ V e quindi:

$$h = 6.625 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \;,\; \Phi_0 = 1.746 \text{ eV} \;,\; \nu_0 = 0.42 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \;,$$
$$\lambda_0 = \nu_0/c = 714 \text{ nm}.$$

Le energie dei fotoni di frequenza ν_1 e ν_2 sono $W_1 = 2.105$ eV, $W_2 = 4.888$ eV. Tramite la (b) si calcolano le energie cinetiche massime e quindi le velocità massime·

$$T_{m,1} = 0.359 \text{ eV} = 0.574 \cdot 10^{-19} \text{ J} \;\Rightarrow\; v_{m,1} = (2T_{m,1}/m_e)^{1/2} = 0.36 \cdot 10^6 \; \frac{\text{m}}{\text{s}} \;,$$

$$T_{m,2} = 3.142 \text{ eV} = 5.027 \cdot 10^{-19} \text{ J} \;\Rightarrow\; v_{m,2} = (2T_{m,2}/m_e)^{1/2} = 1.05 \cdot 10^6 \; \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

16.5. *Una cellula fotoelettrica con catodo di sodio metallico, distante* $d = 1$ cm *dall'anodo ha i due elettrodi piani e paralleli. Sapendo che la soglia fotoelettrica del sodio è* $\lambda_0 = 0.68$ μm *determinare il valore minimo del campo elettrico necessario per impedire il passaggio della corrente nel circuito della cellula, quando questa sia illuminata con luce di lunghezza d'onda* $\lambda = 0.40$ μm, *e la velocità massima con cui gli elettroni escono dal metallo.*

La d.d.p. minima V_0 che bisogna applicare tra gli elettrodi per impedire il passaggio della corrente è data dalla (c) del problema 16.4, riscritta in funzione di λ_0.

$$V_0 = \frac{h}{e}\,(\nu - \nu_0) = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

Numericamente $V_0 = 1.28$ V e il campo elettrico minimo vale $E_0 = V_0/d = 128$ V/m $= 1.28$ V/cm.

L'energia cinetica massima con la quale l'elettrone esce dal metallo è, per le (b) e (c) del problema 16.4, $T_m = eV_0 = 1.28$ eV $= 2.05 \cdot 10^{-19}$ J e la velocità massima vale quindi $v_m = (2T_m/m_e)^{1/2} = (2eV_0/m_e)^{1/2} = 0.67 \cdot 10^6$ m/s

16.6. *Una cellula fotoelettrica con catodo di rubidio-cesio ha gli elettrodi piani e paralleli distanti* $d = 1$ cm. *La soglia fotoelettrica del materiale catodico è* $\lambda_0 = 680$ nm: *la sensibilità massima ha il valore* $\eta = 90$ mA/W *per luce di lunghezza d'onda* $\lambda = 413$ nm. *Calcolare la velocità massima con cui gli elettroni escono dal catodo quando la cellula è illuminata con un'onda di lunghezza d'onda* λ. *Se l'amperometro connesso in serie alla cellula può rivelare una corrente minima* $i_0 = 1$ μA *calcolare la minima potenza* W_0 *necessaria per rivelare l'effetto fotoelettrico nonché l'intensità minima* I_0 *se l'area del catodo è* $\Sigma = 1$ cm². *Misurando il tempo di risposta della cellula si trova che esso coincide praticamente col tempo di transito degli elettroni dal catodo all'anodo, cioè che la risposta è istantanea. Dimostrare che ciò non è giustificabile con la descrizione ondulatoria della radiazione incidente.*

Il lavoro di estrazione del rubidio-cesio è $\Phi_0 = h\nu_0 = hc/\lambda_0 = 2.93 \cdot 10^{-19}$ J. Un fotone di frequenza $\nu = c/\lambda$ ha un'energia $W = h\nu = 4.82 \cdot 10^{-19}$ J per cui $T_m = W - \Phi_0 = 1.89 \cdot 10^{-19}$ J e $v_m = (2T_m/m_e)^{1/2} = 0.64 \cdot 10^6$ m/s, il tempo di transito dal catodo all'anodo vale $t_0 = 15.5 \cdot 10^{-9}$ s.

Dal valore della sensibilità massima ricaviamo $i_0 = \eta W_0$ e quindi $W_0 = 1.11 \cdot 10^{-5}$ W è la minima potenza incidente rivelabile; in corrispondenza $I_0 = W_0/\Sigma = 1.11 \cdot 10^{-5}$ W/cm².

Se trattiamo la radiazione incidente come un'onda piana di intensità I_0, questa trasmette in un tempo t_0 all'elettrone di area Σ_e un'energia $W_e = I_0\Sigma_e t_0$ che deve valere almeno Φ_0: pertanto $\Sigma_e = \Phi_0/I_0 t_0 = 1.7 \cdot 10^{-6}$ cm² e l'elettro-

ne dovrebbe avere un raggio $r_e = (\Sigma_e/\pi)^{1/2} = 7.4$ µm; se considerassimo tempi minori, come indicano gli esperimenti, risulterebbero raggi ancora maggiori.

Non è dunque possibile trattare l'assorbimento della radiazione in maniera classica come un processo continuo. l'assorbimento è invece discontinuo, per quanti di energia $h\nu$, ed è istantanea. La coincidenza del tempo di risposta col tempo di transito è una delle migliori verifiche della teoria di Einstein dell'effetto fotoelettrico.

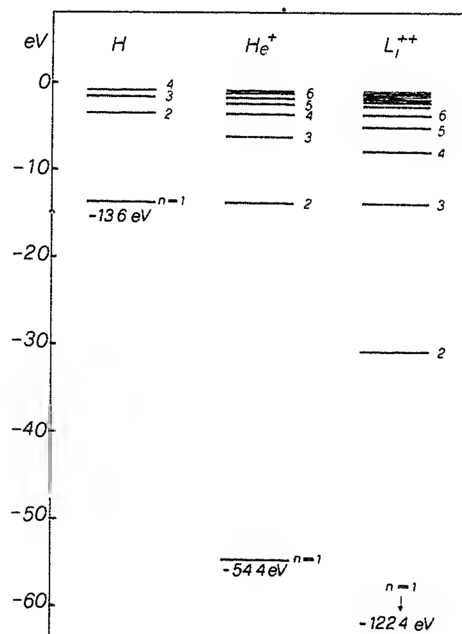
16.7. ***Per i tre atomi* H, He$^+$, Li^{++} *confrontare i possibili stati energetici, determinando in particolare le energie di ionizzazione. Calcolare inoltre le lunghezze d'onda degli spettri di radiazioni elettromagnetiche emessi da tali sostanze, specificando quali parti di questi sono visibili con i normali spettrometri ottici.***

Le formule di partenza sono le (16.7-16.8). Gli stati normali di equilibrio sono quelli di minima energia, individuati da $n = 1$.

$$W_1(\mathrm{H}) = -13.6\ \mathrm{eV}\ ,\ W_1(\mathrm{He}^+) = -54.4\ \mathrm{eV}\ ,\ W_1(\mathrm{Li}^{++}) = -122.4\ \mathrm{eV}\ ,$$

per l'idrogeno $Z = 1$, per l'elio $Z = 2$, per il litio $Z = 3$.

I diversi stati energetici si possono rappresentare come nel grafico in figura, riportando una linea per ogni W_n. è chiaro che i livelli energetici non sono



equispaziati, ma tendono ad addensarsi all'aumentare di n; il livello di energia massima è quello con $W = 0$ ($n \rightarrow +\infty$). Portare un elettrone dallo stato di equilibrio a quello di massima energia significa sottrarlo all'influenza del nucleo (distanza $r \rightarrow +\infty$); tale processo si chiama *ionizzazione*, per cui l'energia di ionizzazione vale 13.6 eV per H, 54.4 eV per He$^+$, 122.4 eV per Li^{++}.

Da (16.7) si vede che i livelli dei tre atomi coincidono quando

$$\frac{1}{n_1^2} = \frac{4}{n_2^2} = \frac{9}{n_3^2}\ , \tag{a}$$

con n_1, n_2, n_3 numeri d'ordine dei livelli energetici di H, He$^+$, Li^{++} rispettivamente. Ciò si verifica ad esempio per $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$; $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 6$; in generale per n_1, $n_2 = 2n_1$, $n_3 = 3n_1$. È facile rendersi conto che il numero dei possibili livelli per He$^+$ (Li^{++}) è doppio (triplo) di quello relativo all'idrogeno.

Passando alla (16.8) per $Z = 1$, determiniamo alcune serie di righe:

1. *serie di Lymann* $\quad \dfrac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^7 \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \quad m = 1 \quad n = 2, 3, 4, \ldots$

2. *serie di Balmer* $\quad \dfrac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^7 \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{n^2}\right) \quad m = 2 \quad n = 3, 4, 5, \ldots$

3. *serie di Paschen* $\quad \dfrac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^7 \left(\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{n^2}\right) \quad m = 3 \quad n = 4, 5, 6, \ldots$

4. *serie di Brackett* $\quad \dfrac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^7 \left(\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{n^2}\right) \quad m = 4 \quad n = 5, 6, 7, \ldots$

Nelle formule le lunghezze d'onda sono espresse in metri, dando ad n i valori minimi $(m + 1)$ e massimo $(+\infty)$ si ottengono i valori estremi della serie:

Lymann	$0.91 \cdot 10^{-7} \leq \lambda \leq 1.21 \cdot 10^{-7}$	m ,
Balmer	$0.36 \cdot 10^{-6} \leq \lambda \leq 0.66 \cdot 10^{-6}$	m ,
Paschen	$0.82 \cdot 10^{-6} \leq \lambda \leq 1.87 \cdot 10^{-6}$	m ,
Brackett	$1.46 \cdot 10^{-6} \leq \lambda \leq 3.96 \cdot 10^{-6}$	m .

Solamente la serie di Balmer ha lunghezze d'onda nel visibile ed è proprio per tale motivo che fu la prima ad essere osservata e misurata; la serie di Lymann cade nell'ultravioletto e le altre nell'infrarosso. La formula della serie di Balmer fu da questi dedotta fenomenologicamente (1885); Bohr ne diede una spiegazione teorica nel 1913. Le altre serie richieste dalla teoria furono successivamente ricercate e scoperte dagli altri sperimentatori con l'impiego di rivelatori sensibili alle lunghezze d'onda infrarosse e ultraviolette.

Dalla eguaglianza di alcuni livelli energetici dei tre atomi, relazione (a), si deduce subito che certe righe sono presenti in tutti e tre gli spettri di emissione. La serie di Balmer dell'idrogeno è interamente compresa nella serie emessa da He^+ nelle transizioni verso il livello con $m = 4$ e quest'ultima a sua volta è compresa nella serie emessa da Li^{++} nelle transizioni verso il livello con $m = 6$. Così la serie visibile di $He^+(Li^{++})$ ha un numero di righe doppio (triplo) della serie di Balmer dell'idrogeno.

16.8. ***Un fascio di radiazioni elettromagnetiche, ottenuto per eccitazione di atomi di He^+, viene inviato su un bersaglio contenente idrogeno allo stato gassoso. Calcolare lo spettro delle radiazioni che possono essere assorbite dal bersaglio e quello delle radiazioni che vengono trasmesse.***

Lo spettro di emissione ottenuto per eccitazione degli atomi di He^+ è stato calcolato nel problema 16.7; esso è costituito da varie serie di righe descritte da

$$\frac{1}{\lambda} = 1.097 \cdot 10^7 \cdot 4 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad m^{-1} \qquad \text{(a)}$$

Quando uno di questi fotoni di energia $h\nu = hc/\lambda$ incontra un atomo di idrogeno può interagire con il suo elettrone: in particolare se l'elettrone si trova nello stato fondamentale, caratterizzato dall'energia $W_1 = -13.6$ eV, e assorbe il fotone, si porta in uno stato eccitato caratterizzato dall'energia $W_n = W_1 + h\nu$. Poiché gli stati energetici possibili per l'elettrone sono quelli che soddisfano alla (16.7) con $Z = 1$, si deduce che possono essere assorbiti i fotoni la cui frequenza soddisfa a

$$\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} = \frac{W_n - W_1}{hc} = 1.097 \cdot 10^7 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad m^{-1} ,$$

con $n = 2, 3, 4, \ldots$; questa è la serie di Lymann, che sappiamo essere compresa nella (a) con $m = 2$ (problema 16.7).

Analogamente, se l'elettrone assorbe il fotone mentre si trova nello stato di energia W_2, esso può assorbire tutte le radiazioni che costituiscono la serie di Balmer. In conclusione, l'elettrone assorbe tutte le serie di righe dello spettro di emissione dell'atomo di idrogeno, ma non quelle righe derivanti da salti energetici propri di He^+.

Una volta portatosi in uno stato eccitato l'elettrone, dopo un tempo molto breve dell'ordine di 10^{-8} s, ritorna verso stati di minore energia: tale processo è accompagnato dall'emissione di fotoni e si hanno le serie di righe viste nel problema 16.7. Mentre l'assorbimento dei fotoni del fascio avviene lungo la direzione di propagazione di questo, il successivo processo di emissione avviene in tutte le direzioni; per tale motivo, se si analizza il fascio dopo che esso ha attraversato l'idrogeno con uno spettrometro puntato lungo la direzione originale di emissione, si nota che le righe della serie di Balmer dell'idrogeno appaiono molto meno intense rispetto a quelle righe visibili della serie di He^+ non presenti nello spettro di emissione dell'idrogeno.

Il processo per cui gli elettroni legati di un atomo assorbono solamente quelle righe che, una volta eccitati, sono anche in grado di emettere è noto come *processo di risonanza*.

16.9. ***Un tubo a raggi X opera con elettroni accelerati da una d.d.p. V. Descrivere le caratteristiche dello spettro di emissione di raggi X di una sostanza, determinando in particolare la legge con cui varia la frequenza massima (la lunghezza d'onda minima) dello spettro in funzione di V. Calcolare la d.d.p. minima necessaria per ottenere raggi X di lunghezza d'onda $\lambda = 0.1$ nm.***

Un fascio di raggi X viene prodotto bombardando gli atomi di un elemento pesante con elettroni accelerati da una d.d.p. V. Quando uno di questi elettroni colpisce un atomo, se ha energia sufficiente può dislocare uno degli elettroni delle orbite più interne, per esempio uno dell'orbita più interna K. Tale elettrone lascia libero un posto che può essere occupato da uno degli elettroni delle orbite successive L, M, N ...; la transizione da un'orbita L (M, N, ...) caratterizzata da un'energia W_L ad una K caratterizzata da W_K è accompagnata dall'emissione di un fotone la cui frequenza (e lunghezza d'onda) è determinata da

$$W_L - W_K = h\nu_\alpha = \frac{hc}{\lambda_\alpha} \quad , \quad W_M - W_K = h\nu_\beta = \frac{hc}{\lambda_\beta} \quad ,$$

$$W_N - W_K = h\nu_\gamma = \frac{hc}{\lambda_\gamma} \quad , \ldots$$

Queste righe, di lunghezza d'onda λ_α, λ_β, λ_γ ..., note come la serie K, si indicano in spettroscopia con K_α, K_β, K_γ. Oltre alla serie K esistono le serie L, M, ... prodotte dislocando un elettrone da un'orbita L, M, ...

Lo spettro di righe, caratteristico della sostanza bombardata, è sempre accompagnato da uno spettro continuo, comprendente tutte le frequenze fino ad una massima. Tale spettro è prodotto da quegli elettroni che interagiscono con l'atomo senza tuttavia spostare elettroni dalle orbite. Essi raggiungono lo stato di quiete attraverso una successione di urti in ognuno dei quali perdono una certa quantità di energia. Se si assume che l'energia persa in ogni atto di collisione venga irradiata sotto forma di un singolo fotone, è chiaro che l'energia $h\nu$ di quest'ultimo può essere qualunque, avendo come limite superiore l'energia $W = eV$ dell'elettrone incidente. Le due sono eguali quando l'elettrone perde tutta la sua energia in un unico urto. Pertanto $h\nu \leq eV$ ovvero

$$\nu \leq \frac{eV}{h} = \nu_{max} = 2.41 \cdot 10^{14} \ V \ \text{Hz} \quad , \quad \lambda \geq \frac{hc}{eV} = \lambda_{min} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{V} \quad m$$

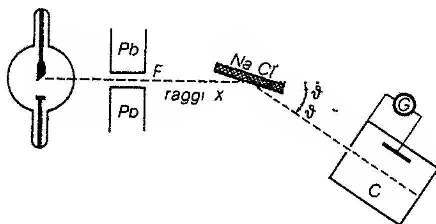
La d.d.p minima per ottenere un fotone di lunghezza d'onda $\lambda = 0.1$ nm è pertanto $V = 12.4 \cdot 10^3$ V

È bene notare che la maggior parte dell'energia degli elettroni viene persa attraverso il meccanismo di collisione, essendo questo processo più probabile di quello di dislocazione. Lo spettro continuo è tecnicamente chiamato *spettro di bremsstrahlung* (in tedesco radiazione di frenamento)

Da un punto di vista applicativo si fa normalmente uso dello spettro continuo per esempio in radiografia, lo spettro di righe è importante nella spettroscopia e inoltre nello studio della struttura dei cristalli, come vedremo nei problemi 16.10 e 16.11.

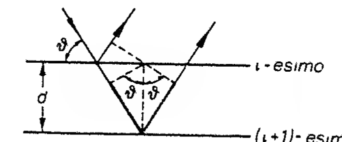
Abbiamo detto che lo spettro di righe è caratteristico di una sostanza la sua individuazione può essere assunta come indice di presenza della sostanza in un campione Su questo fatto si fonda un metodo di analisi per evidenziare tracce di elementi pesanti (ad esempio inquinanti atmosferici) in campioni I raggi X vengono prodotti mediante l'urto di protoni accelerati elettrostaticamente contro campioni e analizzati con opportuni spettrometri. Si arriva a rivelare la presenza di quantità fino a 10^{-9} g in campioni di 10^{-3} g, non rivelabili con le usuali analisi chimiche

16.10. *Nella figura è schematizzato lo spettrometro a raggi X di Bragg: il fascio di raggi X, prodotto in un tubo di tipo Coolidge e collimato con un diaframma F di piombo, colpisce un cristallo, nel nostro caso* NaCl. *Il fascio riflesso entra in una camera a ionizzazione C, riempita di ioduro di metile che assorbe fortemente i raggi X; uno strumento G misura la corrente di ionizzazione I prodotta dai raggi X. Al variare della posizione angolare θ, misurata con un goniometro, si osserva un andamento della corrente I del tipo di quello mostrato nel grafico. Calcolare le lunghezze d'onda del fascio di raggi X. Il cloruro di sodio ha densità* $\varrho = 2.165$ g/cm³ *e massa molare* $A = 58.454$. *I valori degli angoli θ corrispondenti ai massimi di I sono riportati accanto al grafico.*



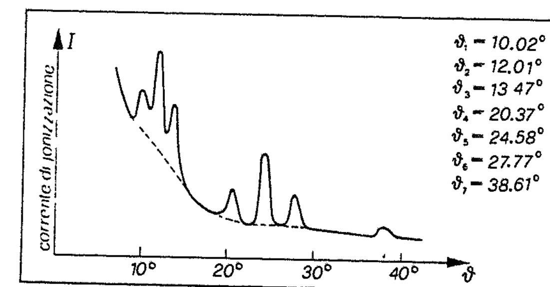
Il cristallo di NaCl è costituito da una disposizione regolare di ioni Na^+ e Cl^- formanti un reticolo cubico. Quando un fascio di raggi X incide su questa struttura di atomi viene diffuso attraverso il processo visto nel problema 16 1 Ricordando quei risultati ed enunciandoli in modo diverso si può dire che gli

atomi divengono delle sorgenti coerenti che emettono in tutte le direzioni radiazioni della stessa lunghezza d'onda di quella della radiazione incidente Il cristallo si comporta quindi come un sistema di sorgenti coerenti e nello spazio circostante si osserva l'interferenza delle onde emesse da queste sorgenti. Detta d la distanza tra i piani reticolari, ovvero tra gli ioni del cristallo, dalla figura si vede che la differenza dei cammini tra le onde emesse dalle sorgenti che stanno nel piano i-esimo e da quelle che stanno nel piano $(i+1)$-esimo è $2d \operatorname{sen}\theta$: in base ai risultati del problema 12.26 abbiamo interferenza costruttiva, cioè un fascio riflesso di grande intensità, agli angoli θ che soddisfano alla legge di Bragg



$$2d \operatorname{sen}\theta = K\lambda \qquad K \text{ intero positivo .} \qquad \text{(a)}$$

Per $K = 1$ si ha lo spettro del primo ordine, per $K = 2$ del secondo ordine e così via.



Allo scopo di determinare il numero di righe presenti nello spettro calcoliamo il seno degli angoli θ corrispondenti alle posizioni di massima corrente (nello spettrometro descritto un fascio intenso di raggi X viene evidenziato sperimentalmente da una forte corrente di ionizzazione).

θ	10 02°	12 01°	13 47°	20 37°	24.58°	27.77°	38 61°
$\operatorname{sen}\theta$	0 174	0.208	0.233	0.348	0 416	0.466	0.624

Dalla tabella si osserva che

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_4}{\operatorname{sen}\theta_1} = \frac{\operatorname{sen}\theta_5}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_6}{\operatorname{sen}\theta_3} = 2 \quad , \quad \frac{\operatorname{sen}\theta_7}{\operatorname{sen}\theta_2} = 3 \quad .$$

Le righe presenti nel fascio di raggi X sono pertanto tre, λ_1, λ_2, λ_3, i tre massimi nelle posizioni θ_1, θ_2, θ_3 costituiscono lo spettro del primo ordine, i tre nelle posizioni θ_4, θ_5, θ_6 quello del secondo ordine, mentre il massimo in posizione θ_7 è del terzo ordine per λ_2 La riga λ_2 è evidentemente la più intensa, per il decrescere dell'intensità con θ λ_2 è appena visibile al terzo ordine, λ_1 e λ_3 mancano.

Oltre allo spettro di righe c'è anche uno spettro continuo, rappresentato in

figura dalla linea tratteggiata; esso è prodotto dallo spettro X continuo, discusso nel problema 16.9 (spettro di bremsstrahlung)

Per calcolare λ_1, λ_2, λ_3 dobbiamo calcolare la distanza interatomica d. Il metodo è il seguente: consideriamo ogni atomo al centro di un cubo di lato d, il volume corrispondente è d^3 e la massa ϱd^3. Una mole di NaCl ha una massa di A grammi e contiene N_0 molecole, ovvero $2N_0$ atomi, se N_0 è il numero di Avogadro. Pertanto

$$A = 2N_0 \varrho d^3 \quad \Rightarrow \quad d = \left(\frac{A}{2N_0\varrho}\right)^{1/3} = 2.82 \cdot 10^{-8}\ \text{cm} = 0.282\ \text{nm}$$

Dalla (a) ricava

$$\lambda_1 = 2d\,\text{sen}\,\theta_1 = 0.098\ \text{nm} \quad , \quad \lambda_2 = 2d\,\text{sen}\,\theta_2 = 0.117\ \text{nm} \quad ,$$

$$\lambda_3 = 2d\,\text{sen}\,\theta_3 = 0.131\ \text{nm}$$

Risulta evidente che i normali reticoli ottici ($d \sim 10^3$ nm) non possono servire a produrre diffrazione di radiazioni elettromagnetiche con lunghezze d'onda dell'ordine di 1 nm o meno. La scoperta che i cristalli potessero servire da reticoli per tali radiazioni è dovuta a Laue (1912). Il grafico in figura è il primo spettro di raggi X, ottenuto da Bragg nel 1913.

16.11. ***La riga K_α dello spettro di emissione del rame ha una lunghezza d'onda $\lambda_\alpha = 154.9$ pm. Con uno spettrometro di Bragg che usa un cristallo di calcite come reticolo, si osserva il primo massimo di intensità nella corrente di ionizzazione, corrispondente alla riga K_α, all'angolo $\theta_1 = 14.78°$. Calcolare il passo d del reticolo cristallino, gli angoli ai quali si osservano gli ordini superiori e il massimo ordine prodotto.***

Facciamo uso della legge di Bragg, relazione (a) del problema 16.10, risolta rispetto a d con $K = 1$.

$$d = \frac{\lambda_\alpha}{2\,\text{sen}\,\theta_1} = 303.6\ \text{pm}$$

L'ordine massimo si ottiene imponendo

$$\text{sen}\,\theta = \frac{K\lambda_\alpha}{2d} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad K \leqslant \frac{2d}{\lambda_\alpha} = 3.9 \quad \Rightarrow \quad K_{\max} = 3 \quad .$$

Ci sono in totale tre ordini e le righe del secondo e terzo ordine si osservano a

$$\text{sen}\,\theta_2 = \frac{2\lambda_\alpha}{2d} = 2\,\text{sen}\,\theta_1 = 0.510 \quad , \quad \theta_2 = 30.66° \quad ,$$

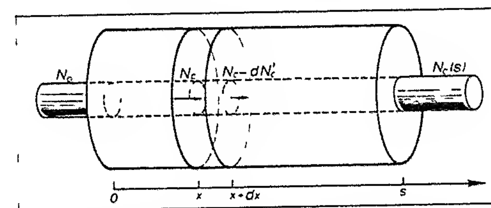
$$\text{sen}\,\theta_3 = \frac{3\lambda_\alpha}{2d} = 3\,\text{sen}\,\theta_1 = 0.765 \quad , \quad \theta_3 = 49.94°$$

16.12. ***Un fascio monocromatico di raggi γ, di intensità $I_0 = 8\ \text{W/cm}^2$ e sezione $\Sigma = 1\ \text{cm}^2$, con lunghezza d'onda $\lambda = 2.48$ pm, incide su un bersaglio di piombo di spessore $s = 5$ mm. Sapendo che per γ di questa energia il coefficiente di assorbimento per effetto Compton è $\alpha_c = 0.78\ \text{cm}^{-1}$ e quello per effetto fotoelettrico è $\alpha_f = 1.0\ \text{cm}^{-1}$, determinare la percentuale di fotoni che interagiscono per effetto Compton con il bersaglio, la percentuale di quelli che interagiscono per effetto fotoelettrico e quanti fotoni interagiscono in un secondo per i due effetti combinati. Calcolare inoltre lo spessore s_1 di piombo necessario per attenuare l'intensità del fascio di raggi γ trasmesso di un fattore 10^{12} rispetto a quella del fascio incidente.***

Il fascio di raggi γ è costituito da fotoni che in base a (16.10) hanno energia $W = 0.5$ MeV; il flusso di γ, per la (16.3), è $N'_0 = I_0/W = 10^{14}$ fotoni/cm² · s. Sul bersaglio di piombo incidono quindi $N_0 = N'_0\Sigma = 10^{14}$ fotoni/s

Alcuni dei fotoni nell'attraversare il bersaglio urtano gli elettroni del piombo; poiché la loro energia è grande rispetto all'energia di legame degli elettroni atomici, possiamo supporre che questi si comportino come liberi, di conseguenza, una parte dei fotoni viene diffusa (*effetto Compton*), una parte viene assorbita (*effetto fotoelettrico*). Per calcolare quanti ne vengono diffusi chiamiamo $N_c(x)$ il numero di fotoni del fascio che arrivano ad una profondità x senza essere stati diffusi, $N'_c(x)$ il numero di quelli che hanno viceversa subito diffusione tra zero e x (deve essere $N_c + N'_c = N_0$), dN'_c il numero di quelli che vengono diffusi tra x e $x + dx$. Il numero di elettroni liberi contenuti in un cilindretto di base Σ unitaria e altezza dx (vedi figura) vale $dK = (N_0/A)\varrho dx$ con N_0 numero di Avogadro, A massa molare e ϱ densità del materiale, dN'_c è direttamente proporzionale al numero di elettroni dK, che costituiscono il bersaglio, e al numero di fotoni presenti alla profondità x, $N_c = N_0 - N'_c$:

$$dN'_c = \sigma_c N_c dK = \frac{N_0}{A}\,\varrho\sigma_c N_c dx = \alpha_c N_c dx \qquad \text{(a)}$$



Il coefficiente σ_c prende il nome di *sezione d'urto del processo di diffusione*, α_c di *coefficiente di assorbimento*. Il numero di fotoni N'_c che hanno interagito tra zero e s si ottiene per integrazione da (a):

$$\int_0^{N'_c(s)} \frac{dN'_c}{N_0 - N'_c(x)} = \alpha_c \int_0^s dx \quad \Rightarrow \quad \log\frac{N_0 - N'_c(s)}{N_0} = -\alpha_c s$$

$$\Rightarrow \quad N'_c(s) = N_0(1 - e^{-\alpha_c s}) \quad .$$

Pertanto il numero di fotoni che emergono da s senza aver subito diffusione è

$$N_c(s) = N_0 e^{-\alpha_c s} = N_0 e^{-s/\mu_c} \quad ; \qquad \text{(b)}$$

$\mu_c = 1/\alpha_c$ è detto *cammino libero medio per effetto Compton.*

Procedendo in maniera analoga per l'effetto fotoelettrico si ha che il numero di fotoni che non vengono assorbiti è dato da

$$N_f(s) = N_0 e^{-\alpha_f s} = N_0 e^{-s/\mu_f} \quad , \qquad \text{(c)}$$

con α_f e $\mu_f = 1/\alpha_f$ rispettivamente *coefficiente d'assorbimento e cammino libero medio per l'interazione fotoelettrica.*

L'effetto combinato dei due fenomeni può essere facilmente visualizzato pensando che il fascio di N_0 fotoni/s incida su uno spessore s con coefficiente di assorbimento $\alpha_c \neq 0$ e $\alpha_f = 0$; per la (b) i fotoni uscenti al secondo sono $N_c(s) = N_0 e^{-\alpha_c s}$, questi fotoni attraversano successivamente uno spessore s con $\alpha_c = 0$ e $\alpha_f \neq 0$; ne escono, per la (c), $N_c(s)\ e^{-\alpha_f s}$, cioè

$$N = N_0 e^{-(\alpha_c + \alpha_f)s} = N_0 e^{-\alpha s} = N_0 e^{-s/\mu} \qquad \text{(d)}$$

I coefficienti $\alpha = \alpha_c + \alpha_f$ e μ, tale che $1/\mu = 1/\mu_c + 1/\mu_f$, si dicono *coefficiente di assorbimento totale* e *cammino libero medio per interazione elettromagnetica.*

Un altro modo di vedere la (d) si basa sul calcolo delle probabilità. la frequenza N_c/N_0 relativa all'interazione Compton è una misura della probabilità che questa interazione non avvenga; analogamente per la frequenza N_f/N_0 dell'interazione fotoelettrica La frequenza totale N/N_0 è una misura della probabilità totale che è il prodotto delle due, se si suppongono i due tipi di interazioni indipendenti uno dall'altro; pertanto $N/N_0 = e^{-\alpha_c s}\ e^{-\alpha_f s}$.

Nel caso numerico proposto le percentuali dei fotoni che non interagiscono per effetto Compton e per effetto fotoelettrico sono, rispettivamente,

$$\frac{N_c}{N_0} = e^{-\alpha_c s} = 0\ 677 \quad , \quad \frac{N_f}{N_0} = e^{-\alpha_f s} = 0\ 607$$

Inoltre $\alpha = \alpha_s + \alpha_f = 1.78\ \text{cm}^{-1}$, $\mu = 1/\alpha = 0.56$ cm. La percentuale di fotoni che escono dallo spessore s è quindi

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\alpha s} = 0.411 = 0.677 \cdot 0.607$$

In totale interagisce il 58.9% dei fotoni; come numeri assoluti, ne arrivano 10^{14} al secondo, $0.589 \cdot 10^{14}$ interagiscono e $0.411 \cdot 10^{14}$ passano.

Moltiplicando ambo i membri della (d) per $\Sigma h\nu$ si ottiene

$$I = I_0\ e^{-\alpha s} = I_0\ e^{-s/\mu} \quad , \qquad \text{(e)}$$

con I intensità dell'energia trasmessa La (e) coincide con (11.11), la deduzione che qui abbiamo dato, oltre a fornire la spiegazione fisica del processo di assorbimento della radiazione da parte della materia. chiarisce per quale motivo I decresca esponenzialmente con s anziché linearmente, come si sarebbe potuto pensare intuitivamente. Si faccia bene attenzione al fatto che è l'energia totale del fascio che decresce, in quanto proporzionale al numero di fotoni. e non l'energia del singolo fotone che, se questo non ha interagito, è sempre $h\nu$ a qualunque profondità, se ν è la frequenza incidente.

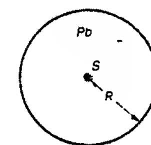
Lo spessore s_1 che occorre per ridurre di un fattore 10^{12} l'intensità si deduce da (e):

$$s_1 = -\frac{1}{\alpha} \log \frac{I}{I_0} = 15.5 \text{ cm} \quad .$$

Tra i vari materiali il piombo è quello che ha il coefficiente di assorbimento maggiore, cioè è il più opaco ai raggi X e γ; una stessa attenuazione dell'intensità si ottiene con spessori minori. Per tale motivo comunemente gli impianti a raggi X vengono schermati con pareti di piombo, si vede che spessori dell'ordine del decimetro assorbono in pratica la maggior parte delle radiazioni ($\mu = 0.56$ cm: con uno spessore che vale $n\mu$ l'intensità è ridotta di un fattore e^n).

All'energia dei fotoni considerata la diffusione e l'assorbimento sono i più importanti processi di interazione tra fotone e elettrone, nel caso trattato essi producono un effetto paragonabile. Ad energie minori, più propriamente nel campo dei raggi X, il meccanismo di assorbimento domina su quello di diffusione, cioè $\alpha_f \gg \alpha_c$: per i raggi X l'interazione con gli elettroni è prevalentemente di tipo fotoelettrico. Quando invece l'energia dei fotoni supera il valore di 1 MeV, pari al doppio dell'energia a riposo di un elettrone, può avvenire un altro processo, che ci limitiamo a menzionare e che al crescere dell'energia diviene sempre più importante, la *creazione di coppie*: interagendo con un atomo *il fotone si materializza in una coppia elettrone-positrone* e si realizza una trasformazione di energia in massa

16.13. ***Una sorgente radioattiva di Co^{60} usata per la terapia del cancro emette in un secondo $N_0 = 10^{15}$ fotoni di energia ~ 1.2 MeV. La sorgente è molto piccola e può essere ritenuta puntiforme. Essa è montata al centro di uno schermo sferico di piombo ($\varrho = 11.4 \cdot 10^3\ \text{Kg/m}^3$); per motivi di sicurezza si richiede che immediatamente all'esterno dello schermo il flusso sia al più di $N = 2$ fotoni/$\text{cm}^2 \cdot$ s. Il coefficiente di assorbimento del piombo per fotoni di questa energia è $\alpha = 0.912\ \text{cm}^{-1}$. Calcolare il raggio R dello schermo e la sua massa.***



In assenza di assorbimento, dal momento che la sorgente S è isotropa, il numero di fotoni per unità di area a distanza R sarebbe $N' = N_0/4\pi R^2$. Se si tiene conto dell'assorbimento, utilizzando la (e) del problema 16.12 abbiamo:

$$N = N'\ e^{-\alpha R} = \frac{N_0}{4\pi R^2}\ e^{-\alpha R} \quad .$$

I dati del problema richiedono $N/N_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ per cui

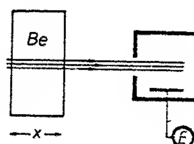
$$\frac{e^{-\alpha R}}{R^2} = 4\pi \frac{N}{N_0} = 2.51 \cdot 10^{-14} \qquad \text{(a)}$$

Tabulando la funzione $e^{-0.912R}/R^2$ con R espresso in centimetri si ricava che la (a) è soddisfatta per $R = 27.1$ cm La massa di piombo necessaria è quindi $m = 4\pi R^3 \varrho/3 = 950$ Kg

16.14. *Nel dispositivo in figura un fascio di raggi X monocromatico, dopo aver attraversato uno spessore x di berillio, entra in una camera a ionizzazione C. La corrente I_1 di ionizzazione viene misurata con lo strumento E per vari spessori x con i seguenti risultati:*

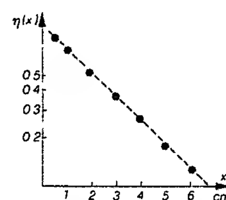
x(cm)	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0	6.0
$\eta = I_1/I_0$	0.85	0.71	0.51	0.36	0.18	0.13 .

I_0 è la corrente misurata per $x = 0$, cioè in assenza del bersaglio. Dedurre da questi dati il cammino libero medio e il coefficiente di assorbimento del berillio.



Poiché la corrente I_1 è direttamente proporzionale all'intensità I di raggi X che emerge dal bersaglio, $\eta(x)$ dice anche come varia la percentuale di energia trasmessa dal bersaglio in funzione dello spessore attraversato. Per verificare che i dati sperimentali siano consistenti con la (e) del problema 16.12, cioè che sia

$$\eta(x) = \frac{I(x)}{I_0} = e^{-\alpha x} = e^{-x/\mu} \quad , \qquad \text{(a)}$$



prendiamo il logaritmo d'ambo i membri

$$\log \eta(x) = \log \frac{I(x)}{I_0} = -\alpha x = -\frac{x}{\mu} \quad . \qquad \text{(b)}$$

Se riportiamo i valori di $\eta(x)$ in un sistema di coordinate semilogaritmico (con x in ascissa e $\log\eta(x)$ in ordinata), questi secondo la (b) devono disporsi su una retta la cui pendenza è $-\alpha$ ovvero $-1/\mu$. Dalla figura si vede che tale condizione è verificata; basta allora porsi in un punto qualunque della retta per calcolare α e μ. Per esempio, se $x = \mu$ dalla (a) risulta $I(\mu)/I_0 = e^{-1} = 0.37$ e dal grafico si vede che ad una ordinata 0 37 corrisponde un'ascissa $x = 2.85$ cm. Tale è pertanto il valore di μ mentre $\alpha = 1/\mu = 0.35$ cm^{-1}.

In complesso, anche dopo spessori di vari centimetri l'intensità trasmessa è notevole, il berillio quindi è abbastanza trasparente ai raggi X. Studiando vari materiali si conclude che in generale la trasparenza diminuisce all'aumentare del numero Z degli elettroni contenuti negli atomi che costituiscono il materiale e della densità di quest'ultimo. Ad ogni modo, il fatto che il valore del coefficiente di assorbimento dei materiali per i raggi X sia di vari ordini di grandezza più piccolo di quello per le radiazioni visibili spiega l'applicazione dei raggi X nello studio delle strutture atomiche e nella normale radiografia

Misurando α a varie energie si può ricavarne la dipendenza dall'energia e confrontare i risultati con i valori che si possono calcolare teoricamente descrivendo in un certo modo la dinamica dell'interazione tra il fotone e l'elettrone, secondo le prescrizioni dell'elettrodinamica quantistica. L'accordo è ottimo e permette di concludere che, tra le varie interazioni conosciute in natura, quella elettromagnetica si può considerare la più nota, anche quando le energie in gioco diventano molto elevate

* * *

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

17a. I problemi raccolti in questo capitolo derivano in buona parte da prove scritte svolte durante l'anno e da compiti di esame Per ciascuno di essi c'è in generale un problema analogo già svolto nel testo. Un rapido schema della soluzione e il risultato numerico sono dati alla fine.

Il capitolo è diviso in varie sezioni, allo scopo di orientare lo studente nella ricerca degli argomenti dei problemi La successione dei problemi da svolgere segue quella dei problemi risolti nel testo, però è meno rigida nel senso che in uno stesso problema proposto possono esserci quesiti su argomenti trattati in capitoli diversi.

* * *

A. CAMPI ELETTRICI

17.1 Una sfera uniformemente carica, di raggio $R_1 = 2$ cm, è racchiusa entro una superficie sferica, ad essa concentrica, di raggio $R_2 = 4$ cm, mantenuta a potenziale zero. Sapendo che il centro della sfera interna è a potenziale $V = 10^4$ V, determinare la densità ϱ della carica che forma la sfera.

17.2 Una carica è distribuita entro una sfera di raggio R con densità non uniforme data da $\varrho = c/r$, essendo c una costante. Determinare le espressioni del campo elettrico $E(r)$ e del potenziale $V(r)$ per r variabile tra zero e infinito.

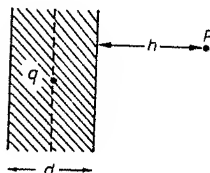
17.3 Una carica puntiforme positiva q è posta al centro di una distribuzione sferica uniforme di carica negativa di valore $-2q$ e di raggio $R = 3$ cm. Calcolare per quale valore r_0 di r il campo elettrico è nullo.

17.4 Una superficie cilindrica indefinita, di raggio $R = 2$ cm, è riempita da una carica elettrica distribuita uniformemente con densità di volume $\varrho = 8.85 \cdot 10^{-8}$ C/m^3. Calcolare il campo elettrico $E(r)$ in un punto generico distante $r < R$ dall'asse del cilindro e la d.d.p. V tra l'asse e la superficie cilindrica.

17.5 Tra due superficie cilindriche indefinite coassiali, di raggi $R_1 = 2$ cm e $R_2 = 4$ cm, è distribuita una carica elettrica con densità costante $\varrho = 17.7 \cdot 10^{-8}$ C/m^3. Calcolare l'espressione numerica del campo elettrico $E(r)$ in funzione della distanza r dall'asse del sistema, per r variabile tra zero e infinito.

17.6 Un filo rettilineo indefinito è carico con una densità lineare $-\lambda$; una superficie cilindrica indefinita, di raggio $R_0 = 2$ cm, avente il filo come asse, è carica con una densità superficiale σ. Se la d.d.p. ΔV tra il punto distante $R_1 = 1$ cm e quello distante $R_2 = 4$ cm dall'asse è nulla, calcolare il rapporto σ/λ.

17.7 Una carica puntiforme $q = 1.5 \cdot 10^{-7}$ C si trova sul piano mediano di una carica distribuita con densità costante $\varrho = 10^{-8}$ C/m^3 tra due piani paralleli indefiniti distanti $d = 2$ cm Calcolare il lavoro L necessario per trasportare q in un punto P situato all'esterno della regione carica e distante $h = 3$ cm dal piano più vicino.

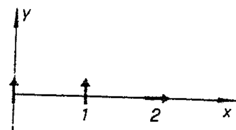


17.8 Un piano indefinito, carico con densità uniforme σ, ha un foro circolare di raggio R. Considerata la normale al piano passante per il centro O del foro e detta x la distanza da O di un punto P su tale normale, calcolare il campo elettrico $E(x)$ in P in funzione di x.

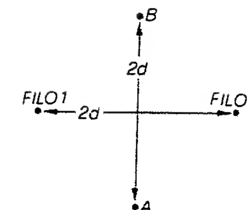
17.9 Una striscia indefinita di larghezza $2d$ è carica con densità uniforme σ Si consideri il piano ortogonale alla striscia che la divide in due parti eguali, larghe d, e su questo piano una retta x normale alla striscia Calcolare il campo elettrico $E(x)$ nei punti della retta x

17.10 Una piano indefinito è tutto carico con densità uniforme σ all'infuori di una striscia di larghezza $2d$. Definito l'asse x come nel problema precedente, calcolare il campo elettrico $E(x)$ nei punti di tale asse.

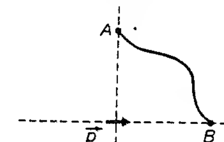
17.11 Un dipolo elettrico è disposto con momento parallelo e concorde all'asse y; sull'asse x è posto un identico dipolo, nelle due posizioni indicate. Determinare quale delle due è di equilibrio angolare e precisare se questo è stabile o instabile.



17.12 Due fili rettilinei indefiniti distano $2d$; su di essi è distribuita uniformemente una carica con densità λ positiva, eguale per i due fili Nella posizione A della figura (i fili sono ortogonali al disegno) si trova un dipolo elettrico orientato nel verso **BA**. Il dipolo viene trasportato nella posizione B impedendogli di ruotare, una volta in B si lascia che il dipolo ruoti disponendosi nella posizione di equilibrio stabile senza compiere oscillazioni In questa rotazione viene liberata l'energia W_1. Si ripete la stessa operazione, partendo dalla stessa orientazione iniziale, solo che sul filo 2 la carica è stata cambiata di segno. In questo caso l'energia che il dipolo libera ruotando vale W_2. Calcolare il rapporto W_1/W_2. Se in particolare $d = 10$ cm, $\lambda = 10^{-7}$ C/m, $p = 10^{-11}$ Cm, quanto vale W_1?



17.13 Nel campo di un dipolo di momento **p**, disposto come in figura, si osserva che occorre spendere un lavoro L che in modulo vale $2 \cdot 10^{-7}$ J per portare una carica positiva q dal punto A al punto B equidistanti dal centro del dipolo. Con la carica fissa nel punto B, se si lascia il dipolo libero di ruotare attorno al proprio asse si osserva che esso tende a ruotare spontaneamente di 180° fornendo lavoro Calcolare quanto vale questo lavoro L'.



B. CONDUTTORI E CONDENSATORI NEL VUOTO

17.14 Una sfera conduttrice, di raggio $R = 10$ cm, possiede una carica q Un elettrone è proiettato radialmente, dalla superficie della sfera verso l'esterno, con velocità iniziale $v = 10^7$ m/s e ridotto alla quiete, per azione del campo elettrico, a una distanza $d = 10$ cm dalla superficie. Si determini il valore di q.

17.15 Tra due superficie sferiche concentriche conduttrici si applica una data d.d p. V_0 la superficie esterna di raggio R_2 è a potenziale zero, quella interna di raggio R_1 è a potenziale V_0 Detto $E(R_1)$ il valore limite del campo per r tendente a R_1 con $r \geqslant R_1$, determinare per quale relazione tra R_1 e R_2 $E(R_1)$ è minimo e dare l'espressione di tale valore minimo E_{min} in funzione di V_0 e R_2.

17.16 Con riferimento al problema precedente si consideri una terza superficie sferica di raggio R intermedio tra R_1 e R_2 e con potenziale V tale che $E(R_1)$ e $E(R)$ siano eguali; $E(R)$ è il valore limite del campo per r tendente a R con $r \geqslant R$. Determinare per quale relazione tra R_1 e R e tra R e R_2 tali campi sono minimi, quanto vale in tal caso V in funzione di V_0 e qual è l'espressione del comune valore minimo E_{min} dei campi, confrontare il risultato con quello del problema precedente.

17.17 Una sfera conduttrice di raggio $r = 1$ mm è posta sull'asse di un disco di raggio $R = 10$ cm, carico con densità $\sigma = 10^{-11}$ C/m^2 uniforme; il centro della sfera dista $d = 30$ cm dal centro del disco. La sfera è collegata a terra da un sottile filo conduttore, così che il suo potenziale è nullo. Calcolare la carica q_i indotta sulla sfera.

17.18 Due condensatori C_A e C_B sono collegati in serie ai morsetti di un generatore ($V_0 = 100$ V). Le d.d.p ai capi dei condensatori sono $V_A = 60$ V e $V_B = 40$ V. Collegando in parallelo a C_A un condensatore C di capacità 2μF V_B diviene $V'_B = 90$ V. Calcolare i valori delle capacità di C_A e C_B.

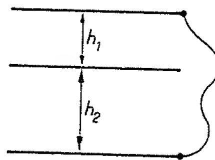
17.19 Due condensatori C_1 e C_2 vengono caricati a $V_1 = 100$ e $V_2 = 200$ V e poi connessi in parallelo; si constata che la d.d.p. ai capi vale $V_F = 120$ V e che nel processo è stata dissipata l'energia $W = 0.6$ J. Calcolare i valori delle capacità di C_1 e C_2.

17.20 Dimostrare che dati due condensatori in parallelo la maniera in cui la carica q si ripartisce tra di essi è quella che rende minima l'energia elettrostatica totale W

17.21 La capacità di un condensatore variabile può essere portata da $C_1 = 100$ a $C_2 = 500$ pF ruotando una manopola da 0° a 180°. Quando è in quest'ultima situazione il condensatore viene caricato a $V_0 = 200$ V e poi isolato. Se la manopola viene riportata nella posizione 0° calcolare il lavoro L speso e la d.d.p. finale V_1.

17.22 Un condensatore piano (Σ, h) viene caricato e quindi isolato dal generatore: in queste condizioni la sua carica è $q = 10^{-8}$ C e la forza con cui si attirano le armature vale $F = 5.65 \cdot 10^{-4}$ N Al tempo $t = 0$ una delle due armature, di massa $m = 5$ g, viene lasciata libera di muoversi e il moto si assume privo di attrito in un piano orizzontale Al tempo $t = 0.421$ s l'armatura in moto tocca quella ferma. Calcolare il valore della capacità iniziale C del condensatore

17.23 Tre piastre conduttrici, di superficie $\Sigma = 1$ m^2, sono disposte parallelamente tra loro, come mostrato in figura ($h_1 = 5$ cm, $h_2 = 8$ cm), la piastra inferiore è collegata con un filo conduttore a quella superiore La piastra intermedia è isolata e prima di essere inserita tra le altre due è stata caricata con densità superficiale uniforme $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$ C/m^2 Calcolare le densità σ_1 e σ_2 con cui la carica della piastra isolata si distribuisce sulle due facce. Se la piastra isolata viene lasciata libera di muoversi si nota che essa viene attirata dalla piastra superiore. Calcolare il lavoro L delle forze del campo per uno spostamento di 1 cm (si trascuri il peso della piastra).



C. CONDENSATORI CON DIELETTRICI

17.24 Due condensatori sono collegati in serie a un generatore ($V_0 = 750$ V), un condensatore ha capacità $C_2 = 7 \cdot 10^{-10}$ F, l'altro, C_1, è piano ($\Sigma = 800$ cm^2, $h = 2$mm) ed ha l'aria come dielettrico. Una lastra di materiale dielettrico ($\varkappa = 2.5$) viene inserita in C_1 riempiendolo completamente Calcolare la variazione di carica Δq_2 in C_2, la variazione di d.d.p. ΔV_1 ai capi di C_1, lo scambio di energia L_{gen} tra il sistema di condensatori e il generatore in seguito all'inserzione della lastra, la carica di polarizzazione q_p sulle facce del dielettrico.

17.25 In un condensatore piano lo spazio tra le armature è riempito per metà da una lastra di materiale dielettrico ($\varkappa_2 = 9$), con le facce parallele alle armature. e per metà da aria. Se lo spessore totale è $h = 1$ cm, calcolare qual è la massima d.d.p. V_{max} applicabile a tale condensatore.

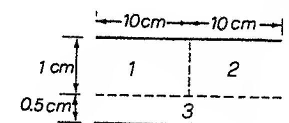
17.26 Un condensatore piano (Σ, $2h$) viene caricato e quindi isolato. A carica costante si supponga di poter introdurre tra le armature, parallelamente a esse. una lastra di dielettrico ($\varkappa$, h) oppure di metallo (stesso spessore h). Si constata che per estrarre dal condensatore la lastra di dielettrico bisogna compiere un lavoro L_1, mentre per estrarre quella di metallo il lavoro vale $L_2 = 3L_1$ Calcolare il valore di $\varkappa$.

17.27 Due condensatori piani eguali hanno le armature quadrate di lato b, distanti tra loro $h = 1$ cm, e sono connessi a due generatori eguali. Nel primo condensatore è parzialmente inserita, parallelamente alle armature, una lastra conduttrice di spessore $s = h/2$ e base b^2, nel secondo condensatore è parzialmente inserito un blocco di dielettrico, spesso h e con base b^2. Calcolare quanto deve valere $\varkappa$ affinché le forze con cui i due condensatori attirano rispettivamente la lastra e il blocco siano eguali.

17.28 Tra le armature di un condensatore piano, quadrate di lato $b = 0.5$ m e distanti $h = 1$ cm, sono poste due lastre di materiali dielettrici ($h_1 = 3$ mm. $\varkappa_1 = 1.5$. $h_2 = 7$ mm, $\varkappa_2$) Quando ai capi del condensatore è applicata una d.d.p $V_0 = 80 \cdot 10^3$ V il campo elettrico nel primo dielettrico vale $E_1 = 1.5 \; 10^7$ V/m. Calcolare il valore di $\varkappa_2$. Se poi il condensatore viene caricato con una carica $q = 10^{-5}$ C e quindi isolato, calcolare i valori dei campi **E** e **D** in ciascun dielettrico, il valore della densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie di separazione tra i due dielettrici, la d.d.p. V ai capi del condensatore, il lavoro L che si dovrebbe compiere per estrarre i due dielettrici

17.29 Lo spazio tra le armature di un condensatore piano ($\Sigma = 100$ cm^2) è riempito da tre lastre dielettriche ($h_1 = 0.5$ cm, $\varkappa_1 = 25$. $h_2 = 0.3$ cm, $\varkappa_2 = 4$, $h_3 = 0.2$ cm, $\varkappa_3 = 8$). Ai capi del condensatore è applicata una d.d.p. $V = 10^3$ V. Calcolare l'energia elettrostatica W del condensatore e il valore e il segno delle cariche di polarizzazione, specificando ove esse appaiono.

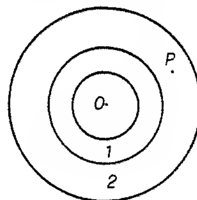
17.30 Un condensatore piano con le armature quadrate di lato 20 cm ha come dielettrico tre diversi materiali ($\varkappa_1 = 1.5$, $\varkappa_2 = 2.5$, $\varkappa_3 = 2.0$) aventi le dimensioni segnate in figura. Calcolare la capacità C del condensatore.



17.31 Una sfera conduttrice di raggio R con una carica q è immersa in una grande vasca piena d'olio con costante dielettrica relativa $\varkappa = 4.6$. Calcolare il rapporto q_p/q tra la carica di polarizzazione q_p che compare sulla superficie sferica a contatto con la sfera e la carica libera q.

17.32 Una sfera conduttrice, con una carica positiva $q = 10^{-9}$ C, viene posta al centro di una cavità ricavata entro un'altra sfera conduttrice inizialmente scarica. Il raggio esterno del sistema vale $R_2 = 9$ cm. Successivamente l'intercapedine tra le due sfere viene riempita con un dielettrico ($\varkappa$) e il processo è a carica costante. La differenza tra l'energia iniziale del sistema senza dielettrico e quella finale con dielettrico vale $W_i - W_f = 6.25 \cdot 10^{-9}$ J mentre il rapporto W_f/W_i vale 0.9. Calcolare il valore di $\varkappa$ e la capacità iniziale C del condensatore sferico formato dai due conduttori

17.33 Tre superficie metalliche sferiche sono concentriche; quella interna possiede una carica $q = 10^{-8}$ C. Successivamente il sistema viene così modificato: prima la regione **1** viene riempita con un dielettrico ($\varkappa_1 = 3$), poi anche la regione 2 subisce un trattamento analogo, con $\varkappa_2 = 5$. Calcolare nei tre casi in cui a) non ci siano dielettrici, b) ci sia solo il primo dielettrico, c) ci sia anche il secondo dielettrico, il campo elettrico E nel punto P della regione 2 distante $r = 30$ cm dal centro.



17.34 Tre conduttori sferici cavi di spessore trascurabile, concentrici, hanno raggi R_1, R_2, R_3 con $R_3 = 1$ m. Depositata una carica q sul conduttore più interno si osserva che il potenziale di quello più esterno, rispetto all'infinito, diventa $V_3 = 360$ V Si immette poi del gas ($\varkappa$) tra i conduttori di raggi R_2 e R_3. La variazione di energia elettrostatica del sistema è $\Delta W = 4 \cdot 10^{-6}$ J, la d.d.p tra i conduttori di raggi R_2 e R_3 risulta $V_2 - V_3 = 200$ V e il potenziale del conduttore più interno, di raggio R_1, vale $V_1 = 10^3$ V. Calcolare la carica q presente sui tre conduttori, il valore di $\varkappa$, i raggi R_1 e R_2, le densità di carica di polarizzazione σ_2 e σ_3 presenti sulle superficie di raggi R_2 e R_3.

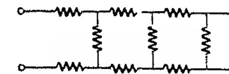
17.35 Entro il dielettrico di un condensatore piano sono praticate due sottili cavità parallelepipede, una con la base parallela e una con la base ortogonale alle armature. Nella prima si misura $E_1 = 2 \cdot 10^3$ V/m, nella seconda $E_2 = 10^3$ V/m Calcolare la suscettività dielettrica χ del materiale e la densità di carica libera σ_l sulle armature.

D. CORRENTI CONTINUE. CIRCUITI RESISTIVI E RC

17.36 Un filo conduttore di sezione $\Sigma = 10^{-8}$ m^2 è costituito per una parte da una lega di resistività $\varrho_1 = 125 \cdot 10^{-8}$ Ωm e per un'altra da una lega di resistività $\varrho_2 = 30 \cdot 10^{-8}$ Ωm; se esso è percorso da una corrente $i = 0.4$ A calcolare

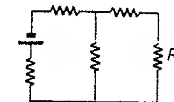
la discontinuità del campo elettrico ΔE sulla superficie di separazione tra le due leghe e il valore della densità di carica elettrica σ che ivi appare.

17.37 La rete di resistori mostrata in figura si estende indefinitamente verso destra; il valore delle singole resistenze è $R = 1\,\Omega$. Calcolare la resistenza totale R_0 della rete vista dai terminali d'ingresso (a sinistra)

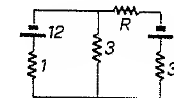


17.38 Un generatore ($V_0 = 30$V, $R_0 = 0$) è connesso a due resistori (R_1, R_2) Quando essi sono in parallelo la potenza dissipata è $W_1 = 270$ W, quando sono in serie è $W_2 = 60$ W Calcolare i valori delle resistenze R_1 e R_2.

17.39 Nel circuito in figura R_x è variabile mentre gli altri quattro resistori hanno tutti la stessa resistenza $R = 300$ Ω. Calcolare quando è massima la potenza P_x spesa su R_x



17.40 Calcolare, per il circuito in figura, quanto deve valere R affinché la corrente i che l'attraversa valga 0.4 A. I valori degli altri componenti sono espressi in volt e in ohm

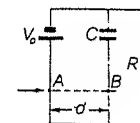


17.41 Due superficie cilindriche conduttrici indefinite, coassiali con raggi $R_1 = 1$ mm e $R_2 = 5$ mm, sono separate da un isolante di resistività $\varrho = 10^{14}$ Ωm Calcolare la resistenza per unità di lunghezza R_l offerta al passaggio di una corrente radiale.

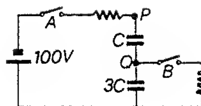
17.42 Un condensatore piano ($C = 4\,\mu$F, $h = 1$ mm), riempito con un isolante, è inizialmente scarico Ad un certo istante viene connesso a un generatore ($V_0 = 3 \cdot 10^5$V, $R_0 = 10^7\,\Omega$), dopo $t = 27.7$ s il condensatore si perfora Calcolare la rigidità dielettrica E_s dell'isolante.

17.43 Un condensatore di capacità C, carico a una d.d.p $V = 10^3$V, viene scaricato attraverso una resistenza R, la costante di tempo della scarica è $\tau_1 = 10^{-3}$s. In tale processo il lavoro speso su R è $L_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ J. Successivamente tra le armature del condensatore viene introdotto un dielettrico ($\varkappa = 5$) che presenta una certa resistenza di perdita Se si carica il condensatore alla stessa V e lo si lascia scaricare ancora su R, il lavoro speso su questa vale $L_2 = 20 \cdot 10^{-3}$ J. Calcolare il lavoro L^* speso sulla resistenza di perdita R^* e il valore di quest'ultima

17.44 Nel circuito in figura il condensatore è carico alla d d p. V_0; all'istante $t = 0$ un proiettile taglia il filo in A e poi, all'istante $t = t_0$, il filo in B. Il decremento percentuale di d.d.p. ai capi del condensatore risulta $\Delta V/V_0 = 2 \cdot 10^{-2}$. Se $C = 0.5\,\mu$F, $R = 10^7$ Ω, $d = 10$ m, calcolare la velocità v del proiettile.

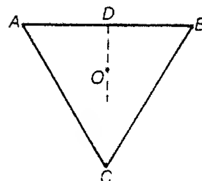


17.45 Nel circuito in figura al tempo $t=0$ viene chiuso l'interruttore A. Ad equilibrio raggiunto quanto vale $V(Q)$? Viene poi riaperto A e chiuso B. Ad equilibrio raggiunto quanto vale $V(P)$?

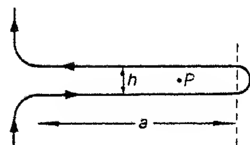


E. CAMPI MAGNETICI STATICI

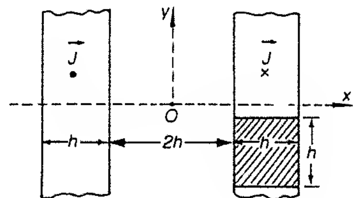
17.46 Un triangolo equilatero, di lato l e altezza $h = 3$ cm, è formato da un conduttore di sezione trascurabile percorso da corrente. Calcolare il raggio R della circonferenza, concentrica e complanare al triangolo tale che, percorsa dalla stessa corrente, produca nel centro O lo stesso campo magnetico prodotto dal triangolo; si ricordi che $OD = DC/3$



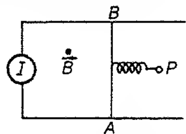
17.47 Un nastro di materiale isolante viene fatto scorrere con velocità costante $v = 20$ m/s secondo il percorso indicato in figura. Esso possiede una densità di carica positiva $\sigma = 10^{-5}$ C/m^2, uniforme. Sia la distanza a che la lunghezza b del nastro sono molto grandi rispetto alla separazione h. Calcolare in un punto P della zona centrale del sistema direzione, verso e modulo del campo magnetico **B** generato dalle cariche in moto.



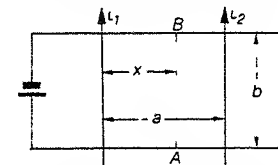
17.48 Due piastre conduttrici piane parallele indefinite, distanti $2h = 10$ cm e spesse $h = 5$ cm, sono percorse in versi opposti da una corrente di densità $j = 2 \cdot 10^6$ A/m^2 ortogonale al disegno.
Calcolare in funzione di x il campo magnetico $\mathbf{B}(x)$ in modulo, direzione e verso, in particolare B_0 per $x = 0$ e B_1 per $x = 1.5h$. Calcolare inoltre la pressione p agente su ognuna delle piastre e l'energia magnetica W contenuta nel cubo di lato h (vedi figura) tutto interno alla piastra e con gli spigoli paralleli agli assi



17.49 Nel circuito in figura I è un generatore di corrente costante $i = 1$ A. La sbarra conduttrice AB, lunga $b = 10$ cm, è tenuta ferma nella posizione $x = 0$ ed è collegata al punto P fisso tramite una molla di costante elastica $K = 10$ N/m. Ortogonalmente al piano del disegno c'è un campo magnetico uniforme e costante, diretto verso il lettore, di modulo $B = 1$ T. All'istante $t = 0$ la sbarretta viene liberata e può muoversi scorrendo senza attrito sugli altri conduttori e mantenendosi parallela alla direzione che aveva inizialmente. Calcolare la posizione di equilibrio x_0 assunta dalla sbarra.

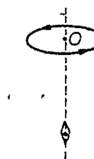


17.50 Due fili rettilinei sono percorsi da due correnti i_1 e i_2 aventi lo stesso verso; la distanza tra i due fili è a. Nel piano dei fili c'è un circuito costituito da due conduttori rettilinei paralleli e da un generatore che fa circolare la corrente i_3 quando il circuito è chiuso dalla sbarretta AB lunga b (il circuito è isolato elettricamente dai fili). Si sa che con $i_1 = i_2 = 10$ A la forza per unità di lunghezza tra i due fili vale $F = 2 \cdot 10^{-4}$ N/m. Determinare, quando $i_1 = 7$ A e $i_2 = 3$ A, l'eventuale posizione di equilibrio x della sbarretta AB e ripetere il calcolo nel caso in cui la corrente i_2 fosse invertita.



17.51 Una piccola spira quadrata di lato $a = 5$ mm, percorsa da una corrente $i_1 = 0.1$ A, è sospesa verticalmente al centro di un solenoide rettilineo, lungo $d = 50$ cm e di raggio $r = 5$ cm. Il solenoide, le cui spire sono di rame ($\varrho = 1.8 \cdot 10^{-8}$ Ωm), è percorso da una corrente $i_2 = 100$ A, distribuita uniformemente sulla sezione del conduttore con densità $j = 1$ A/mm^2. La potenza totale dissipata nel solenoide per effetto Joule è pari a $P = 530$ W. Calcolare il valore del campo magnetico B_0 nel centro del solenoide, supponendolo indefinito, e il lavoro L che occorre spendere per spostare la spira di 90° rispetto alla sua posizione di equilibrio.

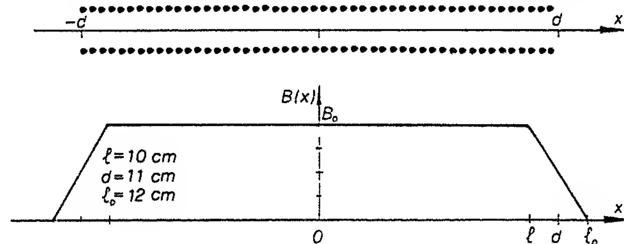
17.52 Una bobina compatta è formata da $N = 3$ spire, di raggio $R = 2$ cm, ed è percorsa da una corrente $i = 200$ A nel verso indicato. Sull'asse della bobina, che è posta in un piano orizzontale, a distanza $z = 10$ cm da O, si trova in equilibrio un minuscolo ago magnetico, col momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ verticale che punta verso il basso. Se la massa dell'ago vale $m = 4 \cdot 10^{-2}$ g, calcolare modulo e verso del momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$



17.53 Una bobina compatta, costituita da $N = 100$ spire di raggio $R = 20$ cm, è percorsa da una corrente $i = 0.5$ A. Un ago magnetico con momento d'inerzia $I = 25 \cdot 10^{-7}$ Kgm^2, posto al centro della bobina, ha un periodo $T = 2$s per le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio. Se si fa partire l'ago, di massa $m = 10$ g, orientato col momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ parallelo e concorde a **B**, con velocità $v = 2.5 \cdot 10^{-2}$ m/s dal centro della bobina lungo l'asse, si osserva che si arresta in un punto P distante x_0 dal centro. Calcolare il valore di x_0 e la forza F risentita dall'ago nel punto P.

17.54 Due spire sono poste nello stesso piano e hanno lo stesso centro: quella interna ha raggio $R_1 = 10$ cm, quella esterna $R_2 = 20$ cm; esse sono percorse dalle correnti i_1 e i_2. Nel centro delle spire è sospeso, in equilibrio, un piccolo dipolo magnetico. Si osserva che il campo magnetico nel centro delle spire con le correnti equiverse vale $B_1 = 4\pi \cdot 10^{-5}$ T, che il lavoro per ruotare di 180° il dipolo con le correnti opposte vale $L_1 = 8\pi \cdot 10^{-9}$ J, mentre il lavoro per ruotare di 180° il dipolo quando solamente i_2 circola vale $L_2 = 12\pi \cdot 10^{-9}$ J. Calcolare i_1, i_2 e il momento magnetico μ del dipolo.

17.55 Il campo magnetico lungo l'asse di un solenoide ha approssimativamente l'andamento $B(x)$ mostrato in figura. Una piccola bobina compatta, di mas-



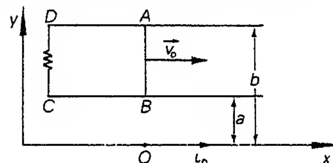
sa $m = 40$ g, costituita da $N = 100$ spire di raggio $r = 1$ cm, percorsa da una corrente $i = 3.183$ A, può scorrere senza attrito lungo una guida parallela all'asse x. All'istante $t = 0$ viene lasciata libera a un'estremità del solenoide ($x = d$), quando passa per il centro ha una velocità $v_0 = 0.5$ m/s e quando raggiunge l'altro estremo del solenoide è trascorso un tempo t. Calcolare il valore del campo B_0 e del tempo t.

17.56 Un conduttore cilindrico di raggio $R_1 = 1$ cm è posto sull'asse di una guaina cilindrica conduttrice di raggio $R_2 = 2$ cm; nell'intercapedine c'è il vuoto. Il sistema è lungo $l = 50$ cm, ma si trascurino le perturbazioni dovute alla lunghezza finita. Detto L il coefficiente di autoinduzione del sistema e C la sua capacità, calcolare $(L/C)^{1/2}$ precisando l'unità di misura. Se tra i due conduttori è applicata una d.d.p. $V = 10^3$ V calcolare la forza F con cui il conduttore esterno è attirato da quello interno. Ripetere il calcolo se invece nel sistema circola una corrente $i = 6$ A, in un verso nel conduttore interno, nel verso opposto nel conduttore esterno.

17.57 Due circuiti C_1 e C_2, contenuti in due piani paralleli, sono percorsi dalle correnti $i_1 = 10$ A e $i_2 = 3 \cdot 10^{-2}$ A. Il loro coefficiente di mutua induzione ha l'espressione $M = K/(r + a)$ con $K = 1.5 \cdot 10^{-7}$ Hm e $a = 1$ cm. Calcolare il modulo della forza **F** cui i circuiti sono soggetti quando $r = 2$ cm.

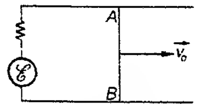
F. FORZE ELETTROMOTRICI INDOTTE

17.58 Si considerì un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente costante i_0 e due guide conduttrici parallele ad esso, a distanza a e b. Le due guide sono collegate da una resistenza R, su di esse scivola senza attrito una sbarretta trasversale di massa m. All'istante $t = 0$ la sbarretta transita per il punto di coordinata $x = 0$ con velocità v_0 diretta secondo l'asse x positivo. Determinare la corrente



indotta $i(x)$ nel circuito $ABCD$, la velocità della sbarretta $v(x)$, la distanza x_0 dall'origine del punto in cui la sbarretta si arresta, l'energia W dissipata per effetto Joule tra l'istante $t = 0$ e quello di arresto.

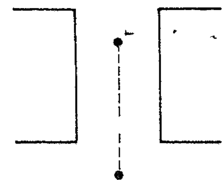
17.59 Una sbarretta conduttrice AB, di massa $m = 100$ g, scorre senza attrito su due rotaie conduttrici, parallele e orizzontali, distanti $b = 20$ cm, collegate ad un generatore di f.em. $\mathscr{E}(t)$. Il dispositivo è immerso in un campo magnetico $B = 0.5$ T, uniforme e normale al piano delle rotaie. All'istante $t = 0$ la sbarretta ha una velocità iniziale $v_0 = 5 \cdot$ m/s diretta come in figura e la f.em. $\mathscr{E}(t)$ varia nel tempo così da mantenere nel circuito una corrente costante i di verso tale da frenare il moto della sbarretta. La resistenza complessiva del circuito è $R = 0.1$ Ω. Sapendo che la sbarretta si arresta all'istante $t_0 = 0.25$ s calcolare il valore di i, la legge con cui varia la f.em. $\mathscr{E}(t)$, l'energia W fornita dal generatore tra $t = 0$ e $t = t_0$.



17.60 Un conduttore di lunghezza $b = 10$ cm e massa $m = 5$ g è appoggiato su due rotaie orizzontali, parallele tra loro e distanti b, in modo da risultare normale ad esse. L'insieme è posto in un campo magnetico verticale, uniforme e costante, di modulo $B = 10^{-2}$ T. Una sorgente di f.em. $\mathscr{E}(t)$ variabile alimenta il circuito, la cui resistenza complessiva è $R = 1$ Ω, mantenendovi una corrente costante $i = 1$ A. Al tempo $t = 0$ la velocità della sbarra è $v_0 = 1$ m/s, diretta in senso inverso al moto che la sbarra assumerebbe spontaneamente sotto l'azione del campo **B**. Determinare la legge $v(t)$ con cui varia la velocità della sbarra e in particolare il valore per $t = 5$ s, la legge con cui varia la f.em. $\mathscr{E}(t)$ fornita dal generatore e in particolare il valore per $t = 5$ s, il lavoro L eseguito sulla sbarra nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 5$ s.

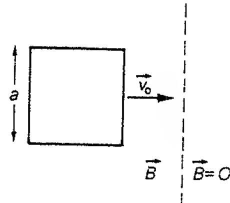
17.61 Una sbarra orizzontale (densità $\delta = 2 \cdot 10^3$ Kg/m³, resistività $\varrho = 2 \cdot 10^{-6}$ Ωm) può scivolare senza attrito su due guide parallele inclinate di $\theta = 30°$ rispetto al piano orizzontale, le due guide, di resistenza trascurabile, sono cortocircuitate a una estremità. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme di modulo $B = 0.4$ T diretto secondo la verticale. All'istante $t = 0$ la sbarra viene lasciata libera di muoversi. Calcolare la sua velocità v dopo 10 s.

17.62 Una spira quadrata di alluminio (densità $\delta = 2.7 \cdot 10^3$ Kg/m³, resistività $\varrho = 2.8 \cdot 10^{-8}$ Ωm) è posta tra le espansioni polari di un elettromagnete. Il lato superiore della spira si trova in una zona in cui il campo magnetico è uniforme e vale $B = 1.5$ T, il lato inferiore si trova in una zona in cui il campo magnetico è nullo; si assume che questa situazione resti sempre realizzata. All'istante $t = 0$ la spira è lasciata libera di cadere sotto l'azione del proprio peso. Ricavare la legge del moto $z(t)$ e dimostrare che la velocità di caduta $v(t)$ tende ad un valore limite v_∞; calcolare tale valore.

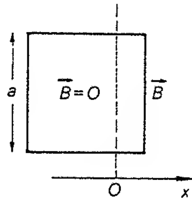


17.63 Lo spazio esterno a una superficie cilindrica verticale è sede di un campo magnetico **B**, ortogonale alla superficie e di modulo 0.1 T. Una spira di raggio $r = 10$ cm, appena maggiore del raggio della superficie cilindrica, massa $m = 5$ g e resistenza $R = 0.1\ \Omega$, coassiale alla superficie, all'istante $t = 0$ è lasciata cadere sotto l'azione del proprio peso. Dare la legge con cui variano nel tempo la velocità di caduta $v(t)$ e la corrente indotta nella spira $i(t)$.

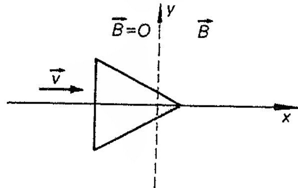
17.64 Una spira conduttrice quadrata, di lato $a = 10$ cm, massa $m = 0.1$ Kg e resistenza $R = 10^{-2}\ \Omega$, è in quiete in un piano orizzontale ed è immersa in un campo magnetico uniforme **B**, ad essa ortogonale. Alla spira viene impressa una velocità v_0 ed essa si muove di moto traslatorio, cominciando a uscire dal campo magnetico all'istante $t = 0$. Si osserva che la velocità della spira si è dimezzata al tempo $t = 30.81 \cdot 10^{-3}$ s misurato a partire dall'istante $t = 0$ e che essa si ferma dopo aver percorso fuori dal campo una distanza pari a $x_0 = 8.9$ cm. Calcolare v_0, B e la carica complessiva q che percorre la spira durante il processo.



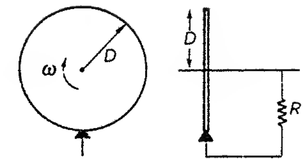
17.65 Una spira quadrata conduttrice, di lato $a = 60$ cm, massa $m = 60$ g, resistenza $R = 8 \cdot 10^{-2}\ \Omega$, si muove su un piano senza attrito. È presente un campo magnetico ortogonale al piano, nullo per $x \leqslant 0$ e di modulo $B(x) = \alpha x$ per $x \geqslant 0$ con $\alpha = 10$ T/m. Quando il lato anteriore della spira entra nel campo la velocità vale v_0, dopo aver percorso una distanza $h = 4$ cm la spira si arresta. Dimostrare che la velocità varia con la distanza secondo la legge $v(x) = v_0 - \beta x^3$ e calcolare i valori di β e di v_0, l'energia W dissipata nella spira durante l'intero processo, la carica q che attraversa la spira nello stesso periodo.



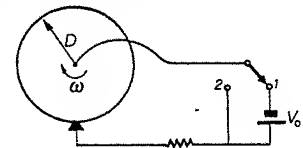
17.66 Una spira conduttrice di resistenza $R = 5\,\Omega$, a forma di triangolo equilatero di lato $l = 40$ cm, si muove di moto uniforme lungo l'asse x con velocità v. Ad un certo istante essa entra in una regione sede di un campo magnetico uniforme e costante, di modulo B, ortogonale al piano della spira. Si sa che quando la spira è entrata per metà della sua altezza la corrente che circola in essa vale $i = 1$ A e che una particella, con rapporto $q/m = 0.1$ C/Kg, che si muova nel piano xy con la stessa velocità della spira, descrive un arco di circonferenza di raggio $r = 10^3$ m. Calcolare il valore di B e la velocità v della spira.



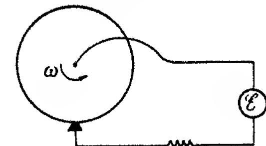
17.67 Un sottile disco metallico, di raggio $D = 20$ cm e spessore trascurabile, viene messo in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare $\omega_0 = 100$ rad/s, il momento d'inerzia vale $I = 2 \cdot 10^{-2}$ Kgm^2, l'attrito è trascurabile. Tramite un contatto al bordo del disco e un filo di collegamento tra tale contatto e l'asse del disco si forma un circuito chiuso (attraverso il disco) la cui resistenza totale è $R = 0.5\ \Omega$. All'istante $t = 0$ e in un tempo trascurabile viene acceso un campo magnetico uniforme di valore $B = 1$T, ortogonale al disco; tale campo resta costante fino all'istante $t = 25$ s e quindi viene spento rapidamente. Calcolare la velocità angolare finale ω_F del disco e la quantità di calore Q dissipata durante il processo nella resistenza.



17.68 Un sottile disco conduttore, di raggio $D = 20$ cm e momento d'inerzia $I = 2 \cdot 10^{-3}$ Kgm^2, è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, ad esso ortogonale, di modulo $B = 0.2$ T. Tramite un contatto strisciante è possibile far passare dall'asse ad un punto sul bordo una corrente radiale erogata da un generatore di f.em. V_0. In seguito al passaggio di corrente il disco si muove con una velocità angolare di regime ω_0. Al tempo $t = 0$ il generatore viene escluso dal circuito commutando la levetta nella posizione 2 e nel tempo Δt in cui la velocità angolare passa da ω_0 a $\omega = \omega_0/3$ si dissipa nel circuito un'energia $W = 80$ J. Calcolare i valori di ω_0 e V_0.



17.69 Un sottile disco conduttore, di raggio $D = 10$ cm e momento d'inerzia $I = 1.4 \cdot 10^{-3}$ Kgm^2, è immerso in un campo magnetico uniforme, di modulo $B = 0.2$ T, ad esso ortogonale. All'istante $t = 0$ il disco sta ruotando con velocità angolare $\omega_0 = 200$ rad/s. Tramite un generatore di f.em. $\mathscr{E}(t)$ e un contatto strisciante si fa passare nel circuito, a partire da $t = 0$, una corrente costante i di verso tale da frenare il moto del disco. La resistenza complessiva del circuito è $R = 10^{-2}\ \Omega$. Sapendo che il disco si arresta all'istante $t = 5.6$ s calcolare il valore di i, la legge con cui varia la f.em. $\mathscr{E}(t)$, l'energia W fornita dal generatore nell'intervallo di tempo da $t = 0$ a $t = 5.6$ s.

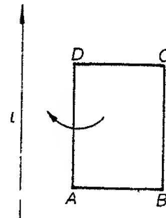


17.70 Un anemometro è costituito da due superficie semisferiche poste alle estremità di una sbarra orizzontale lunga $L = 1$ m, che può ruotare attorno al suo centro. Sull'asse di rotazione è montata una spira quadrata di lato $a = 20$ cm. Se la componente orizzontale del campo magnetico terrestre è $B = 0.5 \cdot 10^{-4}$ T e la f.em. indotta massima è $\mathscr{E}_0 = 10^{-4}$ V, calcolare la velocità v del vento.

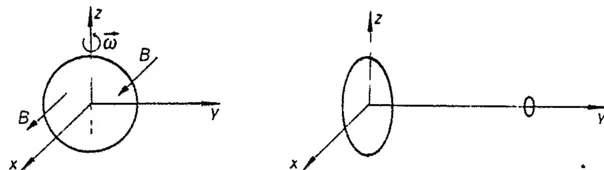
17.71 Una spira circolare di rame ($\rho = 1.78 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m), con diametro medio $D = 10$ cm e sezione $\Sigma = 2$ mm^2, può ruotare senza attrito attorno a un suo

diametro. Essa è immersa in un campo magnetico uniforme e costante, di modulo $B = 0.5$ T, ortogonale all'asse di rotazione, ed è mantenuta in rotazione con una velocità angolare costante $\omega = 62.8$ rad/s Calcolare l'energia W dissipata in un secondo

17.72 Una spira rettangolare, di lati $AD = 10$ cm, $DC = 8$ cm e resistenza $R = 1.5\ \Omega$, giace in un piano contenente un filo conduttore rettilineo indefinito percorso dalla corrente $i = 1$ A. Essa viene fatta ruotare di 180° attorno al lato AD, disposto parallelamente al filo alla distanza $d = 15$ cm. Calcolare la carica q che percorre la spira durante la rotazione.

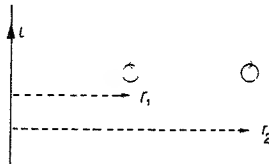


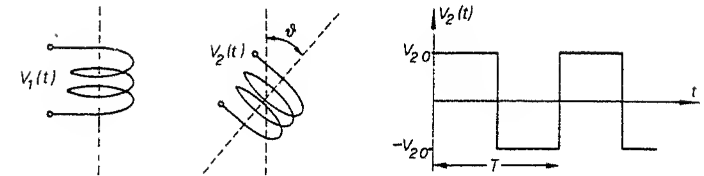
17.73 Una bobina circolare, costituita da $N = 10$ spire di raggio $D = 20$ cm, avente resistenza $R = 4\ \Omega$, ruota attorno al suo diametro verticale con velocità angolare $\omega = 2.25$ rad/s in una regione sede di un campo magnetico uniforme e costante, parallelo all'asse x Se l'energia dissipata per ogni giro vale $W = 2.79$ J calcolare il modulo del campo magnetico B e la carica totale q che fluisce nella bobina durante mezzo giro



Si tiene ferma la bobina nel piano xz e si pone una seconda bobina, costituita da $n = 5$ spire di raggio $d = 1$ cm, percorsa dalla corrente $i = 6$ A, nel centro della prima spira, allontanandola poi lungo l'asse y fino all'infinito, durante il processo le due bobine rimangono sempre parallele Determinare il coefficiente di mutua induzione $M(y)$ tra le bobine in funzione della loro distanza y e la carica totale q che fluisce nella prima bobina durante l'intero processo di allontanamento

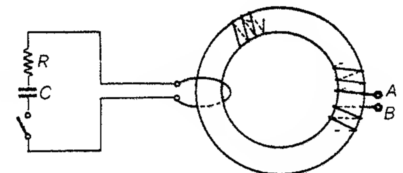
17.74 Un filo conduttore rettilineo indefinito è percorso da una corrente $i = 100$ A. Una piccola spira di area $\Sigma = 4\ \text{cm}^2$, composta da $N = 50$ spire, giace in un piano che contiene il filo a distanza $r_1 = 20$ cm da questo. La resistenza della spira è $R = 0.1\ \Omega$ e un generatore di f.em $V_0 = 1$ V è inserito in serie alla spira Questa viene spostata lentamente fino a una distanza $r_2 = 40$ cm e lì rovesciata. Calcolare il lavoro W_2 che si deve spendere per compiere questo movimento Successivamente il generatore viene sconnesso dalla spira che viene riportata con velocità costante $v = 10$ m/s fino alla distanza r_1. Calcolare l'energia W_1 dissipata nella spira durante questo movimento e la carica totale q che percorre la spira Tutti gli spostamenti avvengono ortogonalmente al filo e la spira resta sempre nello stesso piano.



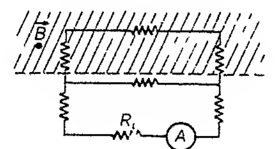


17.75 Due bobine molto compatte hanno gli assi che formano un angolo θ La bobina 2 è composta da $N_2 = 10$ spire di filo di rame di diametro $d = 0.2$ mm e resistività $\varrho = 1.8 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m, il raggio è $R_2 = 10$ mm. Quando ai capi della bobina 1 viene applicata una f em. $V_1(t)$ nella bobina 2 viene indotta una f em. $V_2(t)$ il cui andamento è riportato in figura· si tratta di un'onda quadra di ampiezza $V_{2\,0} = 3 \cdot 10^{-3}$ V e periodo $T = 10^{-4}$s. Cambiando opportunamente l'orientazione della bobina 2 si trova che l'ampiezza dell'onda quadra assume il valore massimo $V_{2\,\max} = 6 \cdot 10^{-3}$ V Calcolare il valore di θ, la variazione massima ΔB_1 del campo magnetico generato dalla bobina 1 nella regione occupata dalla bobina 2, supponendolo ivi uniforme, l'energia W dissipata nella bobina 2 durante un periodo T

17.76 Un solenoide toroidale in aria, con sezione $\Sigma = 1\ \text{cm}^2$ e raggio medio $r = 10$ cm, è composto da $N = 10^4$ spire Ad esso è concatenata una spira, che giace nel medesimo piano di una delle spire del solenoide ed è inserita in un circuito RC, con $R = 100\ \Omega$ e $C = 1\ \mu$F, il condensatore è carico alla d d p $V_0 = 10^3$V All'istante $t = 0$ viene chiuso l'interruttore, calcolare la f em indotta $\mathscr{E}$ che appare tra i capi A e B dell'avvolgimento dopo un tempo $t = 3 \cdot 10^{-4}$ s



17.77 Il circuito in figura ha una parte, di area $\Sigma = 100\ \text{cm}^2$, immersa in un campo magnetico **B**, normale al piano del disegno e rivolto verso il lettore, il cui modulo è variabile nel tempo secondo la legge $B = 0.1\ (1 - 11.4\ t)$ T Calcolare il valore e il verso della corrente i_A misurata dallo strumento A di resistenza interna $R_i = 100\ \Omega$. Tutte le altre resistenze hanno lo stesso valore $R = 10^3\ \Omega$.



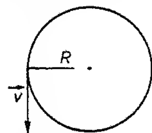
17.78 Un solenoide di sezione $\Sigma = 10^{-3}\ \text{m}^2$, costituito da $N = 10^3$ spire, è chiuso su una resistenza $R = 100\ \Omega$ e immerso in un campo magnetico B_0 uniforme, parallelo al suo asse. A partire dall'istante $t = 0$ il campo magnetico diminuisce secondo la legge $B(t) = B_0 - \alpha t^2$ e dopo un tempo $t_0 = 10^{-2}$ s si annulla, in questo tempo passa nel circuito una carica $q = 10^{-4}$ C Calcolare i valori di B_0 e α, la legge $i(t)$ con cui varia la corrente nel circuito e in

particolare il valore $i_0 = i(t_0)$, l'energia W dissipata nel circuito nell'intervallo di tempo t_0

17.79 In un circuito la corrente subisce una variazione secondo la legge $i(t) = 0.5 + 4t$ A nell'intervallo di tempo da $t_1 = 0$ a $t_2 = 1$ s. Prima di t_1 e dopo t_2 la corrente è costante con i valori che si possono determinare dall'espressione di $i(t)$. In un secondo circuito vicino al primo si misura, nell'intervallo $t_2 - t_1$, un passaggio di carica pari a $q = 5 \cdot 10^{-6}$ C; la resistenza del circuito è $R = 2\Omega$. Calcolare il coefficiente di mutua induzione M tra i due circuiti.

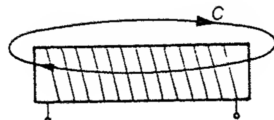
17.80 Un solenoide rettilineo indefinito, a sezione circolare con raggio $R = 10$ cm, ha $n = 10^3$ spire per metro. Esso è percorso da una corrente variabile nel tempo secondo la legge $i = 1 + \alpha t$ A. Una spira conduttrice circolare di raggio $r_1 = 5$ cm è coassiale al solenoide; essa è interrotta in un punto e si sa che tra i due estremi scocca una scintilla quando la d.d.p. supera $V_s = 100$ V Calcolare quanto deve valere α affinché scocchi la scintilla. Un'analoga spira di raggio $r_2 = 15$ cm, anch'essa coassiale al solenoide, viene aperta praticando un'interruzione eguale a quella della spira interna In questa seconda spira scocca una scintilla se α ha il valore trovato precedentemente?

17.81 Una regione di spazio, che può essere pensata come l'interno di un cilindro, è sede di un campo magnetico **B** uniforme e costante, parallelo all'asse del cilindro e rivolto verso il lettore (la figura rappresenta una sezione del cilindro) Al tempo $t = 0$ il campo magnetico comincia a variare secondo la legge $B = B_0(1 - \alpha t)$ con $\alpha = 10^6$ s^{-1}. Se al tempo $t_0 = 0.5 \cdot 10^{-6}$ s una particella carica positivamente possiede la velocità $v = 10^6$ m/s, tangente alla circonferenza di raggio $R = 1$ m, coassiale al cilindro, calcolare quali sono direzione e verso della forza totale **F** agente sulla particella.



G. MATERIALI MAGNETICI

17.82 Un cilindro di ferro, lungo $h = 20$ cm, è magnetizzato uniformemente ad opera di un avvolgimento disposto sulla sua superficie e formato da $N = 200$ spire. Se la corrente nell'avvolgimento vale $i = 1$ A e se la circuitazione di **B** lungo la linea C vale $\Gamma = 2.54 \cdot 10^{-2}$ Tm, calcolare il valore della magnetizzazione **M** assunta dal cilindro.



17.83 Un filo conduttore indefinito di raggio R è circondato da una corteccia cilindrica di raggio interno R e raggio esterno $2R$, con permeabilità magnetica relativa $\varkappa_m$. Il filo è percorso da una corrente distribuita uniformemente sulla sua sezione. Se il rapporto tra l'energia magnetica W_1 contenuta nell'unità di lunghezza della corteccia e quella W_2 contenuta nell'unità di lunghezza del filo è $W_1/W_2 = 27.6$, calcolare il valore di $\varkappa_m$.

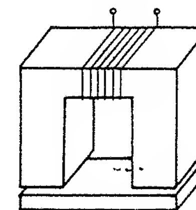
17.84 Un filo rettilineo indefinito, percorso da una corrente $i = 1$ A, è circondato da una guaina cilindrica, di raggio $R_1 = 1$ cm e permeabilità magnetica relativa $\varkappa_{m,1} = 4$, la quale a sua volta è circondata da un'altra guaina cilindrica di permeabilità magnetica relativa $\varkappa_{m,2} = 6$ Calcolare la discontinuità Δ**B** di **B** attraverso la superficie cilindrica di raggio R_1 e la corrente di magnetizzazione i_m su tale superficie.

17.85 Un filo rettilineo indefinito (raggio r_0), percorso da una corrente di densità $j = Kr$ con K costante, è circondato da una guaina cilindrica di raggio interno R e raggio esterno $R_0 = 4$ cm. La discontinuità del campo magnetico nel passare attraverso la superficie interna della guaina vale 100 B_0, essendo B_0 il campo magnetico appena al di fuori della superficie esterna della guaina. Se una corrente con la stessa densità percorresse un conduttore di raggio R_0, il rapporto tra i campi $B(R_0)$ e $B(R)$ varrebbe 4. Calcolare il valore del raggio interno R e della permeabilità magnetica relativa $\varkappa_m$ del materiale ferromagnetico di cui è fatta la guaina

17.86 Lungo l'asse di un solenoide rettilineo indefinito è possibile disporre una sbarra cilindrica di materiale ferromagnetico; il raggio del solenoide è $R = 5$ cm, quello della sbarra $r = 1$ cm Il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza del solenoide vale $L_1 = 1.54 \cdot 10^{-3}$ H/m senza la sbarra e $L_2 = 3.02 \cdot 10^{-3}$ H/m in presenza di essa. Calcolare il rapporto B_i/B_e tra i moduli del campo magnetico **B** dentro e fuori la sbarra.

17.87 Una bobina di $N = 400$ spire è avvolta su un nucleo di ferro toroidale di lunghezza media $l = 30$ cm ed è percorsa da una corrente $i = 0.045$ A Le proprietà magnetiche del ferro utilizzato sono esprimibili mediante la relazione $B = 10^{-3}H$. Determinare la magnetizzazione M del ferro. Se viene praticato un interferro lungo $h = 2$ mm calcolare il valore della corrente i^* necessaria per mantenere lo stesso valore di B e il rapporto tra l'energia magnetica W_1 immagazzinata nel sistema senza interferro e quella W_2 con interferro.

17.88 Un elettromagnete deve tenere sollevato un peso $p = 500$ N; la sezione del circuito magnetico è $\Sigma = 0.25$ m^2, la lunghezza totale è $l = 0.5$ m, gli interferri sono lunghi ciascuno $h = 0.5$ mm Se la permeabilità magnetica relativa del ferro è $\varkappa_m = 1800$ e se la corrente nell'avvolgimento è $i = 1$ A, calcolare il numero minimo N delle spire necessarie.



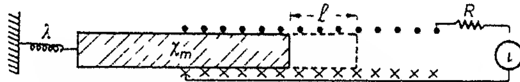
17.89 Un avvolgimento di $N = 1500$ spire percorse da una corrente $i = 1$ A è disposto su una superficie toroidale circolare di sezione $\Sigma = 10$ cm^2 e lunghezza media $l = 1.5$ m. Lo spazio interno a tale solenoide è completamente riempito di ferro con permeabilità magnetica relativa $\varkappa_m = 10^3$ costante per le seguenti considerazioni. Il ferro presenta in due punti diametralmente opposti due spaccature, normali alla linea mediana del solenoide. Se si allontanano le due parti di $h = 5$ mm, calcolare il lavoro L che bisogna compiere nel processo e il corrispondente lavoro L_{gen} del generatore per mantenere costante la corrente.

17.90 Un toroide di ferro dolce, di raggio medio $r = 10$ cm, sezione uniforme $\Sigma = 5$ cm^2, interferro spesso $h = 1$ mm, è coperto da un avvolgimento di $N = 200$ spire percorse da una corrente $i = 5$ A. Se la relazione tra **B** e **H** per il ferro è quella data nella tabella, calcolare il valore del campo magnetico **B** nell'interferro. Determinare inoltre quale tensione $\mathscr{E}$ si sviluppa ai capi dell'avvolgimento se la corrente viene ridotta a zero linearmente in un tempo $t = 10^{-3}$ s.

H(A/m)	40	80	160	240	320	480	800	1600
B(T)	0.1	0.2	0.6	0.85	1 0	1.2	1.4	1.5

17.91 Tra le espansioni polari di un elettromagnete che genera un campo **B** uniforme scende con velocità costante $v = 10^{-2}$ m/s una spira quadrata con lato a di rame (densità $\delta = 8 \cdot 10^3$ Kg/m^3, resistività $\varrho = 1.8 \cdot 10^{-8}$ Ωm) Il lato superiore della spira si trova nel campo **B**, il lato inferiore in una zona dove il campo è nullo (le facce polari sono verticali, il piano contenente la spira è ad esse parallelo, le linee di **B** sono orizzontali) Se nella spira si dissipa una potenza $P = 9.8 \cdot 10^{-3}$ W calcolare la massa m dalla spira e il valore B del campo magnetico. Sapendo che l'elettromagnete ha forma toroidale, con la parte in ferro lunga $l = 199$ cm e l'interferro lungo $h = 1$ cm, ed è alimentato da una corrente $i = 238$ A che attraversa $N = 100$ spire, calcolare la permeabilità magnetica relativa $\varkappa_m$ del ferro

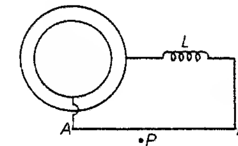
17.92 Un solenoide molto lungo ($n = 40$ spire/cm, diametro $d = 4$ cm) posto sopra un piano orizzontale è collegato ad un generatore che mantiene costante la corrente i Una sbarra di materiale ferromagnetico ha un estremo dentro il solenoide e l'altro esterno collegato ad una molla di costante elastica $\lambda = 2$ N/m Quando non circola corrente la molla è in condizioni di riposo. Se si fa passare corrente la sbarra penetra per un tratto $l = 20$ cm e il coefficiente di autoinduzione del solenoide varia di $\Delta L = 2$H. Tutto il processo avviene senza attriti e la corrente i erogata dal generatore rimane come detto costante. Calcolare la suscettività magnetica χ_m e la magnetizzazione M del materiale e il valore del campo **H** del solenoide.



17.93 La curva del ciclo di isteresi di un materiale ferromagnetico, con densità $\varrho = 8.15 \cdot 10^3$ Kg/m^3 racchiude un'area $\Sigma_{BH} = 14.2$ cm^2 se è tracciata con una scala di 1 cm ogni 500 A/m e ogni 0.1 T. Calcolare l'energia W dissipata per unità di volume e per ciclo Se il campione è sottoposto a un regime alternato a frequenza $\nu = 50$ Hz determinare la potenza dissipata per unità di volume P_τ e per unità di massa P_m, ammesso che la magnetizzazione raggiunga i valori massimi nei due sensi. Calcolare infine, nel regime suddetto, la velocità iniziale di riscaldamento dT/dt se il calore specifico della sostanza è $c = 4.5 \cdot 10^2$ J/Kg · grado

H. CORRENTI ALTERNATE

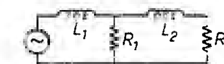
17.94 Un condensatore sferico ($R_1 = 5$ cm, $R_2 = 6$ cm), con dielettrico il vuoto, è connesso a un induttore con $L = 2 \cdot 10^{-4}$ H. Il tratto di filo AB è abbastanza lontano dal resto del sistema per poter essere considerato rettilineo e indefinito Nel punto P, distante $a = 1$ cm dal filo AB, è posta una piccola spira piana di area $\Sigma = 2$ mm^2. Il piano della spira contiene il filo AB. Se la massima d.d.p ai capi del condensatore vale $V_0 = 100$ V, calcolare il valore massimo $\mathscr{E}_{max}$ della f.em. indotta nella spira



17.95 Due generatori alternati, aventi eguale frequenza ν e valori massimi $V_{0,1} = 60$ V e $V_{0,2} = 80$ V, sfasati di ϕ, sono connessi in serie tra loro e con una bobina RL. Un misuratore di tensione efficace segna 100 V se connesso tra A e B, mentre un misuratore di corrente efficace segna $i = 5$ A nel circuito. Infine la potenza dissipata vale $P = 400$ W Calcolare i valori dell'angolo di sfasamento ϕ, della resistenza R e della reattanza ωL.



17.96 Nel circuito in figura il generatore fornisce una f.em alternata con $V_0 = 100$ V e $\omega = 10^3$ rad/s; si sa che $L_1 = L_2 = 10^{-2}$ H e che $R_1 = R_2 = 100$ Ω Calcolare l'impedenza totale Z e il rapporto I_1/I_2 tra le correnti nelle resistenze.

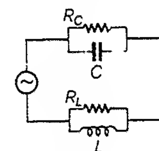


17.97 Studiare il comportamento del circuito RLC in parallelo al variare della frequenza

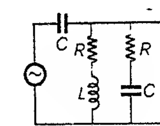
17.98 Calcolare la frequenza ν di risonanza del circuito in figura e confrontare il risultato con quello del problema 8 14

17.99 Nel circuito in figura calcolare in modulo e fase il rapporto tra la d.d.p. V_u in uscita e la f.em. V_0 fornita dal generatore Si assuma $R = 10$ Ω, $\omega L = 10$ Ω, $1/\omega C = 10$ Ω

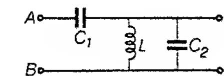
17.100 Calcolare il valore di ω per cui, in modulo e fase, $V_{CD} = V_{AB}$ Sia $L = 1$ H e $C_2 =$ µF



17.98

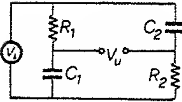


17.99

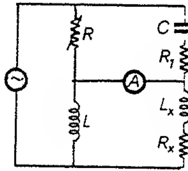


17.100

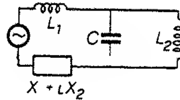
17.101 Verificare che nel circuito in figura, se $R_1 C_1 = R_2 C_2$, l'ampiezza di V_u è eguale all'ampiezza di V_i; calcolare in tal caso la differenza di fase ϕ tra V_u e V_i e determinare la condizione affinché valga $\pm \pi/2$



17.101



17.102

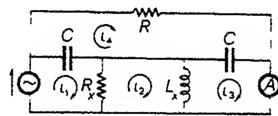


17.103

17.102 Nel circuito in figura facendo variare R si annulla la corrente nell'amperometro. Determinare i valori di L_x e R_x se R all'equilibrio vale $5 \cdot 10^3$ Ω e se gli altri componenti hanno i seguenti valori: $L = 0.1$ H, $C = 1$ μF, $R_1 = 10^4$ Ω

17.103 Determinare le condizioni in cui la corrente attraverso l'impedenza $X_1 + iX_2$ è in fase con la f.em del generatore

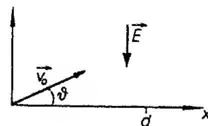
17.104 Nel circuito in figura, variando i valori della capacità C e della resistenza R si riesce ad annullare la corrente attraverso lo strumento. Calcolare R_x e L_x se $R = 5 \cdot 10^6$ Ω, $C = 2 \cdot 10^{-2}$ μF, la pulsazione del generatore è $\omega = 10^3$ rad/s



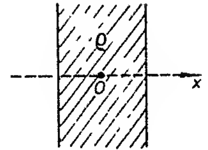
17.105 Un condensatore piano, costituito da due armature circolari di area $\Sigma = 7.5 \cdot 10^3$ cm^2, è sottoposto a una tensione alternata per cui la sua carica varia con la legge $q = 10^{-4} \text{sen} 10^7 t$ C Calcolare il campo magnetico B_0 a distanza $r_0 = 4$ cm dall'asse del condensatore. Il dielettrico è il vuoto.

I. MOTI DI CARICHE

17.106 Un protone ($q/m = 10^8$ C/Kg) viene immesso con velocità iniziale $v_0 = 5 \cdot 10^6$ m/s in un campo elettrico E uniforme di modulo $E = 10^5$ V/m; l'angolo di v_0 con l'asse x è $\theta = 11.78°$. Calcolare la direzione, il verso e il modulo della velocità v del protone nel punto della traiettoria la cui ascissa è $d = 50$ cm. Il punto in cui avviene l'immissione è l'origine del sistema di coordinate.

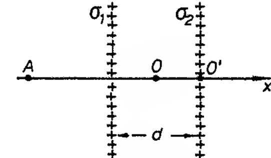


17.107 Un oscillatore armonico, avente carica e massa pari a quelle di un elettrone e pulsazione propria $\omega_0 = 10^7$ rad/s, è posto all'interno di una carica distribuita uniformemente tra due piani paralleli. Le sue oscillazioni, che avvengono intorno al punto O della figura lungo l'asse x e sono contenute completamente entro la carica, presentano una pulsazione $\omega = 1.01\ \omega_0$. Determinare il valore della densità di carica ϱ



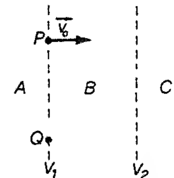
17.108 Una lastra metallica conduttrice indefinita è mantenuta al potenziale $V = 0$. Un elettrone inizialmente fermo ad una distanza $d = 1$ cm viene lasciato libero Calcolare la sua velocità v quando ha percorso $h = 9$ mm, cioè quando si trova a $d' = 1$ mm dalla lastra. Si trascuri l'irraggiamento dovuto all'accelerazione

17.109 Due piani indefiniti paralleli distanti $d = 50$ cm sono carichi con densità $\sigma_1 = 2\sigma_2 = 17.72 \cdot 10^{-8}$ C/m^2. Calcolare il potenziale $V(x)$ ponendolo eguale a zero nel punto di mezzo O, origine delle coordinate. Determinare inoltre l'energia cinetica minima T_{min} che deve avere un protone nel punto A $(x = -d)$ per giungere in O' e il punto x_0 in cui un elettrone, lasciato libero in A con velocità nulla, si ferma.



17.110 In una opportuna regione di spazio vuoto il potenziale elettrostatico è espresso dalla relazione $V = axy$ con $a = 3 \cdot 10^7$ V/m^2. Nel punto di coordinate $x_0 = 3$ cm, $y_0 = 3$ cm viene abbandonato con velocità nulla uno ione di massa $m = 2 \cdot 10^{-26}$ Kg e carica $q = 3.2 \cdot 10^{-19}$ C. Determinare il campo elettrico $\mathbf{E}_0$ nel punto x_0, y_0 in modulo, direzione e verso, il tipo di moto che compie lo ione nel campo e con quale velocità v_0 passa per l'origine.

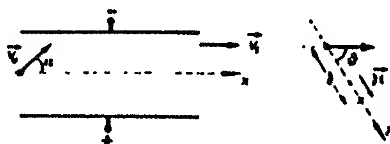
17.111 Nella figura le linee discontinue rappresentano due griglie metalliche molto estese che separano tre regioni A, B, C; in A e C è possibile produrre un campo magnetico uniforme e costante, ortogonale al disegno, mentre B è sede di un campo elettrico uniforme e costante, creato da una d.d.p. $V = V_1 - V_2$ applicata tra le griglie Nel punto P viene iniettata una particella di massa m e carica positiva q con velocità v_0; si vuole che essa ritorni in un punto Q della griglia 1 dopo aver attraversato tutte e tre le regioni suddette. Determinare il verso di **B** a ciò necessario, la distanza PQ e l'energia cinetica T posseduta dalla particella nel punto Q. Si assuma $V = 5 \cdot 10^3$ V, $B = 1$ T, $v_0 = 10^6$ m/s, $m = 1.6 \cdot 10^{-27}$ Kg, $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C.



17.112 Una regione di spazio vuoto è sede di un campo elettrico $\mathbf{E} = Ax\mathbf{u}_x$. Questa espressione è valida per $-10 \leqslant x \leqslant 10$ cm, mentre al di fuori di tale

intervallo il campo elettrico è nullo. Un elettrone che si trovi con velocità nulla a distanza $x_0 = -10$ cm dall'origine raggiunge l'origine stessa con velocità $v = 10^6$ m/s. Descrivere il tipo di moto dell'elettrone e calcolarne la sua accelerazione nel punto $x = 5$ cm. Per $x > 10$ cm viene acceso un campo magnetico $B = B_0 u_y$. Un elettrone viene immesso nell'origine con velocità iniziale v_0 parallela e concorde all'asse x. Esso entra nel campo magnetico al tempo t_1 e ne esce al tempo $t = 1.79 \cdot 10^{-9}$ s. Calcolare il valore di B_0.

17.113 Un elettrone entra con velocità v_0 e con un angolo $\theta = 45°$ in un condensatore piano, carico come in figura e con le armature lunghe $l = 28$ cm;



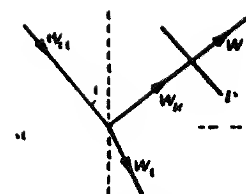
quando esce la sua velocità v_1 è parallela all'asse x. Esso entra quindi con un angolo $\theta = 60°$ in una regione in cui c'è un campo magnetico uniforme parallelo all'asse z e di modulo $B = 5 \cdot 10^{-3}$ T. Si osserva che l'elettrone ripassa per l'asse z a una distanza $L = 2.5$ cm dal punto di ingresso O. Calcolare la velocità iniziale v_0 dell'elettrone e il campo elettrico E nel condensatore.

17.114 Un filo conduttore indefinito è disposto lungo l'asse di una superficie cilindrica indefinita non conduttrice su cui è distribuita uniformemente una carica positiva con densità σ. Il raggio della superficie cilindrica è $R = 1$ cm. Una carica puntiforme ferma a $r_0 = 2$ cm dall'asse del sistema si trova sottoposta a un campo elettrico $E = 1.13 \cdot 10^4$ V/m. Quando nel filo viene fatta passare una corrente i una carica puntiforme lanciata parallelamente al sistema a distanza $r > R$ con velocità $v = 6.3 \cdot 10^6$ m/s non viene deflessa. Calcolare σ e i.

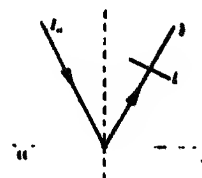
J. POLARIZZAZIONE

17.115 Un'onda piana polarizzata casualmente, di intensità $I_0 = 0.880$ W/cm², incide con un angolo $i = 30°$ sulla superficie di un mezzo trasparente ($n = 1.92$). Determinare lo stato di polarizzazione della luce riflessa giustificando la risposta quantitativamente. Ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda riflessa viene posto un polaroide il cui asse ottico forma un angolo $\alpha = 30°$ con il piano di incidenza. Calcolare l'intensità I dell'onda trasmessa dal polaroide.

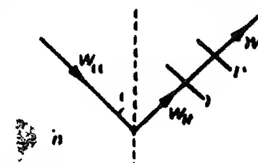
17.116 Un'onda piana polarizzata circolarmente, di potenza W_0, incide con un angolo $i = 40°$ su una lastra di materiale trasparente ($n = 1.51$). Se si pone ortogonalmente alla direzione del fascio riflesso un polaroide P si nota che al variare dell'angolo α tra l'asse ottico di questo e il piano di incidenza la potenza trasmessa dal polaroide segue la legge $W = W_p \cos^2\alpha + W_s \sin^2\alpha$ con $W_p = 0.016$ W. Calcolare le potenze W_0 dell'onda incidente, W_R dell'onda riflessa, W_T dell'onda trasmessa.



17.117 Un'onda piana non polarizzata di lunghezza d'onda λ visibile incide sulla superficie Σ di una sostanza trasparente ($n = 1.43$). Una lamina di ritardo L, spessa $d = 20$ μm, è posta ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda riflessa, con l'asse ottico formante un angolo $\alpha = 45°$ col piano di incidenza. Gli indici di rifrazione del cristallo sono $n_e = 1.50$ e $n_o = 1.49$. Sapendo che dalla lamina viene trasmessa un'onda polarizzata nel piano di incidenza, di intensità $I = 0.53$ W/cm², calcolare l'intensità I_0 e la lunghezza d'onda λ dell'onda incidente.



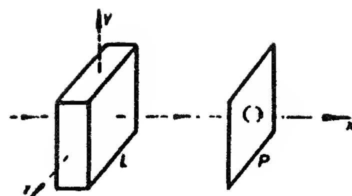
17.118 Un'onda piana polarizzata rettilineamente, monocromatica ($\lambda = 500$ nm) e di potenza W_0 = [illegible] W, incide con un angolo $i = 30°$ sulla superficie di un mezzo trasparente ($n = 1.75$). Il vettore E_R dell'onda riflessa forma un angolo $\theta_R = 58°$ rispetto al piano di incidenza. Calcolare l'angolo θ formato dal campo elettrico E incidente col piano di incidenza, la potenza W_R dell'onda riflessa, l'angolo di incidenza i_0 per cui E_R risulta perpendicolare al piano di incidenza. L'onda riflessa attraversa una lamina birifrangente L con $n_e - n_o = 10^{-2}$ e un polaroide P. Ruotando questo si osserva che la potenza W in uscita non varia. Calcolare lo spessore minimo d della lamina e il valore di W.



17.119 Un fascio di luce polarizzata circolarmente ha intensità $I_0 = 10$ W/cm² e incide perpendicolarmente su tre polaroidi paralleli. Gli assi ottici del primo e dell'ultimo sono tra loro ortogonali mentre l'asse ottico di quello intermedio forma un angolo θ con l'asse ottico del primo. Calcolare l'intensità $I(\theta)$ della luce emergente in funzione di θ.

17.120 Nel sistema ottico descritto nel problema 11.7 si sostituisca la tormalina T_3 con una lamina mezz'onda per la lunghezza d'onda della luce incidente. Descrivere come varia l'intensità trasmessa dall'intero sistema nell'ipotesi che l'angolo formato dagli assi ottici di T_1 e della lamina sia $\alpha = 1°$.

17.121 Un sistema ottico è formato da una lamina birifrangente L tagliata parallelamente all'asse ottico e da un polaroide P; gli assi ottici dei due cristalli giacciono in piani paralleli e quello della lamina coincide con l'asse y. Sul sistema incide normalmente un'onda piana monocromatica ($\lambda = 500$ nm) di equazione



$$E_y = E_{0y}\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) \quad , \quad E_z = E_{0z}\operatorname{sen}\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad .$$

Gli indici di rifrazione della lamina, per la lunghezza d'onda in questione, sono $n_e = 1.553$ e $n_o = 1.544$. Ruotando il polarizzatore si nota che esistono due posizioni di estinzione, differenti di 180°. Calcolare il minimo spessore d della lamina birifrangente.

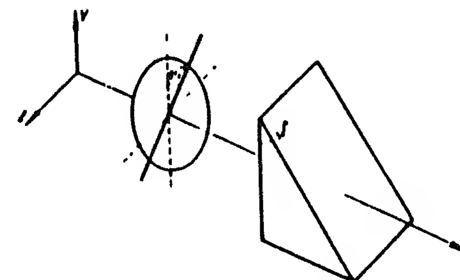
17.122 Un'onda piana polarizzata comprendente tutte le lunghezze d'onda tra $\lambda_1 = 400$ nm e $\lambda_2 = 700$ nm, di intensità I_0, rappresentata per ciascuna λ dalle $E_y = 2^{1/2}E_0\cos(\omega t - Kx)$, $E_z = E_0\cos(\omega t - Kx)$, incide su un sistema ottico formato da due polarizzatori P_1 e P_2, entrambi con l'asse ottico parallelo all'asse y. L'intensità trasmessa da P_1 vale $I_1 = 1.08 \cdot 10^4$ W/m^2. Calcolare l'intensità I_0 dell'onda piana e l'ampiezza E_0. Tra i due polaroidi viene inserita una lamina birifrangente ($n_e = 1.62$, $n_o = 1.60$), di spessore $d = 80$ μm, con l'asse ottico formante un angolo $\alpha = 45°$ con l'asse y. Detta I_2 l'intensità trasmessa da P_2 calcolare le lunghezze d'onda λ_3 per cui $I_2 = I_1$, λ_4 per cui $I_2 = 0.5 I_1$, λ_5 per cui $I_2 = 0$.

17.123 Un'onda piana polarizzata rettilineamente con il campo elettrico formante un angolo di $\theta = 45°$ con l'asse y contiene tutte le lunghezze d'onda comprese tra $\lambda_A = 400$ nm e $\lambda_B = 700$ nm. Essa incide normalmente su una lamina birifrangente, con $n_e - n_o = 10^{-2}$ e spessore d, con l'asse ottico parallelo all'asse y. Dall'analisi dello stato di polarizzazione dell'onda piana trasmessa dalla lamina si trova che per una serie di lunghezze d'onda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ l'onda risulta ancora polarizzata rettilineamente; due lunghezze d'onda consecutive della serie sono $\lambda_i = 500$ nm, $\lambda_j = 555.55$ nm. Calcolare lo spessore d della lamina, quanti elementi ha la serie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, per quante lunghezze d'onda della serie il campo elettrico dell'onda trasmessa è parallelo al campo dell'onda incidente e per quante è perpendicolare.

17.124 Un'onda piana polarizzata circolarmente, contenente tutte le lunghezze d'onda comprese tra $\lambda_1 = 0.4$ μm e $\lambda_2 = 0.6$ μm, incide normalmente su una lamina birifrangente L_1, con $n_e - n_o = 10^{-2}$ e spessore $d_1 = 90$ μm. Determinare per quali lunghezze d'onda l'onda emergente dalla lamina è ancora polarizzata circolarmente. Con una successiva lamina L_2 dello stesso materiale, spessa $d_2 = 135$ μm, si vuole trasformare la polarizzazione da circolare in rettilinea.

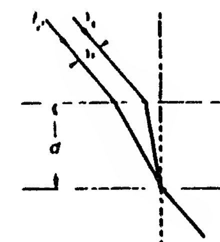
Calcolare quali delle lunghezze d'onda trasmesse dalla prima lamina e polarizzate circolarmente risultano, all'uscita della seconda, polarizzate rettilineamente.

17.125 Un'onda piana polarizzata rettilineamente col campo elettrico parallelo all'asse y, composta dalle lunghezze d'onda $\lambda_1 = 792$ nm e $\lambda_2 = 396$ nm, incide normalmente su una lamina birifrangente L di spessore $d = 22$ μm,



$n_e - n_o = 9 \cdot 10^{-3}$ e asse ottico a 45° con l'asse y. L'onda che emerge dalla lamina incide su un prisma P con indice di rifrazione $n = 1.6$. La prima faccia del prisma è perpendicolare all'onda incidente, la seconda forma un angolo $\alpha = 32°$ con la prima. Calcolare per le due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 lo stato di polarizzazione dell'onda uscente dalla lamina, lo stato di polarizzazione dell'onda trasmessa dal prisma e la relativa potenza W trasmessa. Si sa che $W_1 = 8$ W, $W_2 = 4$ W e che si possono trascurare tutti gli assorbimenti.

17.126 Una lamina di spessore $d = 2$ cm è tagliata da un cristallo uniassico con le due superficie parallele all'asse ottico (ortogonale al disegno); l'indice di rifrazione relativo all'asse ottico è $n_e = 1.6$, l'altro è $n_o = 1.4$. Due fasci paralleli di luce F_1 e F_2, di lunghezza d'onda $\lambda = 600$ nm, coerenti, distanti h, incidono sulla lamina secondo l'angolo $i = 45°$. F_1 ha il campo parallelo all'asse ottico, F_2 lo ha ortogonale all'asse ottico. Determinare la distanza h in modo che i due fasci siano sovrapposti all'uscita della lamina e lo stato di polarizzazione dell'onda risultante.



17.127 Un polarimetro è costituito da due polarizzatori e da un contenitore cilindrico inserito tra i due. Nel contenitore vengono poste successivamente due soluzioni diverse, otticamente attive. La prima, contenente $c_1 = 2$ g di soluto, provoca una rotazione del piano di polarizzazione dell'onda incidente pari a $\alpha_1 = 120°$; la seconda, contenente $c_2 = 3.5$ g di un altro soluto nella stessa quantità di solvente, provoca una rotazione $\alpha_2 = 110°$. Se il potere rotatorio specifico della prima soluzione ha il valore $K_1 = 70$ gradi cm^2/g, calcolare K_2, potere rotatorio specifico della seconda.

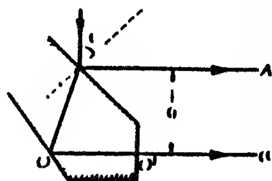
K. INTERFERENZA

17.128 Due lastre di materiale trasparente, a facce piane e parallele, hanno indici di rifrazione $n_1 = 1.6$ e $n_2 = 1.5$; i rispettivi spessori sono r_1 e r_2. Quando le due lastre sono nella posizione a introducono uno sfasamento $\phi_1 = 920\pi$,



mentre nella posizione b lo sfasamento vale $\phi_2 = 40\pi$; la lunghezza d'onda della luce è $\lambda = 500$ nm. Calcolare r_1 e r_2.

17.129 Una lastra di vetro ($n = 1.5$) è tagliata come in figura. Un fascio di luce monocromatica ($\lambda = 657$ nm), di sezione $\Sigma = 1$ cm² e intensità $I = 1$ W/m², polarizzata linearmente nel piano del disegno, incide su una faccia della lastra con angolo di incidenza $i = 45°$. La separazione tra i due fasci paralleli è $h = 4$ cm e il tratto OO' vale 3.2 cm. Calcolare le intensità I_A e I_B e la differenza di cammino ottico Δ tra le due onde; se queste sono portate a interferire senza ulteriori sfasamenti, quanto vale l'intensità I risultante?



17.130 Con un sistema di specchi di Fresnel si producono delle frange di interferenza operando in luce monocromatica. Si constata che la 40ª frangia luminosa si trova alla distanza $z = 2$ mm dalla frangia centrale. Se l'angolo sotto cui si osservano dal centro del sistema le due immagini virtuali della sorgente luminosa è $\theta = 0.683°$, calcolare la lunghezza d'onda λ della luce impiegata.

17.131 Nel dispositivo dei fori di Young, illuminato ortogonalmente con un'onda piana monocromatica, si supponga di osservare le frange su uno schermo parallelo al piano dei fori e distante da esso $L = 50$ cm. La distanza tra i fori sia $d = 1$ mm. Se davanti a uno dei fori si pone un foglio di materiale trasparente di spessore $r = 100$ μm, il centro delle frange si sposta di $\Delta z = 2$ cm. Calcolare l'indice di rifrazione n del materiale; detta Δx la distanza tra due frange calcolare quanto vale il rapporto $\Delta x/\lambda$ quando entrambi i fori sono coperti dal foglio di materiale trasparente.

17.132 Un'onda piana monocromatica investe uno schermo in cui sono praticati due fori sottili, distanti tra loro $d = 10$ cm, provocando un fenomeno di interferenza osservabile su un altro schermo S, posto a distanza $L = 2$ m dal primo. Sul cammino dell'onda, prima dei fori, sono posti due tubi lunghi $l = 1$ m contenenti aria a pressione atmosferica. Se la pressione viene aumentata nel

tubo 1 calcolare in che direzione si spostano le frange e la variazione Δn dell'indice di rifrazione, se il centro delle frange si è spostato di $\Delta z = 2$ cm.

17.133 Un'onda piana monocromatica investe perpendicolarmente una sottile lamina di acqua saponata ($n = 4/3$) di spessore minimo r. La lunghezza d'onda λ della sorgente può essere variata in modo continuo. Nel fascio riflesso si osserva un massimo di intensità per $\lambda_1 = 600$ nm e un minimo per $\lambda_2 = 450$ nm, senza alcun altro massimo o minimo tra questi due valori. Calcolare lo spessore r della lamina.

17.134 Una pellicola d'acqua ($n = 4/3$) di spessore uniforme $r = 0.32$ μm, posta orizzontalmente in aria, è illuminata normalmente alla sua superficie con luce bianca. Qual è la colorazione apparente della pellicola se viene osservata per riflessione?

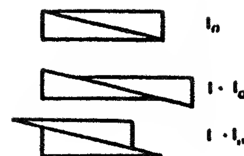
17.135 Un foglio sottile di materiale plastico, spesso r e con indice di rifrazione n, viene posto su una delle fenditure di un dispositivo di Young, illuminato con luce monocromatica ($\lambda_0 = 500$ nm). Si osserva allora su di un apposito schermo uno spostamento di $N = 2$ frange rispetto a quando non c'è il foglio. Se lo stesso foglio viene illuminato in incidenza normale da una luce costituita da lunghezze d'onda tra $\lambda_A = 400$ nm e $\lambda_B = 450$ nm, si osserva che mancano in riflessione soltanto le lunghezze d'onda $\lambda_1 = 400.00$ nm e $\lambda_2 = 428.57$ nm. Calcolare r e n.

17.136 Un foglio sottilissimo di materiale plastico ($n = 1.5$) viene posto ortogonalmente alla direzione di uno dei due fasci di luce di un dispositivo interferenziale e si osserva nello strumento uno spostamento di $N = 3$ frange. La lunghezza d'onda della luce utilizzata è $\lambda_0 = 400$ nm. In seguito lo stesso foglio viene illuminato ortogonalmente con un fascio di luce bianca parallela e si osserva in trasmissione una notevole attenuazione per alcune lunghezze d'onda. Calcolare i valori di esse.

17.137 Un fascio di luce polarizzata rettilineamente incide sulla superficie piana di separazione tra due mezzi con indici di rifrazione n_1 e n_2. Quando l'angolo di incidenza vale $i = 41.57°$ si osserva che l'intensità riflessa è nulla. D'altra parte, se una lamina sottile di spessore $r = 5.1$ μm, formata con il materiale di indice n_2 e immersa in aria, viene illuminata ortogonalmente con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 665$ nm, si osserva che si è in condizioni di massima riflessione e che il massimo è di ordine $K = 20$. Calcolare qual è il piano di polarizzazione del fascio incidente, quanto valgono n_1 e n_2, cosa succede quando i supera il valore 62.52°.

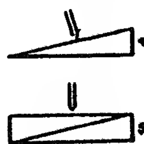
17.138 Una lamina a spessore variabile può essere costruita come in figura: i due cunei scorrendo l'uno rispetto all'altro danno luogo a variazioni di spessore. Una tale lamina è illuminata in incidenza normale con luce monocromatica ($\lambda = 700$ nm) e si vede in trasmissione che con una certa variazione Δt di

spessore si ha una variazione dell'ordine del massimo di $\Delta K = 207$. Successivamente la stessa lamina è posta sopra una delle fenditure di un dispositivo di Young illuminato dalla stessa luce e si osserva che la medesima Δt porta a uno spostamento di $N = 32$ frange. Calcolare Δt e l'indice di rifrazione n della lamina.

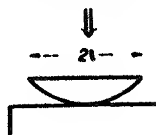


17.139 Due lastre di vetro a facce piane e parallele sono poste una sull'altra e formano un angolo $\alpha = 10^{-2}$ rad. Lo spazio tra di esse è inizialmente occupato da aria. In opportune condizioni di illuminamento con luce monocromatica ($\lambda = 600$ nm) e di osservazione, si constata la formazione di frange di eguale spessore. Calcolare il numero N di frange chiare per centimetro. Successivamente lo spazio tra le lastre viene riempito con un liquido di indice di rifrazione n inferiore a quello del vetro e si osserva che la densità N' delle frange aumenta del 40%. Calcolare n.

17.140 Un sottile cuneo di materiale trasparente, con indice di rifrazione n e base alta s, viene illuminato con luce monocromatica ($\lambda = 400$ nm) in incidenza normale. Sulla superficie del cuneo si vedono $N = 51$ frange chiare; l'ultima frangia è chiara. Successivamente il cuneo viene sovrapposto a un altro identico in modo da formare una lamina piana di spessore s. Illuminando la lamina in incidenza normale con luce costituita da lunghezze d'onda tra $\lambda_A = 500$ nm e $\lambda_B = 600$ nm e osservando la luce riflessa, calcolare quante lunghezze d'onda risultano soppresse e dare in particolare il valore della minore e della maggiore.



17.141 Un dispositivo per produrre anelli di Newton è costituito da una lente piano-convessa poggiata su di un piano, fatti con lo stesso vetro della lente. Il raggio di curvatura della lente è $R = 5$ m, il diametro utile è $2L = 2$ cm. Il dispositivo è illuminato da un'onda piana monocromatica ($\lambda = 600$ nm) incidente normalmente e viene osservato in riflessione. Successivamente l'intercapedine viene riempita d'acqua ($n = 4/3$). Calcolare la variazione ΔN del numero totale di frange.



17.142 Un velo d'acqua ($n = 4/3$) spesso $t = 10^{-4}$ m è steso su una lastra di vetro con indice di rifrazione maggiore di n. Un sottile fascio di luce bianca incide sull'acqua con un angolo $i = 70°$. Calcolare il numero N di frange chiare osservabili in luce riflessa nell'intervallo spettrale tra $\lambda_A = 450$ nm e $\lambda_B = 650$ nm.

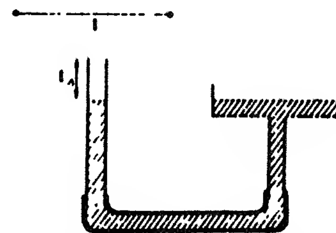
17.143 Due lastre di vetro a facce piane e parallele sono separate da un sottile strato d'aria di spessore $t = 10^{-2}$ mm. Per luce bianca incidente secondo un angolo $i = 20°$ determinare il numero N di frange scure osservabili in luce riflessa nell'intervallo spettrale tra $\lambda_A = 400$ nm e $\lambda_B = 650$ nm.

17.144 Un sistema di $N = 5$ sorgenti di onde sferiche sonore, di frequenza $\nu = 13.6$ kHz, sincrone, è disposto lungo una linea; la distanza tra due sorgenti consecutive è a. Un rivelatore R può ruotare, sempre rimanendo a distanza $D = 1$ m dalla sorgente centrale, misurando in tal modo l'intensità emessa dal sistema in funzione dell'angolo θ rispetto alla normale alla linea contenente le sorgenti. Oltre al massimo centrale per $\theta = 0°$ si osserva che il massimo successivo di eguale intensità si trova a $\theta = 30°$. Calcolare la distanza a tra le sorgenti e in quali direzioni si rivela un'intensità pari a quella misurata per $\theta = 0°$ e $\theta = 30°$. Determinare che larghezza L deve avere il ricevitore per percepire tutto il segnale emesso nell'intorno di $\theta = 0°$.

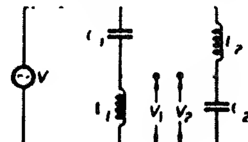
17.145 Una canna d'organo aperta a un'estremità emette una fondamentale $\nu = 440$ Hz che viene usata da un violinista per accordare il suo strumento. Il tutto si svolge a $t = 20°C$. In un altro giorno in cui la temperatura è salita a $t' = 25°$ C si ripete la prova. Di quanto deve variare la tensione τ della sua corda il violinista? Si assuma che la corda sia lunga $L = 30$ cm e abbia densità lineare $m = 10^{-2}$ g/cm.

17.146 Un soprano che emette con facilità una nota con frequenza fondamentale $\nu_1 = 10^3$ Hz prova ad emettere la stessa nota avendo la gola piena di elio. Che frequenza ν_2 ne risulta?

17.147 Un tubo a U è parzialmente riempito d'acqua ed è possibile variare l'altezza dell'acqua in modo da variare la lunghezza L_A della colonna d'aria. Una corda di violino lunga $L = 50$ cm, di massa $M = 1$ g, tesa alla tensione $\tau = 400$ N, collocata vicino all'estremo aperto della colonna d'aria, viene sollecitata con l'archetto in modo da produrre la frequenza fondamentale ν_0. Si constata che variando L_A di 30 cm si passa da una condizione di risonanza alla successiva. Calcolare la velocità v del suono nell'aria.



17.148 Un tubo, lungo $L = 90$ cm e chiuso ad entrambe le estremità, contiene elio alla temperatura di 20°C. Nel gas viene stabilito un regime di onde stazionarie e con un apparato strumentale si traducono le variazioni di pressione in una tensione $V = V_0 \cos 2\pi\nu t$, dove ν è la frequenza fondamentale delle oscillazioni nel gas. Tale tensione è applicata al circuito in figura. Se $L_1 = 1.5$ H, $L_2 = 2.7$ H, $C_2 = 150$ nF, calcolare quanto deve valere C_1 affinché sia $V_1 = V_2$.

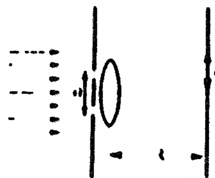


L. DIFFRAZIONE

17.149 Nel piano focale di una lente sottile con $f = 50$ cm si forma la figura di interferenza prodotta da due fenditure indefinite parallele eguali, investite da un'onda piana monocromatica con $\lambda = 500$ nm. Osservando che la larghezza della frangia centrale è $\Delta z = 0.5$ cm e che sono assenti i massimi del quarto ordine, determinare la larghezza minima d delle fenditure e la loro distanza a.

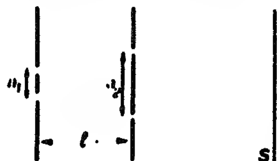
17.150 Un fascio di luce parallela e monocromatica ($\lambda = 500$ nm) incide normalmente su una fenditura indefinita di larghezza $d = 0.2$ mm. Una lente di focale $f = 100$ cm posta subito dopo la fenditura focalizza la luce su di uno schermo. Determinare la larghezza Δz del massimo centrale della figura di diffrazione e dire a che distanza x dal centro della prima fenditura deve essere posta un'altra fenditura eguale affinché non si osservino i massimi di ordine pari che sarebbero prodotti dall'insieme delle due fenditure se fossero infinitamente sottili.

17.151 Due fenditure parallele sono larghe d e distano tra loro a. Esse sono illuminate da un'onda piana monocromatica ($\lambda = 500$ nm). Subito dopo le fenditure è posta una lente di focale $f = 1$ m e poi uno schermo, distante f dalla lente. Sapendo che la coordinata z_2 del massimo principale del secondo ordine vale 2 cm e che il massimo del quarto ordine manca, calcolare a, d e il rapporto R_2 tra le intensità del massimo del secondo ordine e del massimo centrale.

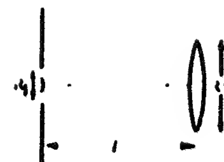


17.152 Una sottile fenditura praticata in uno schermo è illuminata con una luce monocromatica di lunghezza d'onda λ. La figura di diffrazione è osservata all'infinito. Si supponga di aumentare la lunghezza d'onda di una variazione $\Delta\lambda$ in modo che $\Delta\lambda/\lambda = 1.5 \cdot 10^{-2}$. Si chiede che variazione Δn deve subire l'indice di rifrazione dello spazio oltre lo schermo, che prima era vuoto, affinché non si abbia alcuno spostamento della figura di diffrazione. Se lo stesso procedimento viene applicato a un dispositivo tipo fori di Young, illuminato dalla stessa λ, la relazione tra Δn e $\Delta\lambda$ è la stessa o cambia? Si lavori nell'ipotesi di angoli piccoli.

17.153 Due fenditure molto sottili, distanti $a_1 = 0.25$ mm, sono illuminate con luce monocromatica ($\lambda_0 = 546.6$ nm); esse illuminano a loro volta un secondo sistema di due fenditure molto sottili, distanti $a_2 = 0.75$ mm, poste in un piano contenente le due fenditure sorgenti. L'interferenza è osservata su uno schermo S posto a grande distanza dal sistema. Variando la distanza ℓ tra i piani contenenti le fenditure l'illuminamento di S varia con continuità e alternativamente da una



condizione in cui lo schermo è uniformemente illuminato a una condizione in cui appare un sistema di frange distinte. Calcolare la massima distanza ℓ_1 per cui lo schermo appare uniforme e la massima distanza ℓ_2 per cui sullo schermo si osserva il sistema di frange con la massima intensità ottenibile. Lo spazio tra i due sistemi di fenditure viene riempito con un gas. In queste condizioni ℓ_1 diviene $\ell_1' = 350$ mm. Calcolare l'indice di rifrazione n del gas. Se invece il secondo sistema di fenditure viene sostituito da una lente posta a distanza $L = 1$ m dalle fenditure sorgenti calcolare il diametro D della lente affinché le due immagini delle fenditure siano separate nel piano focale di questa e dire se un occhio posto alla stessa distanza L può separare le due immagini.



17.154 Un'onda piana elettromagnetica di frequenza $\nu = 3 \cdot 10^{10}$ Hz incide su uno schermo conduttore nel quale sono praticate N aperture molto lunghe, di larghezza $d = 3$ cm, distanti $p = 5$ cm. Calcolare in quante e quali direzioni θ_j si rivela apprezzabilmente l'onda al di là dello schermo, il rapporto R tra l'intensità delle onde nelle due direzioni θ_1 e θ_2 più prossime a $\theta = 0$ e l'intensità dell'onda nella direzione $\theta = 0$, il numero minimo di aperture N affinché la larghezza angolare totale entro cui è contenuta l'onda trasmessa nell'intorno di $\theta = 0$ sia $\Delta\theta = 2.5°$.

17.155 Un reticolo di diffrazione ha N fenditure di passo p e larghezza d. Si sa che il potere risolutivo al quarto ordine vale $R = 180$ e che illuminando con luce di lunghezza d'onda $\lambda = 600$ nm la semilarghezza angolare del massimo centrale è $\Delta\theta = 1.9 \cdot 10^{-3}$ rad. Si osserva inoltre che manca il massimo principale del terzo ordine. Calcolare N, p, d e il rapporto R_4 delle intensità tra il massimo principale del quarto ordine e quello centrale.

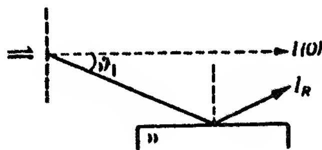
17.156 Un reticolo ha $n = 4000$ fenditure per centimetro. Determinare la separazione angolare nello spettro del secondo ordine tra le righe H_α e H_β dell'idrogeno atomico, le cui lunghezze d'onda sono $\lambda_\alpha = 656$ nm e $\lambda_\beta = 486$ nm. Calcolare inoltre la larghezza $\Delta\theta$ delle corrispondenti frange prodotte dal reticolo, sapendo che questo è largo $L = 1.5$ cm.

17.157 L'idrogeno e il deuterio gassosi, opportunamente eccitati, emettono tra le altre le due righe $\lambda_H = 656.30$ nm e $\lambda_D = 656.43$ nm. Queste sono osservate nel piano focale di una lente di focale $f = 50$ cm davanti alla quale è posto un reticolo di diffrazione. Si vede che, al secondo ordine, le righe vengono risolte e il massimo corrispondente a λ_H cade a distanza $z_H = 5$ cm dal centro della figura di diffrazione. Calcolare il numero totale di fenditure N che deve avere il reticolo, il numero di fenditure per centimetro n e la distanza $\Delta z = z_H - z_D$, sempre al secondo ordine.

17.158 Un reticolo di diffrazione (N, p, d) è illuminato da un'onda piana composta da due lunghezze d'onda λ_1 e $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ con $\Delta\lambda = 10^{-7}$ cm. Il

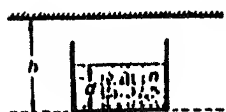
sistema di righe prodotte è osservato nel piano focale di una lente ($f = 20$ cm) posta subito dopo il reticolo. Sapendo che λ_1 e λ_2 sono visibili al secondo ordine, che il massimo per λ_1 si osserva a una distanza $z_1 = 8.729$ cm dal centro e quello per λ_2 a $z_2 = z_1 + \Delta z$ con $\Delta z = 1.75 \cdot 10^{-2}$ cm, calcolare il valore di λ_2, di p, di N e la larghezza a_s delle righe. Nell'ipotesi $p = 5d$ e che si possano osservare solo i massimi la cui intensità I_K sia maggiore di $0.1\ I_0$, calcolare quante righe si osservano per la lunghezza d'onda λ_1 oltre a quelle di ordine zero, 1, 2.

17.159 In un reticolo di diffrazione il passo è $p = 10\ \mu m$ e la larghezza delle fenditure è $d = \lambda = 0.6\ \mu m$, con λ lunghezza d'onda della luce monocromatica incidente, non polarizzata. La luce trasmessa dal reticolo viene fatta riflettere su di una lastra piana ($n = 1.5$) e si misura l'intensità riflessa. In particolare si trova che quella corrispondente ai raggi trasmessi dal reticolo che formano il massimo del terzo ordine vale $I_R = 0.53\ W/cm^2$. Calcolare l'intensità $I(0)$ per il reticolo.

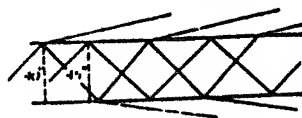


M. OTTICA GEOMETRICA

17.160 Uno specchio piano è posto ad altezza h rispetto al fondo di un recipiente contenente acqua fino al livello d. Calcolare a che distanza x dal fondo si forma l'immagine di un oggetto posto sul fondo stesso.



17.161 Due fasci di luce monocromatica si propagano dentro una lastra di quarzo ($n_1 = 1.6$) a facce piane e parallele, immersa in anidride carbonica a 20°C. I raggi incidono rispettivamente sotto angoli di 40° e 45°. Si vuole eliminare uno dei due fasci con successive trasmissioni nel gas facendo sì che l'angolo di incidenza sia per esso inferiore all'angolo limite di riflessione totale, mentre per l'altro fascio sia superiore. Determinare per quale intervallo di pressione ciò è possibile, ammettendo che il comportamento del gas sia ideale e che il suo indice di rifrazione sia espresso da $n = 1 + \alpha\rho$ dove ρ è la densità e $\alpha = 10^{-4}\ m^3/Kg$.



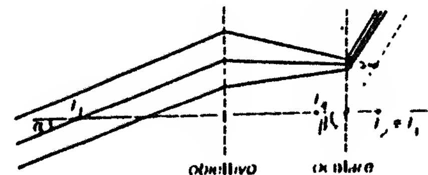
17.162 Un fascio di raggi paralleli, costituito da luce di due lunghezze d'onda λ_A e λ_B incide su un prisma con angolo di apertura $\alpha = 60°$. Per le due lunghezze d'onda gli indici di rifrazione sono $n_A = 1.629$ e $n_B = 1.632$. Determinare la separazione angolare $\Delta\theta$ tra i raggi emergenti nel caso che il prisma sia disposto in condizioni di deviazione minima per λ_A.

17.163 Una sfera di vetro ($n = 1.5$), per metà argentata, ha raggio $R = 10$ cm. Determinare la posizione dell'immagine data dalla sfera di un oggetto puntiforme posto a distanza $p = 20$ cm dal vertice della parte non argentata.

17.164 Una bacchetta di vetro lunga $l = 40$ cm è delimitata alle estremità da due calotte sferiche convesse di egual raggio di curvatura $R = 8$ cm; l'indice di rifrazione del vetro è $n_2 = 1.43$, il sistema è immerso in aria. Calcolare in quale intervallo dell'asse deve stare un oggetto puntiforme reale affinché la sua immagine data dalla bacchetta sia reale.

17.165 Un oggetto dista $p = 2$ m dal centro di una lente sottile di focale $f = 40$ cm. Oltre la lente, a $l = 30$ cm da essa, c'è uno specchio sferico convesso, di raggio $R = 6$ m. La luce emessa dall'oggetto attraversa la lente, viene riflessa dallo specchio e riattraversa la lente. Calcolare dove si forma l'immagine finale rispetto alla lente e l'ingrandimento trasversale.

17.166 Per le osservazioni di oggetti terrestri distanti viene spesso usato il cannocchiale di Galileo, che consta di un obiettivo convergente (fuochi F_1 e



F_2) e di un oculare divergente (fuochi F_3 e F_4), con $F_2 \equiv F_4$. Calcolare la lunghezza l dello strumento e l'ingrandimento visuale I se $f_1 = 100$ cm e $f_2 = -10$ cm.

N. RADIAZIONE TERMICA

17.167 La temperatura di funzionamento del filamento di tungsteno di una lampada a incandescenza è $T = 2460$ K e la sua emissività vale $e = 0.35$. Calcolare l'area Σ della superficie del filamento se la potenza da esso emessa è $P = 60$ W.

17.168 Una resistenza elettrica annerita, di raggio $R = 1$ mm e lunghezza $l = 2$ cm, in cui per il passaggio di corrente si dissipa una potenza $P = 0.5$ W, si trova in equilibrio con l'ambiente a $T_0 = 300$ K. Se si suppone che lo scambio di energia con l'ambiente avvenga solo per irraggiamento, calcolare il valore della temperatura T_1 della resistenza.

• • •

SOLUZIONI

17.1 Dal teorema di Gauss $E = \rho r/3\varepsilon_0$ per $0 \le r \le R_1$, $E = \rho R_1^3/3\varepsilon_0 r^2$ per $r \ge R_1$; $V(0) - V(R_1) = \rho R_1^2/6\varepsilon_0$, $V(R_1) - V(R_2) = \rho R_1^3(R_2 - R_1)/3\varepsilon_0 R_2 \Rightarrow V = V(0) - V(R_2) = (\rho R_1^2/3\varepsilon_0)\,[(R_2 - R_1)/R_2 + 1/2] = 10^4$ V $\Rightarrow \rho = 6.64 \cdot 10^{-4}$ C/m^3.

17.2 Per $r \le R$ dal teorema di Gauss $4\pi r^2 E = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr$ con $\rho = c/r \Rightarrow E(r) = c/2\varepsilon_0$, costante; per $r \ge R$ con lo stesso metodo $E(r) = cR^2/2\varepsilon_0 r^2$. Posto $V(\infty) = 0$, $V(r \ge R) = \int_r^\infty E\,dr = cR^2/2\varepsilon_0 r$; in particolare $V(R) = cR/2\varepsilon_0$. Per $r \le R$ $V(r) - V(R) = \int_r^R E\,dr = c(R - r)/2\varepsilon_0 \Rightarrow V(r) = c/\varepsilon_0\,(R - r/2)$ e nel centro ($r = 0$) $V(0) = cR/\varepsilon_0 = 2V(R)$.

17.3 All'esterno della sfera ($r > R$) il campo della sfera è sempre maggiore in modulo di quello della carica e non ci sono soluzioni; all'interno invece i campi sono eguali ed opposti quando $q/4\pi\varepsilon_0 r_0^2 = \rho r_0/3\varepsilon_0$; posto $\rho = 2q/(4/3\,\pi R^3)$ si ha $r_0^3 = R^3/2 \Rightarrow r_0 = 2.38$ cm.

17.4 Si applica il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di altezza unitaria e raggio $r < R$, coassiale con la superficie data; si trova $E(r) = \rho r/2\varepsilon_0$ e per la d.d.p. $V = V_a - V_s = \int_0^R E\,dr = \rho R^2/4\varepsilon_0 = 1$ V.

17.5 Si procede come nel problema 17.4: per $r \le R_1$ $E = 0$, per $R_1 \le r \le R_2$ $E(r) = \rho(r^2 - R_1^2)/2\varepsilon_0 r = 10^4(r^2 - 4 \cdot 10^{-4})/r$ V/m, per $r \ge R_2$ $E(r) = \rho(R_2^2 - R_1^2)/2\varepsilon_0 r = 12/r$ V/m.

17.6 Il campo del filo è $E_\lambda = -\lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ in tutto lo spazio; il campo della superficie è $E_\sigma = \sigma R_0/\varepsilon_0 r$ per $R_0 < r < \infty$, $E_\sigma = 0$ per $r < R_0$. La d.d.p. si scrive

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E_\lambda dr + \int_{R_0}^{R_2} E_\sigma dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{R_2}{R_1} + \frac{\sigma R_0}{\varepsilon_0}\log\frac{R_2}{R_0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\lambda} = \frac{1}{2\pi R_0}\,\frac{\log R_2/R_1}{\log R_2/R_0} = 15.9\ m^{-1}.$$

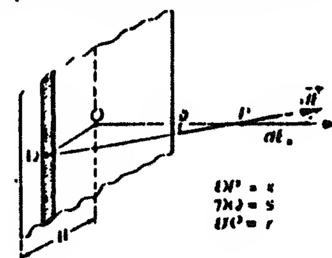
17.7 Si applica il teorema di Gauss ad un prisma retto di base unitaria e altezza x, con una base posta nel piano mediano dove $E = 0$: per $0 \le x \le d/2$ $E = \rho x/\varepsilon_0$, per $x \ge d/2$ $E = \rho d/2\varepsilon_0$; $V(d/2) - V(0) = -\rho d^2/8\varepsilon_0$, $V(P) - V(d/2) = -\rho dh/2\varepsilon_0$, $V(P) - V(0) = -\rho d(d + 4h)/8\varepsilon_0 = -0.4$ V; il lavoro vale $L = q\,[V(0) - V(P)] = 0.6 \cdot 10^{-7}$ J.

17.8 Principio di sovrapposizione: $E = E_{piano} - E_{disco}$ (il disco ha raggio R e densità σ);

$$E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{1/2}}\right] = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0(x^2 + R^2)^{1/2}} .$$

Il campo è nullo nel centro del foro, per $x = 0$, e per $x \to \infty$ tende a $\sigma/2\varepsilon_0$: a grandi distanze è come se il foro non ci fosse.

17.9 Si scompone la striscia in infinite striscioline infinitesime larghe ds; per unità di lunghezza $dq_l = d\lambda = \sigma ds$; il campo di una strisciolina è $dE = \sigma ds/2\pi\varepsilon_0 r$. Sulla retta x il campo risultante è parallelo alla retta medesima e si ottiene integrando $2dE_x = 2dE\cos\theta = \sigma ds\cos\theta/\pi\varepsilon_0 r$; $x\,tg\,\theta = s \Rightarrow ds = x\,d\theta/\cos^2\theta$, $r\cos\theta = x \Rightarrow 2dE_x = \sigma d\theta/\pi\varepsilon_0 \Rightarrow E(x) = \sigma\theta_0/\pi\varepsilon_0$ con $tg\,\theta_0 = d/x$. Per $x = 0$, $\theta_0 = \pi/2$, $E(0) = \sigma/2\varepsilon_0$ come per il piano indefinito; per $x \to \infty$ $\theta_0 \sim d/x$, $E \sim 2\sigma d/2\pi\varepsilon_0 x = \lambda/2\pi\varepsilon_0 x$: da grande distanza la striscia è vista come un filo indefinito avente per unità di lunghezza la carica $\lambda = 2\sigma d$.



17.10 Principio di sovrapposizione: $E = E_{piano} - E_{striscia} \Rightarrow E = \sigma/2\varepsilon_0 - \sigma\theta_0/(\pi\varepsilon_0)$ con $tg\,\theta_0 = d/x$; per $x = 0$ $E = 0$, per $x \gg d$ $E \sim \sigma/2\varepsilon_0$, come se non ci fosse la striscia.

17.11 $M = p \times E$; sull'asse x E è antiparallelo all'asse y; nella prima posizione $M = 0$, equilibrio instabile; la seconda posizione non è di equilibrio.

17.12 Nel punto A il campo E_A è parallelo e concorde alla direzione orientata BA, nel punto B $E_B = -E_A$; in A il dipolo ha l'energia $-p \cdot E_A = -pE_A$; in B alla fine ha l'energia $-p \cdot E_B = pE_A$ e in totale $W_1 = 2pE_A$. Nel secondo caso il campo in A ha direzione ortogonale a quella precedente e il dipolo ha energia nulla; l'energia finale è la stessa di prima per cui $W_2 = pE_A$ e quindi $W_1/W_2 = 2$. Nella prima situazione

$$E_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} \quad , \quad W_1 = \frac{\lambda p}{\pi\varepsilon_0 d} = 3.6 \cdot 10^{-7}\ J .$$

17.13 $L = q(V_A - V_B)$, $V = p\cos\theta/4\pi\varepsilon_0 r^2 \Rightarrow L = -qp/4\pi\varepsilon_0 r^2$; visto come ruota il dipolo q è positiva e L è negativo (svolto contro il campo). Nella rotazione il dipolo libera l'energia $2pE = 2pq/4\pi\varepsilon_0 r^2$, pari al doppio del modulo di $L \Rightarrow L' = 4 \cdot 10^{-7}$ J.

17.14 $1/2\, mv^2 = e\Delta V = e\,[q/4\pi\varepsilon_0 b - q/4\pi\varepsilon_0 (b + d)] = eqd/[4\pi\varepsilon_0 R(R + d)] \Rightarrow q = 2\pi\varepsilon_0 R(b + d)\, mv^2/ed = 6.3 \cdot 10^{-8}$ C.

17.15 $V_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$, $E(R_1) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} = \dfrac{V_0}{R_1}\dfrac{R_2}{R_2 - R_1}$;

$\dfrac{dE(R_1)}{dR_1} = - V_0 R_2 \dfrac{R_2 - 2R_1}{R_1^2(R_2 - R_1)^2} = 0 \Rightarrow R_1 = R_2/2 \Rightarrow E(R_1)_{min} = 4V_0/R_2$.

17.16 In base a 17.15 $E(R_1) = \dfrac{V_0 - V}{R_1}\dfrac{R}{R - R_1}$, $E(R) = \dfrac{V}{R}\dfrac{R_2}{R_2 - R}$:
si vuole che questi campi siano eguali e minimi. Eguagliando e imponendo la condizione di minimo per $E(R_1)$, $R_1 = R/2$, si trova $V = 4V_0 (R_2 - R)/(5R_2 - 4R)$; si sostituisce nell'espressione di $E(R)$, si eguaglia a zero $dE(R)/dR$ e si trova $R = 5R_2/8$; inserendo quest'ultima in V si ha $V = 3V_0/5$. Riassumendo, i campi sono minimi ed eguali se $R_1 = R/2$, $R = 5R_2/8$, $V = 3V_0/5$; il valore minimo risulta $E_{min} = 64V_0/25R_2 = 2.56\,V_0/R_2$, minore che nel problema 17.15.

17.17 Il potenziale del disco a distanza b vale $V_D = \sigma/2\varepsilon_0\,[(b^2 + a^2)^{1/2} - b]$; il potenziale della sfera, dovuto alla carica indotta è $V_s = -q_i/4\pi\varepsilon_0 r$; da $V_D + V_s = 0$ si deduce $q_i = 2\pi\sigma r\,[(b^2 + a^2)^{1/2} - b] = 10^{-15}$ C.

17.18 Nella prima situazione $C_A/C_B = V_B/V_A = 2/3$, nella seconda $(C_A + C)/C_B = V_B^2/V_A^2 = 9$; sostituendo $C_A = 2C_B/3$, $C_A = 9C_B - C \Rightarrow C_A = 0.16$ pF, $C_B = 0.24$ pF.

17.19 Inizialmente $q_1 = C_1V_1$, $q_2 = C_2V_2$; quando sono in parallelo $q = (C_1 + C_2)\,V_F = q_1 + q_2 = C_1V_1 + C_2V_2 \Rightarrow C_1 = 4C_2$. L'energia dissipata è data dalla differenza $W = 1/2\, C_1V_1^2 + 1/2\, C_2V_2^2 - 1/2\,(C_1 + C_2)\,V_F^2$; utilizzando $C_1 = 4C_2$ si trova $C_2 = 150$ pF e quindi $C_1 = 600$ pF.

17.20 Se q è la carica totale, su C_1 c'è $q_1 = q - q_2$, su C_2 c'è q_2 e $W = 1/2\,(q - q_2)^2/C_1 + 1/2\, q_2^2/C_2$; $dW/dq_2 = 0$ dà $q_2 = q\, C_2/(C_1 + C_2) \Rightarrow q_1 = q\, C_1/(C_1 + C_2) \Rightarrow q_1/q_2 = C_1/C_2$, che è proprio la maniera in cui si distribuisce la carica; inoltre $d^2W/dq_2^2 > 0$.

17.21 Quando il condensatore è carico a $V_0 = 200$ V e la capacità $C_2 = 500$ pF, $W_1 = 1/2\, C_2V_0^2 = 10^{-5}$ J e $q = C_2V_0 = 10^{-7}$ C. Alla fine del processo a carica costante che porta la capacità a $C_1 = 100$ pF $W_2 = 1/2\, q^2/C_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ J. Quindi occorre fornire il lavoro $L = W_2 - W_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ J; infine $V_1 = q/C_1 = 10^3$ V.

17.22 $C = \varepsilon_0\Sigma/d$; la forza, a carica costante, vale $F = q^2/2\varepsilon_0\Sigma \Rightarrow \Sigma = q^2/2\varepsilon_0 F$; $d = 1/2\, at^2 = 1/2\,(F/m)t^2$; $C = mq^2/F^2t^2 = 8.84 \cdot 10^{-12}$ F $=$ 8.84 pF.

17.23 Due condizioni: sulla carica, $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma = 4 \cdot 10^{-5}$ C/m², sui potenziali $\sigma_1 h_1/\varepsilon_0 = \sigma_2 h_2/\varepsilon_0$; risolvendo $\sigma_1 = 4 \cdot 10^{-5}\, h_2/(h_1 + h_2) = 2.40 \cdot 10^{-5}$ C/m², $\sigma_2 = 4 \cdot 10^{-5}\, h_1/(h_1 + h_2) = 1.60 \cdot 10^{-5}$ C/m². L'energia elettrostatica vale $W = 1/2\,\varepsilon_0 E_1^2\tau_1 + 1/2\,\varepsilon_0 E_2^2\tau_2 = (\sigma_1^2/2\varepsilon_0)\,\Sigma h_1 + (\sigma_2^2/2\varepsilon_0)\,\Sigma h_2 = 2.78$ J. Riapplicando le stesse formule con $h_1' = 4$ cm e $h_2' = 9$ cm si ottiene $W' = 2.50$ J; il campo fornisce il lavoro $L = W - W' = 0.28$ J.

17.24 Situazione iniziale: $C_1 = \varepsilon_0\Sigma/h = 3.54 \cdot 10^{-10}$ F, $C_2 = 7 \cdot 10^{-10}$ F, e la serie dei due vale $C_s = 2.35 \cdot 10^{-10}$ F, $V_1 = C_sV_0/(C_1 + C_s) = 498.3$ V, $q_1 = C_1V_1 = 17.64 \cdot 10^{-8}$ C $= q_s = C_sV_2 = C_sV_0$. Dopo l'inserzione del dielettrico $C_1' = \kappa C_1 = 8.85 \cdot 10^{-10}$ F, $C_s' = 3.91 \cdot 10^{-10}$ F, $q_1' = C_s'V_0 = 29.33 \cdot 10^{-8}$ C $= q_2'$. $\Delta q = q_1' - q_1 = q_s' - q_s = (C_s' - C_s)V_0 = 11.69 \cdot 10^{-8}$ C, $V_1' = q_1'/C_1' = 331.4$ V $\Rightarrow \Delta V_1 = V_1' - V_1 = -166.9$ V, $\Delta W_{el} = 1/2\,(C_s' - C_s)V_0^2 = 4.39 \cdot 10^{-5}$ J; $L_{gen} = 2\Delta W_{el} = 8.78 \cdot 10^{-5}$ J. Infine $q_p = (\kappa - 1)\, q_1'/\kappa = 17.60 \cdot 10^{-8}$ C.

17.25 L'aria è il mezzo 1, il dielettrico il mezzo 2; le condizioni sono $E_1h/2 + E_2h/2 = V$, $\kappa_1E_1 = \kappa_2E_2$, $\kappa_1 = 1$, $E_1 = 3 \cdot 10^6$ V/m (rigidità dielettrica dell'aria) $\Rightarrow V_{max} = 16.7 \cdot 10^3$ V.

17.26 Nel vuoto $C_0 = \varepsilon_0\Sigma/2h$, col dielettrico $C_1 = \kappa\varepsilon_0\Sigma/(\kappa + 1)h$, col metallo $C_2 = \varepsilon_0\Sigma/h$; per l'energia in generale $W = 1/2\, q^2/C \Rightarrow L_1 = W_0 - W_1 = q^2h(\kappa - 1)/2\kappa\varepsilon_0\Sigma$, $L_2 = W_0 - W_2 = q^2h/2\varepsilon_0\Sigma \Rightarrow L_2/L_1 = \kappa/(\kappa - 1) = 3 \Rightarrow \kappa = 1.5$.

17.27 $W_{ini} = 1/2\,(C_1 + C_2)V^2 - [\varepsilon_0 l\kappa x/h + \varepsilon_0 l(b - x)/h]\, V^2/2$ [illegible] $dW/dx = \varepsilon_0 l(\kappa - 1)\, V^2/2h$. W_{mag} [illegible] $V^2/2 \Rightarrow F = dW/dx = \varepsilon_0 l V^2 (\kappa - 1)/2h$ [illegible]. Eguagliando si trova $\kappa = 2$.

17.28 $E_1h_1 + E_2h_2 = V_0 \Rightarrow E_2 = 1.5 \cdot 10^5$ V/m; $\kappa_1E_1 = \kappa_2E_2 \Rightarrow \kappa_2 = 4.5$. Ovunque nel condensatore $D = q/\Sigma = 4 \cdot 10^{-5}$ C/m² $\Rightarrow E_1 = D/\kappa_1\varepsilon_0 = 3 \cdot 10^6$ V/m, $E_2 = D/\kappa_2\varepsilon_0 = 10^6$ V/m. Le polarizzazioni valgono $P_1 = \varepsilon_0(\kappa_1 - 1)E_1 = 1.33 \cdot 10^{-5}$ C/m², $P_2 = \varepsilon_0(\kappa_2 - 1)E_2 = 3.10 \cdot 10^{-5}$ C/m² $\Rightarrow \sigma_p = P_2 - P_1 = 1.77 \cdot 10^{-5}$ C/m² in modulo. $V = E_1h_1 + E_2h_2 = q/C = 1.6 \cdot 10^4$ V. Poiché senza dielettrico $E_0 = D/\varepsilon_0$, $V_0 = E_0h = Dh/\varepsilon_0 = 4.5 \cdot 10^4$ V, $L = \Delta W = 1/2\, q\,(V_0 - V) = 0.15$ J.

17.29 Considerando il sistema come tre condensatori in serie si ha una capacità totale $C = 73.8$ pF; $W = 1/2\, CV^2 = 36.9 \cdot 10^{-6}$ J. Ovunque nel condensatore $D = q/\Sigma = CV/\Sigma = 7.38 \cdot 10^{-6}$ C/m² $\Rightarrow P_i = [(\kappa_i - 1)/\kappa_i]\,D \Rightarrow P_1 = 7.08 \cdot 10^{-6}$ C/m², $P_2 = 5.54 \cdot 10^{-6}$ C/m², $P_3 = 6.46 \cdot 10^{-6}$ C/m²; le cariche di polarizzazione appaiono sulle superficie limite dei dielettrici con densità $\sigma_i = \pm P_i$.

17.30 Abbiamo due condensatori piani in parallelo tra loro, $C_1 + C_2 = 8\varepsilon_0$ F, in serie con un terzo, $C_3 = 16\varepsilon_0$ F ⇒ $C = 16\varepsilon_0/3 = 47.2$ pF.

17.31 La carica libera sulla sfera vale $q = 4\pi R^2 D = 4\pi R^2 \varepsilon_0 \kappa E$; la carica di polarizzazione sulla superficie dell'olio a contatto con la sfera vale $q_p = 4\pi R^2 \sigma_p = 4\pi R^2 P = 4\pi R^2 \varepsilon_0(\kappa - 1)E$ ⇒ $q_p/q = (\kappa - 1)/\kappa = 0.782$.

17.32 Facendo sistema $W_i = 6.250 \cdot 10^{-8}$ J, $W_f = 5.625 \cdot 10^{-8}$ J. Inoltre $W_i = 1/2\, q^2/C + 1/2\, q^2/C_0$ dove $C_0 = 4\pi\varepsilon_0 R_C = 10^{-11}$ F ⇒ $C = 4 \cdot 10^{-11}$ F; invece $W_f = 1/2\, q^2/\kappa C + 1/2\, q^2/C_0$ ⇒ $\kappa = 2$.

17.33 $E_a(P) = q/4\pi\varepsilon_0 r^2 = 10^4$ V/m; $E_b(P) = E_a(P)$, come si conclude ragionando sul vettore D; $E_c(P) = E_a(P)/\kappa_2 = 200$ V/m.

17.34 $V_3 = q/4\pi\varepsilon_0 R_3 = 360$ V ⇒ $q = 4 \cdot 10^{-8}$ C. La variazione di energia elettrostatica coincide con quella tra i raggi R_2 e R_3 per cui

$$\Delta W = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{\kappa C_2} \quad \text{con} \quad \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$\frac{\kappa - 1}{\kappa} = 0.556$. Inoltre $V_2 - V_3 = \int_{R_3}^{R_2} E\,dr = \int_{R_3}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \kappa r^2}\,dr$ ⇒

$\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\frac{1}{\kappa} = 0.556$. Ne segue $\kappa = 2$, $R_2 = 0.474$ m. Il potenziale del conduttore più interno rispetto all'infinito è $V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + 200$

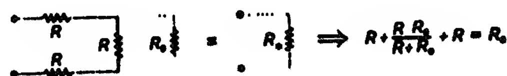
$+ 360 = 1000$ V ⇒ $R_1 = 0.3$ m. Infine $P = \frac{\kappa - 1}{\kappa} D = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{q}{4\pi r^2}$

⇒ $\sigma_2 = P_2 = 7.1 \cdot 10^{-9}$ C/m², $\sigma_3 = P_3 = 1.6 \cdot 10^{-9}$ C/m².

17.35 E_2 è il campo nel dielettrico ed è anche quello misurato nella cavità parallela. Per la continuità di D, $\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_0 \kappa E_2$ ⇒ $\kappa = E_1/E_2 = 2$ ⇒ $\chi = 1$. La densità di carica libera è $\sigma_l = D = \varepsilon_0 E_1 = 17.7 \cdot 10^{-9}$ C/m².

17.36 $E_1 = \rho_1 j$, $E_2 = \rho_2 j$, $\Delta E = E_1 - E_2 = (\rho_1 - \rho_2)i/\Sigma = 38$ V/m; $\sigma = \varepsilon_0(E_1 - E_2) = 3.36 \cdot 10^{-10}$ C/m².

17.37 La rete è indefinita: la resistenza totale R_0, vista dai terminali di sinistra, deve essere la stessa, aggiungendo o togliendo una cella; in termini grafici:



$$R + \frac{R R_0}{R + R_0} + R = R_0 \quad .$$

Risolvendo $R_0 = (1 + \sqrt{3})R = 2.73$ Ω. Se mancassero tutte le resistenze di uno dei lati orizzontali si troverebbe $R_0 = 1.62$ Ω.

17.38 Usando $P = V_0^2/R$, $W_1 = V_0^2(R_1 + R_2)/R_1R_2 = 270$ W, $W_2 = V_0^2/(R_1 + R_2) = 60$ W ⇒ $R_1 + R_2 = 15$ Ω, $R_1R_2 = 50$ Ω² ⇒ $R_2^2 - 15R_2 + 50 = 0$ e si hanno le due soluzioni identiche $R_1' = 5$ Ω $R_2' = 10$ Ω, $R_1'' = 10$ Ω $R_2'' = 5$ Ω.

17.39 La resistenza vista dai terminali di R_x deve essere eguale a R_x per realizzare il massimo trasferimento di potenza: quindi

$$R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = R_x \Rightarrow R_x = 500 \ \Omega \quad .$$

17.40 Si assuma per esempio che le correnti nelle due maglie circolino in senso orario; si scrivono le equazioni delle maglie e si risolve in i, che vale 0.4 A; risulta $R = 3.75$ Ω.

17.41 Da $R_1C_1 = \varepsilon_0\rho$ e da $C_1 = 2\pi\varepsilon_0/\log(R_2/R_1)$, capacità per unità di lunghezza di un condensatore cilindrico, $R_1 = (\rho/2\pi)\log(R_2/R_1) = 25.6 \cdot 10^{12}$ Ω/m.

17.42 La legge di carica è $V = V_0(1 - e^{-t/RC})$ con $RC = 40$ s; per $t = 27.7$ s $V = 1.5 \cdot 10^3$ V ⇒ $E_s = V/h = 1.5 \cdot 10^6$ V/m.

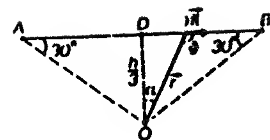
17.43 $L_1 = W_1 = 1/2\, CV^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ J, $W_2 = \kappa W_1 = 25 \cdot 10^{-3}$ J $= L_2 + L^*$ ⇒ $L^* = 5 \cdot 10^{-3}$ J. La resistenza di perdita R^* si può pensare in parallelo a R: $L_2 = \int (V^2/R)\,dt$, $L^* = \int (V^2/R^*)\,dt$ ⇒ $RL_2 = R^*L^*$ ⇒ $R^* = L_2R/L^* = 4R = 4\tau_1/C = 2\tau_1 V^2/W_1 = 4 \cdot 10^5$ Ω.

17.44 $v = d/t_0$ e occorre calcolare t_0: quando il proiettile taglia il filo in A il condensatore comincia a scaricarsi su R fino a che il proiettile taglia il filo in B. $V(t_0) = V_0 e^{-t_0/RC}$, $\Delta V/V = [V_0 - V(t_0)]/V_0 = 1 - e^{-t_0/RC}$ ⇒ $t_0 = 0.101$ s, $v = d/t_0 = 99$ m/s.

17.45 Con A chiuso e B aperto, ad equilibrio raggiunto $V(P) - V(Q) = 3V(Q)$ con $V(P) = 100$ V ⇒ $V(Q) = V(P)/4 = 25$ V. Successivamente, con A aperto e B chiuso, ad equilibrio raggiunto $V(Q) = 0$ e $V(P) - V(Q) = 75$ V come prima ⇒ $V(P) = 75$ V.

17.46 Consideriamo il lato AB: prima legge di Laplace

$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl \times r}{r^3}$; $dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\text{sen}\,\theta\, dl}{r^2}$;
dalla figura $\alpha = \theta - \pi/2$, $r\cos\alpha = r\,\text{sen}\,\theta = h/3$; $l = r\,\text{sen}\,\alpha = (h/3)\text{tg}\,\alpha = -(h/3)\text{ctg}\,\theta \Rightarrow dl = h\,d\theta/3\,\text{sen}^2\theta$. Sostituendo $dB = 3\mu_0 i\,\text{sen}\,\theta\,d\theta/4\pi h$. Questi campi elementari si sommano direttamente essendo tutti ortogonali al disegno:



$$B = \frac{3\mu_0 i}{4\pi h}\int_{30°}^{150°}\text{sen}\,\theta\,d\theta = 3^{3/2}\mu_0 i/4\pi h.$$ Considerando i tre lati $B_0 = 3B = 3^{5/2}\mu_0 i/4\pi h$. Per la spira $B_0 = \mu_0 i/2R \Rightarrow R = 2\pi h/3^{5/2} = 1.21$ cm.

17.47 B ortogonale al foglio, diretto verso il lettore; $i = \sigma v$ con i densità lineare di corrente, pari a $\sigma v \Rightarrow B = \mu_0 \sigma v = 2.51 \cdot 10^{-10}$ T.

17.48 Tra le piastre il campo B_0 è concorde all'asse y ed è pari al doppio di quello di una singola piastra: $B_0 = \mu_0 i = 12.56 \cdot 10^{-2}$ T. Al di fuori vede quello di una singola piastra, p.e. quella di destra, il campo varia linearmente da B_0 a zero secondo la formula $B(x) = B_0(2 - x/b) = \mu_0 i(2 - x)$. La pressione vale $p = B_0^2/2\mu_0 = \mu_0 i^2 b^2/2 = 6.28 \cdot 10^3$ N/m^2.

$$W = \int (B^2/2\mu_0)\,d\tau = (\mu_0 i^2 a^2/2)\int_b^{2b}(2b - x)^2 dx = (\mu_0 i^2 a^2/6) = 0.26 \text{ J}.$$

17.49 $Kx_0 = iBh \rightarrow x_0 = 4$ cm.

17.50 $F = \mu_0 i_1 i_2/2\pi a = 2 \cdot 10^{-3}$ N/m $\Rightarrow a = 1.1$ m. Condizione di equilibrio $\mu_0 i_1 i_2 b/2\pi x = \pm\mu_0 i_2 i_3 b/2\pi(a - x)$ col segno positivo per correnti concordi e negativo per correnti discordi. Risolvendo $x = a i_1/(i_1 \pm i_3) \Rightarrow x_1 = 7$ cm, $x_2 = 17.5$ cm.

17.51 Occorre calcolare il numero N di spire del solenoide: $\Phi = BR^2$, $R = N\Phi/\Sigma$ con $l = 2\pi r$, $\Sigma = i/j \Rightarrow N = l/2\pi r i j = 937 \Rightarrow B_0 = \mu_0 Ni/l = 0.235$ T. $L = W(0°) - W(90°) = \mu_0 i^2 B_0 = 5.88 \cdot 10^{-7}$ J.

17.52 Forza magnetica sull'ago (attrattiva) $F = \mu\,|\partial B/\partial z|$ con $B = \mu_0 NiR^2/2(z^2 + R^2)^{3/2}$; questa forza è equilibrata dal peso $mg \Rightarrow i = (2mg/\mu_0 NiR^2)\,[(z^2 + R^2)^{5/2}/3z] = 9.56 \cdot 10^{-2}$ Am^2.

17.53 $B(x) = \mu_0 NiR^2/2(x^2 + R^2)^{3/2}$, $B_0 = \mu_0 Ni/2R = 1.57 \cdot 10^{-4}$ T; periodo $T = 2\pi(I/\mu B_0)^{1/2} \Rightarrow \mu = 0.157$ Am^2. Conservazione dell'energia $1/2\, I\omega^2 - \mu B_0 = -\mu B(x_0) \Rightarrow B(x_0) = 1.37 \cdot 10^{-4}$ T $\Rightarrow (x_0^2 + R^2)^{3/2} = \mu_0 NiR^2/2B(x_0) = 9.17 \cdot 10^{-3}$ m^3 $\Rightarrow x_0 = 6.2$ cm.

$$F = \mu\,|dB/dx| = \frac{3}{2}\mu\mu_0 NiR^2\frac{x_0}{(x_0^2 + R^2)^{5/2}} = 9.14 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

17.54 $m_1 = \mu_0 i/2\,(i_1/R_1 + i_2/R_2) = 4\pi \cdot 10^{-5}$ T; $C_1 = 2\mu m_1 = \mu\mu_0(i_1/R_1 - i_2/R_2) = 8\pi \cdot 10^{-9}$ J; $C_2 = \mu\mu_0 i_2/R_2 = (2\pi \cdot 10^{-9})$ J. Risolvendo il sistema, $i_1 = 12.5$ A, $i_2 = 15$ A, $\mu = 4 \cdot 10^{-4}$ Am^2.

17.55 Momento magnetico della spira $m = \pi r^2 Ni = 0.1$ Am^2; $\Pi(t) = m B_0/2$. Conservazione dell'energia $-mB_0/2 = -mB_0 + 1/2\, m v_0^2 \Rightarrow v_0 = ...$. Costante ... della spira è accelerata da $x = 0$ a $x = l$, ... Nel primo tratto $F = ...$ $= 2.5$ m/s^2 $\Rightarrow t_1 = v_0/a = 0.040$ s. Nel secondo tratto $t_2 = l/v_0 = 0.200$ s. Tempo totale $t = 2(t_1 + t_2) = 0.480$ s.

17.56 $C = 2\pi\varepsilon_0 l/\log(R_2/R_1) = 4.4 \cdot 10^{-12}$ F, $L = \mu_0 l\,[1/4 + \log(R_2/R_1)]/2\pi = 94.3 \cdot 10^{-9}$ H $\Rightarrow (L/C)^{1/2} = 48.5\ \Omega$. Pressione elettrostatica $p_e = 1/2\,\varepsilon_0 E^2$, $E = \lambda/2\pi r\varepsilon_0$, $F = p_e 2\pi R_1 l = \lambda^2/4\pi\varepsilon_0 R_1 l = C^2V^2/4\pi\varepsilon_0 R_1 l = 44.5 \cdot 10^{-5}$ N; analogamente, $p_m = B^2/2\mu_0$, $B = \mu_0 i/2\pi R_2$, $F = p_m 2\pi R_2 l = \mu_0 i^2 l/4\pi R_2 = 9 \cdot 10^{-5}$ N.

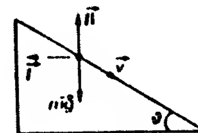
17.57 Energia mutua $W = Mi_1 i_2 = Ki_1 i_2/(r + a)$; $F = |dW/dr| = Ki_1 i_2/(r + a)^2 = 5 \cdot 10^{-5}$ N.

17.58 $B = \mu_0 i_0/2\pi y$, forza che si oppone al moto della sbarretta $\Phi = \int B\,l\,dy = (\mu_0 i_0 l/2\pi)\log(b/a)$; f.e.m. indotta nel circuito $\mathcal{E} = \int v B\,dy = (\mu_0 i_0 v/2\pi)\log(b/a)$, corrente indotta $i = \mathcal{E}/R$ ... $F = ma = m\,dv/dt = ...$; $dv/dt = -Kv \Rightarrow v(x) = v_0 - Kx$, $\mathcal{E}(x) = [(\mu_0 i_0/2\pi)\log(b/a)]\,(v_0 - Kx)$, $i(x) = \mathcal{E}(x)/R$; punto d'arresto $x_0 = v_0/K$; energia dissipata $W = 1/2\, m v_0^2$

17.59 $m\,dv/dt = -iBh$, $di/dt = ...$ $\Rightarrow v(t) = v_0 - iBht/m = v_0(1 - t/t_0)$ se t_0 è l'istante di arresto, $t_0 = mv_0/iBh \Rightarrow i = mv_0/Bht_0 = 2$ A. Legge di Ohm $\mathcal{E}(t) + vBh = Ri \Rightarrow \mathcal{E}(t) = Ri - v_0 Bh(1 - t/t_0) = 1.5 + 2t$ V. $W = \int_0^{t_0}\mathcal{E}(t)i\,dt = Ri^2 t_0 - 1/2\, m v_0^2 = 8.75$ J.

17.60 La forza sul filo è costante, $F = iBh = 10^{-3}$ N $\Rightarrow a = F/m = 0.2$ m/s^2; $v(t) = -v_0 + at = -1 + 0.2\,t$ m/s; per $t = 5$ s $v = 0$. Legge di Ohm $\mathcal{E} - vBh = Ri \Rightarrow \mathcal{E}(t) = 1 - 10^{-3}(1 - 0.2\,t)$ V; per $t = 5$ s $\mathcal{E} = 1$ V. Lavoro sulla sbarretta $L = Fx$ con $x = -v_0 t + 1/2\, at^2 = -2.5$ m $\Rightarrow L = 2.5 \cdot 10^{-3}$ J e si verifica che è eguale alla variazione di energia cinetica, $1/2\, m v_0^2$.

17.61 Equazione del moto $mg\,\text{sen}\,\theta - iBh\cos\theta = ma = m\,dv/dt$, $i = \mathcal{E}/R = (vBb/R)\,\text{sen}(\theta + \pi/2) = vBb\cos\theta/R \Rightarrow dv/dt = g\,\text{sen}\,\theta - vB^2b^2\cos^2\theta/mR$; $m = \delta b\Sigma$, $R = \rho b/\Sigma$, $mR = \rho\delta b^2 \Rightarrow dv/dt = g\,\text{sen}\,\theta$



$- v/\tau$, $\tau = m\delta/B^2\cos^2\theta = 0.203$ s $\Rightarrow v(t) = \tau g\,\mathrm{sen}\,\theta(1 - e^{-t/\tau}) = 0.163\,(1 - e^{-t/0.203})$ m/s; per $t = 10$ s $v = 0.163$ m/s.

17.62 $\mathcal{E} = vBh$ (nel lato superiore), $i = vBh/R$, $F = iBh = vB^2h^2/R$, $m\,dv/dt = mg - vB^2h^2/R$; posto $m = 4\delta\Sigma h$, $R = 4\rho h/\Sigma$, $\tau = 16\rho\delta/B^2 = 5.38 \cdot 10^{-4}$ s, $dv/dt = g - v/\tau \Rightarrow v(t) = \tau g(1 - e^{-t/\tau})$: la velocità tende al valore $v_\infty = \tau g = 5.27 \cdot 10^{-3}$ m/s. Legge del moto $dz/dt = v_\infty(1 - e^{-t/\tau})$ $\Rightarrow z(t) = v_\infty t - v_\infty\tau(1 - e^{-t/\tau})$.

17.63 La soluzione è analoga a quella di 17.61 e 17.62, con $b = 2\pi r$: $\mathcal{E} = vBb$, $i = \mathcal{E}/R$, $F = iBb$, $m\,dv/dt = mg - F$, $v(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau})$ con $\tau = mR/B^2b^2 = 0.127$ s e $v_\infty = \tau g = 1.24$ m/s; $i(t) = Bbv(t)/R = 0.78(1 - e^{-t/\tau})$ A.

17.64 Appena un lato della spira esce dal campo compare la f.em. vBa, circola la corrente $i = vBa/R$, agisce la forza $F = iBa = B^2a^2v/R \Rightarrow m\,dv/dt = -B^2a^2v/R \Rightarrow v(t) = v_0e^{-B^2a^2t/mR}$. Da $v_0/2 = v_0 e^{-(B^2a^2/mR)\,[illegible]}$ si ricava $B^2a^2/mR = 22.5\ \mathrm{s}^{-1}$, $B = 1.5$ T. Esprimendo la velocità in funzione di x invece che di t $m v\,dv/dx = -B^2a^2v/R \Rightarrow v(x) = v_0 - B^2a^2x/mR$; quando $v = 0$ $v_0 = 22.5\,x_0 = 2$ m/s. Legge di Felici: $q = \Delta\Phi/R = B\Delta\Sigma/R = Bax_0/R = 1.34$ C.

17.65 $\mathcal{E} = vBa$, $i = vBa/R$, $F = iBa = B^2a^2v/R$, opposta al moto; $m\,dv/dt = mv\,dv/dx = -B^2a^2v/R \Rightarrow dv = -(B^2a^2/mR)dx = -(\alpha^2a^2/mR)x^2dx \Rightarrow v(x) = v_0 - (\alpha^2a^2/3mR)\,x^3 = v_0 - \beta x^3$, $\beta = \alpha^2a^2/3mR = 2.50 \cdot 10^3\ \mathrm{m^{-2}s^{-1}}$; per $x = h$ $v = 0$, $v_0 = 0.16$ m/s. $W = 1/2\, m v_0^2 = 7.7 \cdot 10^{-4}$ J;

$q = \Delta\Phi/R$, $\Delta\Phi = \Phi_{fin} - \Phi_{in}$ con $\Phi_{in} = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = \int_0^h B\,d\Sigma = \int_0^h \alpha x a\,dx =$

$\alpha a h^2/2 \Rightarrow q = 0.06$ C.

17.66 In modulo $\mathcal{E} = d\Phi/dt = B\,d\Sigma/dt = B2x\,\mathrm{tg}30^\circ dx/dt$; all'istante considerato $x\,\mathrm{tg}30^\circ = l/4 \Rightarrow i = \mathcal{E}/R = vBl/2R \Rightarrow vB = 25$ mT/s. Dalla seconda condizione $v/B = qr/m = 10^2$ m/sT. In conclusione $v = 50$ m/s, $B = 0.5$ T.

17.67 $|\mathcal{E}| = \omega BD^2/2$, $i = \omega BD^2/2R$, $I\,d\omega/dt = M = -\int_0^D riB\,dr =$

$-\omega B^2D^4/4R$ (momento delle forze agenti, frenante) $\Rightarrow d\omega/\omega = -(B^2D^4/4RI)dt = -dt/\tau$ con $\tau = 4RI/B^2D^4 = 25$ s $\Rightarrow \omega = \omega_0\, e^{-t/\tau}$; per $t = 25$ s $\omega_F = \omega_0/e = 36.8$ rad/s, $Q = 1/2\, I\omega_0^2 - 1/2\, I\omega_F^2 = 86.5$ J.

17.68 $W = 1/2\, I(\omega_0^2 - \omega^2) = 4I\omega_0^2/9 \Rightarrow \omega_0 = 300$ rad/s. Legge di Ohm $V_0 + \mathcal{E} = RI$, $\mathcal{E} = -\omega BD^2/2$; a regime $V_0 + \mathcal{E} = 0 \Rightarrow V_0 = \omega_0BD^2/2 =$ 1.2 V.

17.69 $I\,d\omega/dt = -\int_0^D riB\,dr = -iBD^2/2 \Rightarrow \omega = \omega_0 - iBD^2t/2I$; all'arresto $\omega = 0 \Rightarrow i = 2I\omega_0/BD^2t_0 = 50$ A. Durante la frenata $\mathcal{E}(t) - \omega BD^2/2 = Ri$ $\Rightarrow \mathcal{E}(t) = 0.3 + 0.0236t$ V. $W = \int_0^{t_0} \mathcal{E}(t)i\,dt = Ri^2t_0 - 1/2\,I\omega_0^2 = 112$ J.

17.70 $\Phi = Ba^2\cos\omega t$, $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = \omega Ba^2\,\mathrm{sen}\,\omega t$, $\mathcal{E}_0 = \omega Ba^2 \Rightarrow \omega = 50$ rad/s, $v = \omega L/2 = 25$ m/s $= 90$ km/h.

17.71 $\Phi = B(\pi D^2/4)\cos\omega t$, $\mathcal{E} = \omega B(\pi D^2/4)\mathrm{sen}\,\omega t$, $i = (\omega B\pi D^2/4R)\mathrm{sen}\,\omega t$ con $R = \rho\pi D/\Sigma = 2.8 \cdot 10^{-3}\ \Omega$. Valore massimo della corrente $i_0 = \omega B\Sigma D/4\rho = 88.2$ A $\Rightarrow P = Ri^2_{eff} = Ri_0^2/2 = 10.9$ W $= W$.

17.72 Detti $a = AD$ e $b = DC$, $\Phi_1 = (\mu_0 ia/2\pi)\log[(d + b)/d]$, $\Phi_2 = (\mu_0 ia/2\pi)\log[d/(d - b)]$; $\Delta\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, in quanto c'è la rotazione di $180^\circ \Rightarrow \Delta\Phi = (\mu_0 ia/2\pi)\log[(d + b)/(d - b)] = 2.38 \cdot 10^{-8}$ Wb, $q = \Delta\Phi/R = 1.59 \cdot 10^{-8}$ C.

17.73 Se $\omega = 2.25$ rad/s, $T = 2\pi/\omega = 2.79$ s e la potenza dissipata vale $P = W/T = 1$ W. Da $P = Ri^2_{eff} = Ri_0^2/2$, $i_0 = 0.71$ A; $\mathcal{E}_0 = N\omega B\pi D^2 = Ri_0 \Rightarrow B = Ri_0/N\omega\pi D^2 = 1$ T; $q = \Delta\Phi/R = 2N\pi D^2B/R = 0.63$ C. Il flusso prodotto dalla bobina grande, percorsa da una corrente i^*, attraverso la bobina piccola: $\Phi^* = B^*n\pi d^2 = \mu_0D^2Ni^*n\pi d^2/2(D^2 + y^2)^{3/2} \Rightarrow M(y) = \Phi^*/i^* = \mu_0\pi nNd^2D^2/2(D^2 + y^2)^{3/2} = 3.95 \cdot 10^{-10}/(4 \cdot 10^{-2} + y^2)^{3/2}$; $M(0) = 0.49 \cdot 10^{-7}$ H, $M(\infty) = 0 \Rightarrow q = \Delta\Phi/R = M(0)i/R = 7.4 \cdot 10^{-8}$ C.

17.74 $W_2 = i^*\,\Delta\Phi$, $i^* = V_0/R = 10$ A corrente nella spira; $\Delta\Phi = (\mu_0 iN\Sigma/2\pi)(1/r_2 + 1/r_1) = 3 \cdot 10^{-6}$ Wb, dove il segno positivo deriva dal fatto che la spira viene capovolta $\Rightarrow W_2 = 3 \cdot 10^{-5}$ J. $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = -\frac{d}{dt}$

$(\mu_0 iN\Sigma/2\pi r) = -(\mu_0 iN\Sigma/2\pi)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \mu_0 iN\Sigma v/2\pi r^2$,

$$W_1 = \int \frac{\mathcal{E}^2}{R}\,dt = \int \frac{\mathcal{E}^2}{R}\frac{dr}{v} = \left(\frac{\mu_0 iN\Sigma}{2\pi}\right)^2 \frac{v}{3R}\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) = 5.83 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J}$$

(il segno meno dell'integrale è cancellato dal segno meno della velocità); $q = \Delta\Phi/R = (\mu_0 iN\Sigma/2\pi R)(1/r_1 - 1/r_2) = 10^{-5}$ C.

17.75 $V_2 = V_{2,max}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0.5$, $\theta = 60^\circ$; $V_{2,max} = d\Phi/dt = \pi R_2^2N_2dB_1/dt \Rightarrow dB_1/dt = 1.91$ T/s, costante $\Rightarrow B_1$ varia linearmente nel tempo, crescendo nel primo semiperiodo e decrescendo nel secondo, con derivata eguale in modulo nei due casi. La variazione massima di B_1 vale $\Delta B_1 = (dB_1/dt)(T/2) = 9.55 \cdot 10^{-3}$ T. Con $\theta = 60^\circ$ la potenza vale $P = V^2_{2,eff}/R$; $R = \rho 2\pi R_2N_2/\pi(d/2)^2 = 0.36\ \Omega \Rightarrow P = 25 \cdot 10^{-6}$ W, $W = PT = 25 \cdot 10^{-10}$ J.

17.76 Legge di scarica del condensatore $V = V_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = RC = 10^{-4}$ s; coefficiente di mutua induzione $M = \mu_0 N\Sigma/2\pi r = 2 \cdot 10^{-6}$ H; $\mathscr{E}(t) = -M di/dt = -(M/R)dV/dt = (MV_0/R\tau)\, e^{-t/\tau} = 8.2\, e^{-10^4 t}$ V; per $t = 3 \cdot 10^{-4}$ s $\mathscr{E} = 10^{-2}$ V.

17.77 Nella parte tratteggiata si deve pensare inserito un generatore di f.e.m. $\mathscr{E} = -d\Phi/dt = -\Sigma\, dB/dt = 1.14 \cdot 10^{-2}$ V; per la legge di Lenz la polarità del generatore è positiva a sinistra e negativa a destra per cui la corrente circola nello strumento da sinistra a destra. Risolvendo il circuito si trova $i_A = 10^{-6}$ A.

17.78 Se il campo si annulla dopo $t_0 = 10^{-2}$ s $B_0 = 10 \cdot 10^4$; dalla legge di Felici $q = \Delta\Phi/R$: $\Phi_1 = B_0 N\Sigma$, $\Phi_2 = 0 \Rightarrow B_0 = qR/N\Sigma = 10^{-2}$ T $\Rightarrow \alpha = 10^2$ T/s^2; $i(t) = (-1/R)\, d\Phi/dt = 2\alpha N\Sigma t/R = 2t$ A, $i(t_0) = i_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ A.

$$W = \int_0^{t_0} Ri^2 dt = \frac{4}{3} R t_0^3 = 1.33 \cdot 10^{-4}\ \text{J}.$$

17.79 $\Phi = Mi(t)$, $\Delta\Phi = M\Delta i = M\,|i(t_2) - i(t_1)| = 4M$ Wb; $q = \Delta\Phi/R \Rightarrow M = \Delta\Phi/\Delta i = qR/\Delta i = 2.5 \cdot 10^{-6}$ H.

17.80 $2\pi r_1 E = \mathscr{E} = \pi r_1^2 dB/dt = \pi r_1^2 \mu_0 n\alpha = V_s \Rightarrow \alpha = V_s/\mu_0 n\pi r_1^2 = 10^{-7}$ s^{-1}; nel secondo caso $\mathscr{E}' = \pi r_2^2 \mu_0 n\alpha > V_s$ e pertanto la scintilla scocca.

17.81 $B(t_0) = 0.5\, B_0 \Rightarrow$ forza di Lorentz $F_m = 0.5\, qvB_0$, radiale, diretta verso l'esterno; siccome B varia nel tempo c'è un campo elettrico $\mathbf{E}$: $2\pi RE = -\pi R^2 dB/dt \Rightarrow E = \alpha B_0 R/2$, $F_e = q\alpha B_0 R/2$: la forza elettrica è parallela e concorde alla velocità; direzione della forza risultante: $\operatorname{tg}\theta = F_m/F_e = v/\alpha R = 1$, $\theta = 45°$ rispetto a v, verso l'esterno.

17.82 Da $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ si ricava $\Gamma = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \mu_0 \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \Gamma = \mu_0 Ni + \mu_0 Mh$ (all'esterno del cilindro $\mathbf{M} = 0$) $\Rightarrow M = (\Gamma - \mu_0 Ni)/\mu_0 h = 10^5$ A/m.

17.83 Nel filo $H = (i/2\pi R^2)r$, $W_2 = \int_0^R 1/2\, \mu_0 H^2 d\tau = (\mu_0 i^2/8\pi^2 R^4) \int_0^R r^2 2\pi r dr = \mu_0 i^2/16\pi$; nella corteccia $H = i/2\pi r$, $W_1 = \int_R^{2R} 1/2\, \mu_0 \chi_m H^2 d\tau = (\mu_0 \chi_m i^2/4\pi) \log 2 \Rightarrow W_1/W_2 = 4\chi_m \log 2 \Rightarrow \chi_m = 10$.

17.84 $B_1(R_1) = \mu_0 \chi_{m,1} i/2\pi R_1$, $B_2(R_1) = \mu_0 \chi_{m,2} i/2\pi R_1$, $\Delta B = B_2 - B_1 = \mu_0(\chi_{m,2} - \chi_{m,1}) i/2\pi R_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ T. Da $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ $\Delta B = \mu_0 \Delta M$ in quanto $\mathbf{H}$ è continuo nel passaggio attraverso la superficie, ovvero $\Delta M = (\chi_{m,2} - \chi_{m,1}) i/2\pi R_1 = 31.8$ A/m, $\Delta B = 4 \cdot 10^{-5}$ T. Ma $\Delta M = j_m$ densità lineare di corrente di magnetizzazione per cui $i_m = 2\pi R_1 j_m = (\chi_{m,2} - \chi_{m,1}) i = 2$ A.

17.85 $B_1(R) = \mu_0 i/2\pi R$, $B_2(R) = \mu_0 \chi_m i/2\pi R$, $\Delta B = \mu_0(\chi_m - 1)i/2\pi R = 100 B_0 = 100\, \mu_0 i/2\pi R_0 \Rightarrow \chi_m - 1 = 100 R/R_0$. Se $j = Kr$, $i(r) = \int_0^r j d\Sigma = \int_0^r Kr 2\pi r dr = 2\pi K r^3/3$; $B(r) = \mu_0 i(r)/2\pi r = \mu_0 K r^2/3 \Rightarrow B(R_0)/B(R) = R_0^2/R^2 = 4 \Rightarrow R = 1$ cm, $\chi_m = 51$.

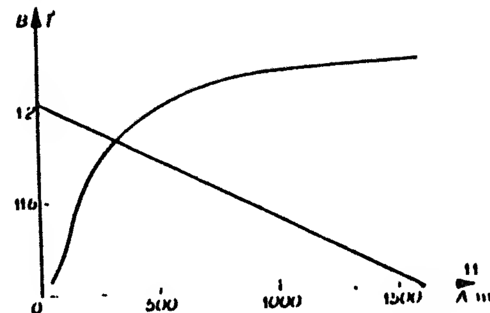
17.86 Nel primo caso $L_1 i = B_e \pi R^2$, nel secondo $L_2 i = B_i \pi(R^2 - r^2) + B_e \pi r^2$; facendo il rapporto $B_i/B_e = 1 + \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right) = 25$

17.87 $H = Ni/l = 60$ A/m, $B = 10^{-1} H = 6 \cdot 10^{-2}$ T, $B/H = \mu_0 \chi_m \Rightarrow \chi_m = 795.8$ e $M = B/\mu_0 - H = (\chi_m - 1)H = 4.77 \cdot 10^4$ A/m. Con l'interferro $H(l - h) + H_0 h = Ni^*$ con $H_0 = B/\mu_0 = 4.77 \cdot 10^4$ A/m e $H = 60$ A/m $\Rightarrow i^* = 0.28$ A. $W_1 = (B^2/2\mu_0 \chi_m)\Sigma l$, $W_2 = (B^2/2\mu_0 \chi_m)\Sigma(l - h) + (B^2/2\mu_0)\Sigma h = \Sigma B^2(l - h + \chi_m h)/2\mu_0 \chi_m \Rightarrow W_1/W_2 = l/(l - h + \chi_m h) = 0.16$.

17.88 Pressione magnetica $B^2/2\mu_0$, forza complessiva $F = (B^2/2\mu_0)\, 2\Sigma = P = 500$ N $\Rightarrow B = 5 \cdot 10^{-2}$ T. $(B/\mu_0 \chi_m)(l - 2h) + 2hB/\mu_0 = Ni \Rightarrow N = 400$

17.89 Inizialmente $H_i = Ni/l$, $W_i = 1/2\, \mu_0 \chi_m (Ni/l)^2 \Sigma l = 1/2\, \mu_0 \chi_m \Sigma (Ni)^2/l$. Dopo l'allontanamento, detto H_f il valore del campo nel ferro e H_f' nell'interferro, $H_f(l - 2h) + H_f' 2h = Ni$ e $\mu_0 \chi_m H_f = \mu_0 H_f' \Rightarrow H_f = Ni/[l + 2(\chi_m - 1)h]$, $H_f' = \chi_m Ni/[l + 2(\chi_m - 1)h] \Rightarrow W_f = 1/2\, \mu_0 \chi_m H_f^2 \Sigma(l - 2h) + 1/2\, \mu_0 H_f'^2 \Sigma 2h = 1/2\, \mu_0 \chi_m \Sigma (Ni)^2/[l + 2(\chi_m - 1)h] < W_i \Rightarrow \Delta W = W_i - W_f = 0.82$ J. Questo è anche il lavoro meccanico L che occorre per effettuare la separazione: sia L che ΔW sono assorbiti dal generatore che mantiene costante la corrente $\Rightarrow L_{gen} = -1.64$ J

17.90 $H(l - h) + Bh/\mu_0 = Ni \Rightarrow B = \mu_0 Ni/h - \mu_0(l - h) H/h = 1.26 - 7.88 \cdot 10^{-4} H$. Si riporta in un grafico questa retta e la curva che si ricava dai



dati della tabella, trovando l'intersezione $H = 320$ A/m, $B = 1$ T. Posto $H =$ $B/\mu_0\chi_m$ si ricava $B = \mu_0\chi_m Ni/[l + (\chi_m - 1)h]$. Nella zona interessata, approssimando con una retta la curva di magnetizzazione $\chi_m = 2500$, $B = 0.2$ $i \Rightarrow dB/dt = 0.2\, di/dt = 10^3$ T/s $\Rightarrow \mathscr{E} = N\Sigma dB/dt = 100$ V.

17.91 $P = Fv = mgv \Rightarrow m = P/gv = 0.1$ Kg. Inoltre $mg = F = iBa =$ $\mathscr{E}Ba/R = vB^2a^2/R \Rightarrow B = (mgR/v)^{1/2}/a$ con $m = 4\delta a\Sigma$, $R = 4\rho a/\Sigma \Rightarrow$ $mR = 16\delta\rho a^2 \Rightarrow B = (16\delta\rho g/v)^{1/2} = 1.5$ T. Dalla $B = \mu_0\chi_m Ni/[l + (\chi_m - 1)h]$ si ricava $\chi_m = 200$.

17.92 Quando la sbarra penetra di un tratto l, $\Delta L = \mu_0\chi_m n^2\Sigma l \Rightarrow \chi_m =$ 300. Nel processo viene speso lavoro meccanico $L_{mec} = \lambda l^2/2$ e aumenta l'energia magnetica, $\Delta W = i^2\Delta L/2$; tutto ciò a spese del generatore. Da L_{mec} $= \Delta W$ si ricava $i = 0.2$ A $\Rightarrow H = ni = 800$ A/m, $M = \chi_m H = 3.17 \cdot 10^5$ A/m.

17.93 $W = \Sigma v \cdot 500 \cdot 0.1 = 7.1$ J/m^3; $P_v = vW = 35.5 \cdot 10^3$ W/m^3, $P_m =$ $P_v/\varrho = 4.36$ W/Kg. Da $P_v dt = c\varrho dT$, $dT/dt = P_v/c\varrho = 9.7 \cdot 10^{-3}$ gradi/s.

17.94 $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1R_2/(R_2 - R_1) = 33.3$ pF, frequenza del circuito oscillante $\nu = \omega/2\pi$ con $\omega = (LC)^{-1/2} = 12.2 \cdot 10^6$ rad/s; $1/2\, CV_0^2 = 1/2\, LI_0^2 \Rightarrow I_0 =$ 40.8 mA, $B = (\mu_0 I_0/2\pi a)$ sen$(\omega t + \phi)$, $\mathscr{E} = \Sigma dB/dt = (\Sigma\mu_0 I_0\omega/2\pi a)$ cos$(\omega t$ $+ \phi) \Rightarrow \mathscr{E}_{max} = \Sigma\mu_0 I_0\omega/2\pi a = 2 \cdot 10^{-3}$ V.

17.95 $V_{0,1}^2 + V_{0,2}^2 + 2V_{0,1}V_{0,2}\cos\phi = 100^2 \Rightarrow \cos\phi = 0$, $\phi = \pi/2$; $P = RI^2$ $\Rightarrow R = 16\ \Omega$; $R^2 + \omega^2L^2 = V^2/I^2 \Rightarrow \omega L = 12\ \Omega$.

17.96 $Z = 51.65\, e^{i14°}$, $I_1/I_2 = 1\, e^{i16°}$.

17.97 Si procede come per il circuito RLC in serie, ma ragionando sull'ammettenza; in particolare per $\omega = (LC)^{-1/2}$ la corrente è minima.

17.98 Annullando la parte immaginaria dell'impedenza

$$\omega^2 = \frac{R_L^2}{LCR_C^2}\,\frac{CR_L^2 - L}{CR_C^2 - L}\ ,\quad \nu = \omega/2\pi.$$

17.99 $Z_{tot} = 10 - i10$, $I_{tot} = 0.05\,(1 + i)\,V_0$, $I_{RC} = 0.05i\, V_0$, $V_u = Z_{RC}I_{RC}$ $= 0.5\,(1 + i)\,V_0 \Rightarrow V_u/V_0 = 0.707\, e^{i45°}$.

17.100 Quando il parallelo LC_2 è in risonanza, cioè $\omega = (LC_2)^{-1/2}$, esso non assorbe corrente (Z infinita) e pertanto $V_{EB} = V_{AB}$.

17.101 $V(C_1) = (V_i/i\omega C_1)/(R_1 + 1/i\omega C_1)$, $V(R_2) = R_2V_i/(R_2 + 1/i\omega C_2)$; V_u $= V(C_1) - V(R_2)$: si sviluppa e si trova che se $R_1C_1 = R_2C_2 = A$ $V_u/V_i =$ $(1 - \omega^2A^2 - 2i\omega A)/(1 + \omega^2A^2) = 1\, e^{i\phi}$ con $\mathrm{tg}\phi = -2\omega A/(1 - \omega^2A^2) \Rightarrow$ $\phi = \pm\pi/2$ se $\omega = 1/R_1C_1 = 1/R_2C_2$.

17.102 Si impone l'equilibrio del ponte, cioè che i due estremi dello strumento siano allo stesso potenziale:
$I_1R = I_2\,(R_1 + 1/i\omega C)$, $I_1 i\omega L = I_2(R_x + i\omega L_x) \Rightarrow R(R_x + i\omega L_x) = i\omega L$ $(R_1 + 1/i\omega C) \Rightarrow R_x = L/RC = 20\ \Omega$, $L_x = LR_1/R = 0.2$ H.

17.103 $Z_{tot} = X_1 + i\,[X_2 + \omega L_1 + \omega L_2/(1 - \omega^2L_2C)]$. Si vuole che $(V/Z_{tot})\,(X_1 + iX_2)$ sia in fase con V ovvero che $(X_1 + iX_2)/Z_{tot}$ sia reale; ciò porta alla condizione $\omega X_1\,[L_1 + L_2/(1 - \omega^2L_2C)] = 0$ ovvero $X_2 = 0$, $\omega = 0$, $\omega^2 = (L_1 + L_2)/L_1L_2C$.

17.104 Si ricorre al metodo delle maglie, fissando arbitrariamente i versi delle correnti e il segno della f.e.m. del generatore ad un certo istante, solo allo scopo di dare un segno ai vari termini. Le equazioni relative alle quattro maglie sono:

$$\left(R_x + \frac{1}{i\omega C}\right) I_1 \qquad - R_x\, I_2 \qquad\qquad - \left(\frac{1}{i\omega C}\right) I_4 = V$$

$$- R_x\, I_1 + (R_x + i\omega L_x)\, I_2 \qquad - i\omega L_x\, I_3 \qquad\qquad = 0$$

$$- i\omega L_x\, I_2 + \left(i\omega L_x + \frac{1}{i\omega C}\right) I_3 - \left(\frac{1}{i\omega C}\right) I_4 = 0$$

$$\left(\frac{1}{i\omega C}\right) I_1 \qquad\qquad - \left(\frac{1}{i\omega C}\right) I_3 + \left(\frac{2}{i\omega C}\right) I_4 = 0$$

A noi interessa calcolare I_2 e porla eguale a zero; risolvendo per esempio col metodo di Kramer si trova che deve essere $(R_x/C)\,(2L_x - 1/\omega^2C) +$ $iL_x(\omega RR_x - 1/\omega^2C) = 0 \Rightarrow L_x = 1/2\omega^2C = 25$ H, $R_x = 1/\omega^2C^2R = 500$ Ω.

17.105 La corrente di spostamento dovuta alla variazione di **E** genera un campo $\mathbf{B}_i$ da $\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ nelle condizioni geometriche del problema $2\pi r_0$

$$B_0 = \frac{1}{c^2}\,\pi r_0^2\,\frac{dE}{dt}\,,\quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0\Sigma} = 1.5 \cdot 10^7 \,\mathrm{sen}\, 10^7 t\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \Rightarrow B_0 = \frac{r_0}{2c^2}\,\frac{dE}{dt} =$$

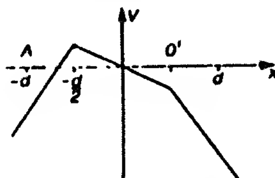
$= 3.33 \cdot 10^{-5} \cos 10^7 t$ T.

17.106 $x = (v_0\cos\theta)t$, $y = (v_0\,\mathrm{sen}\,\theta)t - 1/2\,(qE/m)\,t^2$, $(dx/dt) = v_0\cos\theta = 4.89$ $\cdot 10^6$ m/s, $(dy/dt) = v_0\,\mathrm{sen}\,\theta - (qE/m)\,t = 1.021 \cdot 10^6 - 10^{13}t$ m/s. Il punto x $= d = 0.5$ m è raggiunto al tempo $t_0 = d/(v_0\cos\theta) = 1.021 \cdot 10^{-7}$ s e pertanto ivi $dy/dt = 0$: direzione e verso della velocità v sono quelli dell'asse x, il modulo è $v_0\cos\theta = 4.89 \cdot 10^6$ m/s.

17.107 Il campo elettrico vale $E = \rho x/\varepsilon_0$; l'oscillatore, che ha carica negativa, risente di una forza di richiamo $F = ma = -Kx - q\rho x/\varepsilon_0 = -(K + q\rho/\varepsilon_0)x \Rightarrow \omega^2 = (K + q\rho/\varepsilon_0)/m = \omega_0^2 + q\rho/\varepsilon_0 m \Rightarrow \rho = m\varepsilon_0(\omega^2 - \omega_0^2)/q = 10^{-10}$ C/m³.

17.108 Si ricorre al metodo della carica immagine: l'elettrone è sottoposto a una forza $F(x) = e^2/4\pi\varepsilon_0(2x)^2 = e^2/16\pi\varepsilon_0 x^2$ e il lavoro nello spostamento vale $L = (e^2/16\pi\varepsilon_0)(1/d' - 1/d) = 5.18 \cdot 10^{-26}$ J, con $d' = d - h$. Si eguaglia L all'aumento di energia cinetica $1/2\, mv^2$ e si trova $v = 337$ m/s. Se si calcola invece la variazione di energia elettrostatica $\Delta W = e[V(d') - V(d)]$ con $V(x) = e/4\pi\varepsilon_0 2x$ troviamo $\Delta W = 2L$: l'altra metà di ΔW è andata in lavoro compiuto sulla distribuzione di carica indotta sulla lastra.

17.109 I campi valgono $E_1 = -(3\rho_2/2\varepsilon_0)\, u_x$ per $x < d/2$, $E_2 = (\rho_2/2\varepsilon_0)\, u_x$ per $-d/2 < x < d/2$, $E_3 = (3\rho_2/2\varepsilon_0)\, u_x$ per $x > d/2$. In corrispondenza nelle tre regioni $V(x) = (\rho_2/2\varepsilon_0)(2d + 3x)$, $V(x) = -\rho_2 x/2\varepsilon_0$, $V(x) = (\rho_2/2\varepsilon_0)(d - 3x)$. $V(A) = -\rho_2 d/2\varepsilon_0$, $V_{max} = V(-d/2) = \rho_2 d/4\varepsilon_0$. Per vincere la barriera di potenziale $\Delta V = V_{max} - V(A) = 3\rho_2 d/4\varepsilon_0 = 3.75 \cdot 10^3$ V il protone deve quindi avere almeno l'energia cinetica $T_{min} = 3.75$ KeV; per ogni valore superiore a T_{min} il protone può raggiungere qualunque punto dell'asse x oltre $x = -d/2$. L'elettrone lasciato libero con velocità nulla in A, dove $V = -\rho_2 d/2\varepsilon_0$, si ferma oltre D' in un punto in cui il potenziale ha di nuovo questo valore $\Rightarrow -\rho_2 d/2\varepsilon_0 = (\rho_2/2\varepsilon_0)(d - 3x_0) \Rightarrow x = 2d/3 = 0.33$ m.



17.110 $E_x = -\partial V/\partial x = -ay$, $E_y = -\partial V/\partial y = -ax$; sull'asse $x = y$ il campo è radiale, diretto verso il centro, di modulo $a(x^2 + y^2)^{1/2} = ar$; in particolare per $x_0 = y_0 = 3$ cm $E_0 = 1.27 \cdot 10^6$ V/m. Il moto dello ione è armonico semplice con $r = r_0 \cos\omega t$, $r_0 = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} = 4.24$ cm, $\omega = (qa/m)^{1/2} = 2.19 \cdot 10^7$ rad/s; la velocità è $dr/dt = -\omega r_0 \operatorname{sen}\omega t$; nell'origine $v_0 = \omega r_0 = 9.3 \cdot 10^5$ m/s.

17.111 La carica q è positiva, quindi B è diretto verso il lettore; quando la particella torna in Q ha l'energia cinetica iniziale $T = 1/2\, mv_0^2 = 0.8 \cdot 10^{-15}$ J = 5 KeV. Il raggio di curvatura nella regione C è $R_C = mv/qB$ con $v = (v_0^2 + 2qV/m)^{1/2} = 1.41 \cdot 10^6$ m/s $\Rightarrow R_C = 1.41$ cm; nella regione A $R_A = mv_0/qB = 1$ cm e in definitiva $PQ = 2(R_C - R_A) = 0.82$ cm.

17.112 L'elettrone risente di una forza proporzionale alla distanza dall'origine e rivolta verso di questa $\Rightarrow$ moto armonico semplice di ampiezza $x_0 = 10$ cm. Da $1/2\, mv^2 = e\Delta V = eA\, x_0^2/2$ si ricava $A = 5.69 \cdot 10^2$ V/m². Equazione del moto $x = -x_0\cos\omega t \Rightarrow a = \omega^2 x_0 \cos\omega t = -\omega^2 x$, $\omega^2 = qA/m = 10^{14}$ (rad/s)²; per $x = 5$ cm $a = 5 \cdot 10^{12}$ m/s². $R = mv_0/qB_0$, $t = \pi R/v_0 = \pi m/qB_0 \Rightarrow B_0 = \pi m/qt = 10^{-2}$ T.

17.113 L'elettrone compie un moto elicoidale nel campo magnetico; il passo dell'elica vale $L = 2\pi m v_0 \cos\theta/qB \Rightarrow v_0 = 7 \cdot 10^6$ m/s. Nel condensatore $l = v_0 t$ ... $= 9.9 \cdot 10^6$ m/s; all'uscita $v_y = 0$ ... $\Rightarrow E = m v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta/ql = 995.4$ V/m.

17.114 $E = \rho R/\varepsilon_0 r_0 \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 E r_0/R = 2 \cdot 10^{-7}$ C/m³; $\lambda = \rho/2\pi r$; la carica in moto risente di un campo elettrico $v \times B$, che deve essere eguale ed opposto a quello dovuto alla distribuzione di carica, visto che non c'è deflessione: $\rho R/\varepsilon_0 r = \mu_0 i v/2\pi r \Rightarrow i = 2\pi\rho R/\varepsilon_0\mu_0 v = 2\pi\rho R c^2/v = 174.5$ A.

17.115 $\operatorname{sen} i' = \operatorname{sen} i/n = 0.260$, $i' = 15.1°$, $R_p = 0.070$, $R_s = 0.132$, dopo la riflessione l'onda è polarizzata ellitticamente: nel piano di incidenza $I_p = 0.5\, I_0 R_p = 0.031$ W/cm², nel piano ad esso ortogonale $I_s = 0.5\, I_0 R_s = 0.057$ W/cm². Dopo il polaroide $I = 0.031 \cos^2 30° + 0.057 \operatorname{sen}^2 30° = 0.037$ W/cm².

17.116 $\operatorname{sen} i' = \operatorname{sen} i/n$, $i' = 25.2°$, $R_p = 0.015$, $R_s = 0.079$, $W_p = 0.5\, W_0 R_p$ ... $\Rightarrow W_0 = 2.13$ W, $W_s = 0.5\, W_0 R_s = 0.084$ W, $W_R = W_p + W_s$ ... W, $W_T = W_0 - W_R = 2.03$ W.

17.117 La luce incidente è naturale, quella che esce da L è polarizzata rettilinearmente nel piano di incidenza, quindi l'unica soluzione possibile è che la luce riflessa sia polarizzata rettilineamente: siamo in condizioni di Brewster e inoltre la lamina deve essere mezz'onda; $\operatorname{tg} i = 1.43 \Rightarrow i = 55°$, $i' = 90° - 55° = 35°$, $R_p = 0$, $R_s = 0.117$; $I = 0.5\, I_0 R_s \Rightarrow I_0 = 8.5$ W/cm². Da $2\pi d\Delta n/\lambda = (2K + 1)\pi$ risulta che nel visibile c'è la sola soluzione $K = 0$, $\lambda = 2d\Delta n = 400$ nm.

17.118 $\operatorname{sen} i' = \operatorname{sen} i/n \Rightarrow i' = 16.8°$, $R_p = 0.051$, $R_s = 0.102$; $E_p = E_0\cos\theta$, $E_s = E_0\operatorname{sen}\theta$; $E_p^R = |\operatorname{tg}(i - i')/\operatorname{tg}(i + i')|\, E_0\cos\theta$, $E_s^R = |-\operatorname{sen}(i - i')/\operatorname{sen}(i + i')|\, E_0\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{tg}\theta_R = |-\cos(i - i')/\cos(i + i')|\operatorname{tg}\theta \Rightarrow \theta = -48.5°$. $W_R = (R_p\cos^2\theta + R_s\operatorname{sen}^2\theta)\, W_0 = 0.080$ W. E_R è perpendicolare al piano di incidenza in condizioni di Brewster, $\operatorname{tg}\theta_R = 0 \Rightarrow \theta_0 = 60.26°$. Se W non varia l'onda uscente dalla lamina è polarizzata circolarmente e pertanto la lamina deve essere quarto d'onda, $2\pi d\Delta n/\lambda = \pi/2 \Rightarrow d = \lambda/4\Delta n = 12.5$ µm. $W = W_R/2 = 0.040$ W.

17.119 Dal primo polaroide viene trasmesso $I_1 = I_0/2$; il secondo polaroide a sua volta trasmette $I_2 = I_1\cos^2\theta$ e il terzo $I(\theta) = I_2\cos^2(\pi/2 - \theta) = I_2\operatorname{sen}^2\theta = I_1\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = (I_0/8)(\operatorname{sen}2\theta)^2 = 1.25(\operatorname{sen}2\theta)^2$ W/m².

17.120 La lamina mezz'onda ruota di $2\alpha = 2°$ il piano di polarizzazione dell'onda che la attraversa; detto questo restano valide tutte le considerazioni fatte nel problema 11.7.

17.121 La luce incidente è polarizzata ellitticamente; se si ha estinzione col polaroide vuol dire che la luce emergente dalla lamina è polarizzata rettilinea-

mente e quindi che la lamina è quarto d'onda: $2\pi d\Delta n/\lambda = \pi/2 \Rightarrow d = 13.9$ μm.

17.122 La componente y passa attraverso il primo polarizzatore, mentre quella z viene assorbita $\Rightarrow I_{0y} = I_1$; d'altra parte, essendo l'intensità proporzionale al quadrato dell'ampiezza, $I_{0z} = I_{0y}/2 \Rightarrow I_0 = I_{0y} + I_{0z} = 3I_1/2 = 1.62 \cdot 10^3$ W/m². Da $I_{0z} = 1/2\, c\varepsilon_0 E_0^2$ $E_0 = (2I_{0z}/c\varepsilon_0) = 2 \cdot 10^3$ V/m. $I_f = I_1$ se la lamina non cambia lo stato e la direzione di polarizzazione, $2\pi d\Delta n/\lambda = 2K\pi$ che ha l'unica soluzione $K = 2$, $\lambda_3 = 400$ nm. $I_f = 0.5 I_1$ se la lamina trasforma la polarizzazione da rettilinea in circolare, cioè se è quarto d'onda, $2\pi d\Delta n/\lambda = (2K + 1)\,\pi/2$ che ha due soluzioni, $K = 2$ $\lambda_4 = 640$ nm, $K = 3$ $\lambda_4 = 457$ nm. $I_f = 0$ se la lamina è mezz'onda per cui ruota di $2\alpha = 90°$ il piano di polarizzazione, $2\pi d\Delta n/\lambda = (2K + 1)\pi$ che ha una sola soluzione $K = 1$, $\lambda_5 = 533$ nm.

17.123 La lamina deve introdurre uno sfasamento di $2K\pi$ (l'onda trasmessa ha lo stesso piano di polarizzazione di quella incidente) oppure di $(2K + 1)\pi$, nel qual caso il piano di polarizzazione viene ruotato di 90°. In generale cioè $2\pi d\Delta n/\lambda = m\pi$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$); dai dati $500 = 2 \cdot 10^{-3} d/(m + 1)$, $555.55 = 2 \cdot 10^{-3} d/m \Rightarrow m = 9$, $d = 250$ μm. In conclusione si hanno tre lunghezze d'onda (625, 500, 416.7 nm) per cui il piano di polarizzazione non ruota e due (555.55, 454.5 nm) per cui ruota.

17.124 La prima lamina deve introdurre uno sfasamento di $K\pi$ con K intero, $2\pi d_1\Delta n/\lambda = K\pi \Rightarrow \lambda_1 = 600$ nm, $\lambda_2 = 450$ nm emergono ancora polarizzate rettilineamente. La seconda lamina deve essere quarto d'onda $\Rightarrow 4d_2\Delta n = (2K + 1)\lambda$, soddisfatta solo da $\lambda_1 = 600$ nm.

17.125 $2\pi d\Delta n/\lambda_1 = \pi/2 \Rightarrow$ per λ_1 la lamina è quarto d'onda e quindi λ_1 esce dalla lamina polarizzata circolarmente; $2\pi d\Delta n/\lambda_2 = \pi \Rightarrow$ lamina mezz'onda, λ_2 esce polarizzata rettilineamente lungo l'asse z. L'incidenza sulla seconda faccia del prisma avviene in condizioni di Brewster (tg32° = $1/n$, $i' = 58°$), $R_s = \sin^2(i - i') = 0.192 \Rightarrow T_p = 1$, $T_s = 1 - R_s = 0.808$. Per λ_1 $W_p = 0.5\, W_1 = W_s$ e viene trasmesso $W = W_p + T_s W_s = 7.23$ W, polarizzata ellitticamente; per λ_2 $W_s = W_2$ e viene trasmessa $W = T_s W_2 = 3.23$ W, polarizzata rettilineamente (si noti che si è trascurata la riflessione sulla prima faccia del prisma, $R \simeq 0.05$).

17.126 Per E_1 $\sin i_1/n_s \Rightarrow r_1 = 26.23°$, per E_2 $\sin r_2 = \sin i/n_e \Rightarrow r_2 = 30.34°$. La separazione lungo la lastra tra i fasci incidenti è $h/\cos i$ per cui $d\,\mathrm{tg}\,r_2 = d\,\mathrm{tg}\,r_1 + h/\cos i \Rightarrow h = d\cos i(\mathrm{tg}\,r_2 - \mathrm{tg}\,r_1) = 0.13$ cm. La differenza di cammino ottico tra i due raggi è $x = h\,\mathrm{tg}\,i + n_s d/\cos r_1 - n_e d/\cos r_2 = 0.453$ cm e lo sfasamento corrispondente è $2\pi x/\lambda = 2\pi \cdot 7550$: l'onda risultante è polarizzata rettilineamente.

17.127 $\alpha_1 = k_1 c_1 d$, $\alpha_2 = k_2 c_2 d \Rightarrow k_2 = k_1 c_1 \alpha_2/c_2 \alpha_1 = 36.7$ gradi · cm²/g.

17.128 $\phi_1 = (2\pi/\lambda)\,[(n_1 - 1)t_1 + (n_2 - 1)t_2] = 920\pi$, $\phi_2 = (2\pi/\lambda)\,[(n_1 - 1)t_1 - (n_2 - 1)t_2] = 40\pi \Rightarrow t_1 = 200$ μm, $t_2 = 220$ μm.

17.129 $\sin i' = \sin i/n \Rightarrow i' = 28.13°$, $i - i' = 16.87°$; il percorso dal punto di incidenza a O è lungo $b/\cos(i - i')$ e quindi la differenza di cammino ottico vale $x = x_B - x_A = n[b/\cos(i - i') + OO'] - [OO' - b\,\mathrm{tg}(i - i')] = 9.98$ cm. Nella riflessione aria-vetro $R_p = 8.46 \cdot 10^{-3} \Rightarrow I_A = 8.46 \cdot 10^{-3}$ W/cm²; la potenza trasmessa è $W_t = 991.54 \cdot 10^{-3}$ W, la sezione del fascio trasmesso è $\Sigma_T = \Sigma\cos i'/\cos i = 1.247$ cm² $\Rightarrow I_t = 795.14 \cdot 10^{-3}$ W/cm². Nella riflessione vetro-aria si vede dalla figura che il doppio dell'angolo di incidenza è $90° - (i - i')$ per cui l'angolo di incidenza vale $i_1 = 36.57°$ e quello di trasmissione $i_t = 63.34° \Rightarrow R_p' = 7.77 \cdot 10^{-3}$, $I_R = R_p' I_t = 6.18 \cdot 10^{-3}$ W/cm²; in O' la percentuale $[(1 - n)/(1 + n)]^2 = 4 \cdot 10^{-2}$ viene riflessa e in definitiva $I_B = 0.96\, I_R = 5.93 \cdot 10^{-3}$ W/cm². A x corrisponde lo sfasamento $\phi = 2\pi x/\lambda + \pi \Rightarrow \cos\phi = -0.94 \Rightarrow I = I_A + I_B + 2(I_A I_B)^{1/2}\cos\phi = 1.07 \cdot 10^{-3}$ W/cm².

17.130 Detta d la distanza tra le sorgenti virtuali e L la distanza dalle sorgenti allo schermo, $d/L = \theta = 1.2 \cdot 10^{-2}$ rad; i massimi di intensità si hanno per $d\sin\alpha \simeq d\alpha = K\lambda$ e la loro coordinata sullo schermo è $z = L\alpha \Rightarrow z = K\lambda L/d = K\lambda/\theta \Rightarrow \lambda = \theta z/K = 0.6$ μm.

17.131 La differenza di fase è $\phi = (2\pi/\lambda)\,[r_2 - r_1 - (n - 1)t]$; nel massimo centrale $\phi = 0 \Rightarrow r_2 - r_1 = (n - 1)t$. È anche $r_2 - r_1 = d\theta$, $L\theta = \Delta z \Rightarrow r_2 - r_1 = d\Delta z/L$, $n - 1 = d\Delta z/Lt = 0.4$, $n = 1.4$. La distanza tra le due frange è $\Delta x = \lambda L/d \Rightarrow \Delta x/\lambda = L/d = 500$.

17.132 Le frange si spostano verso l'alto se il tubo 1 è sopra quello 2; la differenza di cammino ottico tra le onde che arrivano nello stesso punto P, distante Δz dal centro, è $d\Delta z/L$; se questa è pareggiata dalla differenza introdotta dai tubi, $(n - 1)t$, si ha in P il massimo centrale $\rightarrow (n - 1)t = d\Delta z/L \Rightarrow \Delta n = n - 1 = d\Delta z/Lt = 10^{-3}$.

17.133 Per λ_1 $2nt = (2K_1 + 1)\,\lambda_1/2$, per λ_2 $2nt = K_2\lambda_2$; si trova che l'unica possibilità è $K_1 = 1$, $K_2 = 2 \Rightarrow t = 0.34$ μm.

17.134 Si hanno minimi per $2nd = K\lambda$ ovvero $\lambda = 853/K$ nm e massimi per $2nd = (2K + 1)\,\lambda/2$ ovvero $\lambda = 1706/(2K + 1)$ nm. Nello spettro visibile c'è un solo minimo per $\lambda = 426.5$ nm (luce violetta) e un solo massimo per $\lambda = 568.7$ nm (luce gialla).

17.135 Se c'è stato uno spostamento di N frange $(n - 1)t = N\lambda_0 = 10^{-6}$ m; dalla seconda condizione $2nt = K_1\lambda_1 = K_2\lambda_2$ con $K_2 = K_1 - 1 \Rightarrow K_1 = 15$, $nt = 3 \cdot 10^{-6}$ m $\Rightarrow t = 2 \cdot 10^{-6}$ m, $n = 1.5$.

17.136 $(n - 1)t = 3\lambda_0 \Rightarrow t = 2.4$ μm. Massimi di riflessione: $2nt = (2K + 1)\,\lambda/2 \Rightarrow \lambda = 4nt/(2K + 1) = 14.4 \cdot 10^3/(2K + 1)$ nm. Agli estremi dello

spettro visibile corrispondono i valori $K = 66$ (~ 686 nm) e $K = 17$ (~ 4[illegible] nm): ci sono cioè [illegible] massimi di riflessione e altrettanti minimi in trasmissione; i valori di λ si ricavano [illegible] appena trovati.

17.137 Dalla lamina $2n_2 s = (2K + 1)\,\lambda/2 \Rightarrow n_2 = 1.337$. La riflessione da n_1 a n_2 avviene in condizioni di Brewster (luce polarizzata nel piano di incidenza): $\operatorname{tg} i = n_2/n_1 \Rightarrow n_1 = 1.5$[illegible]. Poiché $n_1 > n_2$ è possibile la riflessione totale per $i > i_0$ con $\operatorname{sen} i_0 = n_2/n_1$, $i_0 = 62.52°$.

17.138 $2nd_1 = K_1\lambda$, $2nd_2 = K_2\lambda \Rightarrow 2n\Delta d = \lambda\Delta K$, $n\Delta d = 72.45$ μm; $(n - 1)\,\Delta t = N\lambda = 22.4$ μm $\Rightarrow \Delta d = 5$[illegible] μm, $n = 1.45$.

17.139 I massimi gialli si hanno per $2zn = (2K + 1)\,\lambda/2$ con z distanza tra i vetri; in aria si contano $N = K_2 - K_1 = 2a/\lambda$ frange (λ in [illegible]), cioè 333. In presenza del liquido $N' = (K_2 - K_1)' = n(K_2 - K_1) = nN \Rightarrow n = 1.3$.

17.140 Nel primo caso $2ns = (2K + 1)\,\lambda/2$ con $K = 50 \Rightarrow ns =$ [illegible] nm. Nel secondo caso si hanno minimi in riflessione per $2ns = K\lambda$ e nell'intervallo dato $K_{min} = 34$ e $K_{max} = 40 \Rightarrow$ sette valori di lunghezza d'onda tra 594.[illegible] nm e 5[illegible] nm.

17.141 Il raggio della generica frangia chiara è $r = [(2K + 1)R\lambda/2n]^{1/2}$; esso può valere al massimo L, da cui $K_{max} = nL^2/R\lambda - 0.5$; per una variazione Δn dell'indice di rifrazione $\Delta N = \Delta K_{max} = \Delta n L^2/R\lambda = 11$ se $\Delta n = 1.33 - 1 = 0.33$.

17.142 $\operatorname{sen} i' = \operatorname{sen} i/n \Rightarrow i' = 44.8$[illegible]°, differenza di cammino ottico $2nd\cos i' = $ [illegible]9.2 nm. Si hanno massimi per $2nd\cos i' = K\lambda \Rightarrow K_1 = 42$[illegible], $K_2 = 29$[illegible], valori interi tra 292 e 42[illegible], $N = 129$ frange (riflessioni in fase).

17.143 La differenza di cammino ottico è $\Delta s = 2nd\cos i'$ con $n = 1$ e $i' = 20°$, cioè $\Delta s = $ [illegible]8.8 μm. Si hanno minimi in riflessione per $\Delta x = K\lambda$ (riflessioni in opposizione di fase). $K_A = 47$, $K_B = 28.9 \Rightarrow 19$ frange scure.

17.144 $\lambda = 340/\nu = 2.5$ cm (assumendo $v = 340$ m/s). I massimi nelle direzioni tali che $a\operatorname{sen}\theta = K\lambda$: $\theta = 0°$, $\theta = 30° \Rightarrow a = 5$ cm, $\theta = 90°$. Larghezza del massimo centrale $\Delta\theta = 2\lambda/Na = 0.2 \Rightarrow L = D\Delta\theta = 20$ cm.

17.145 $L = \lambda/4 = v/4\nu = (\gamma RT/M)^{1/2}/4\nu \Rightarrow \nu'/\nu = (T'/T)^{1/2} = 1.0085$; nel violino la corda è fissata ai due estremi: $L = \lambda/2 = v/2\nu = (\tau/m)^{1/2}/2\nu \Rightarrow \nu'/\nu = (\tau'/\tau)^{1/2} = 1.0085 \Rightarrow \tau' = 1.0171\,\tau$. Poiché $\tau = 4L^2\nu^2 m = 69.7$ N, $\tau' = 70.9$ N, $\Delta\tau = 1.2$ N.

17.146 In aria $v_1 = (\gamma_1 RT/M_1)^{1/2}$, in elio $v_2 = (\gamma_2 RT/M_2)^{1/2}$; $\lambda\nu = v$ e nei due casi, essendo la geometria la stessa, è eguale la lunghezza d'onda $\Rightarrow \nu_1/\nu_2$

$= v_1/v_2 = (\gamma_1 M_2/\gamma_2 M_1)^{1/2} = (1.4 \cdot 4/1.67 \cdot 28.7)^{1/2} = $ [illegible] $\Rightarrow \nu_2 = 2.93 \cdot 10^{3}$ Hz.

17.147 La fondamentale della canna è $\nu_0 = v/2L = (\gamma/\mu)^{1/2}/2L = 4$[illegible] Hz. La colonna d'aria è chiusa a una estremità e aperta all'altra, quando è lunga $L_A = (2K + 1)\,\lambda/4$ può risuonare. Se si trovano due successive posizioni di risonanza $\Delta L_A = \lambda/2 \Rightarrow \lambda = 2\Delta L_A = $ [illegible]72 m $\Rightarrow v = \lambda\nu_0 = $ [illegible]7 m/s.

17.148 $v = (\gamma RT/M)^{1/2} = $ [illegible] m/s; $L = \lambda/2$, $\nu = v/\lambda = v/2L = 560$ Hz, $\omega = 2\pi\nu = 3.52 \cdot 10^{3}$ rad/s. $I_1 = V/Z_1 = V/|i(\omega L_1 - 1/\omega C_1)|$, $V_1 = I_1 i\omega L_1 = \omega^2 C_1 L_1 V/(\omega^2 C_1 L_1 - 1)$; $I_2 = V/Z_2 = V/|i(\omega L_2 - 1/\omega C_2)|$, $V_2 = I_2/i\omega C_2 = -V/(\omega^2 C_2 L_2 - 1)$; $V_1 = V_2 \Rightarrow \omega^4 = 1/L_1 L_2 C_1 C_2 \Rightarrow C_1 = $ [illegible]73 nF.

17.149 $\Delta\theta = 2\lambda/Na = \lambda/a$, larghezza angolare della frangia centrale, sullo schermo essa è lunga $\Delta z = f\lambda/a \Rightarrow a = f\lambda/\Delta z = 50$ μm. Se manca il massimo del quarto ordine avviene sia $\operatorname{sen}\theta_4 = 4\lambda/a$ che $\operatorname{sen}\theta_4 = \lambda/d \Rightarrow d = a/4 = 12.5$ μm.

17.150 Primi minimi per $d\operatorname{sen}\theta = \lambda$, $\theta = 2.5 \cdot 10^{-1}$ rad $\Rightarrow$ larghezza del massimo sullo schermo $\Delta z = 2fd = $ [illegible]5 mm. Se mancano i massimi di ordine pari $s/d = 2$, $s = $ [illegible] mm.

17.151 $a\operatorname{sen}\theta_2 = 2\lambda$, $z_2 = f\operatorname{tg}\theta_2 = f\operatorname{sen}\theta_2 = 2f\lambda/a \Rightarrow a = 50$ μm, manca il massimo del quarto ordine, $a/d = 4$, $d = 12.5$ μm, $R_2 = $ [illegible] $(\pi d\operatorname{sen}\theta_2/\lambda)^2 = (\operatorname{sen} 2\pi d/a)^2/(2\pi d/a)^2 = (\operatorname{sen}\pi/2)^2/(\pi/2)^2 = 4/\pi^2 = 0.405$

17.152 In generale la forma della figura di interferenza o di diffrazione dipende dai dati geometrici e da λ, anzi da λ/a, se varia λ e la figura deve rimanere la stessa occorre che vari a in modo tale che $(\lambda + d\lambda)/(a + da) = \lambda/a \Rightarrow |da/a| = |d\lambda/\lambda|$. Nel caso proposto, se $\Delta\lambda/\lambda = 1.5 \cdot 10^{-2}$, $a = 1.015$ sia per la fenditura che per i fori di Young.

17.153 Avvicinando il secondo schermo al primo, resta ancora le due fenditure, ognuna delle quali è vista dal centro del primo schermo sotto l'angolo $\theta = a_2/2l$, contato nella direzione per cui si ha il minimo di interferenza davanti alle fenditure del primo schermo: $a_1\theta = \lambda_0/2 \Rightarrow \theta = \lambda_0/2a_1 = a_2/2l_1 \Rightarrow l_1 = a_1 a_2/\lambda_0 = 34.3$ cm. In queste condizioni lo schermo S appare buio. Avvicinando il secondo schermo si arriva ad un certo punto nella direzione del primo massimo di interferenza davanti alle fenditure del primo schermo: $a_1\theta = \lambda_0 \Rightarrow \theta = \lambda_0/a_1 = a_2/2l_2 \Rightarrow l_2 = a_1 a_2/2\lambda_0 = 17.2$ cm. In questo caso su S si osserva un sistema di frange distinte con il massimo di intensità. Diminuendo ulteriormente l si riproducono le stesse condizioni; per esempio il buio si osserva per $l_{min} = a_1 a_2/[(2K + 1)\lambda_0]$. Quando c'è il gas $l_1' = a_1 a_2/\lambda = a_1 a_2 n/\lambda_0 = nl_1 \Rightarrow n = l_1'/l_1 = 1.02$. Il potere separatore della lente è a_1/l. $1.22\,\lambda_0/D \Rightarrow D = 2.67$ mm. Il diametro della pupilla dell'occhio è ~ 2 mm e quindi esso non riuscirebbe a separare le immagini.

RICHIAMO DI ALCUNE NOZIONI DI CALCOLO VETTORIALE E DI GEOMETRIA

A.1 Introduzione

Nella soluzione di alcuni problemi si ricorre alle proprietà dei campi scalari e vettoriali, con riferimento al potenziale V, al campo elettrico $\mathbf{E}$, al campo magnetico $\mathbf{B}$ e più raramente al potenziale vettore $\mathbf{A}$. Abbiamo perciò ritenuto opportuno richiamare qualche nozione di calcolo vettoriale dando per scontati i concetti di campo, la definizione di vettore e delle sue componenti, le operazioni di somma di vettori, prodotto di vettore per un numero, prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto, derivazione di un vettore.

Sono poi elencate alcune formule relative alle coordinate cilindriche e sferiche e all'angolo solido, che tornano utili nel calcolo di integrali.

A2. Integrazione di vettori, circuitazione, flusso

L'integrazione di un vettore in un dato dominio si esegue attraverso le componenti:

$$\int \mathbf{a}(s)ds = \mathbf{u}_x \int a_x dx + \mathbf{u}_y \int a_y dy + \mathbf{u}_z \int a_z dz \quad ;$$

in modo analogo si procede per integrazioni su più variabili.

Una particolare operazione di integrazione è quella lungo una linea: se A e B sono gli estremi di un arco di curva C continuo, contenuto nel dominio del campo vettoriale $\mathbf{a}(x,y,z)$ e $d\mathbf{l} = dx\,\mathbf{u}_x + dy\,\mathbf{u}_y + dz\,\mathbf{u}_z$ esprime l'elemento d'arco infinitesimo, si definisce integrale di linea lungo l'arco AB suddetto la quantità scalare

$$\int_A^B \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \int_A^B a_t dl \quad . \qquad \text{(A.1)}$$

Se la linea C è chiusa l'integrale prende il nome di *circuitazione* di $\mathbf{a}$ lungo C e si indica così:

$$\Gamma_C(\mathbf{a}) = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \quad . \qquad \text{(A 2)}$$

17.154 $\lambda\nu = 3 \cdot 10^8$ m/s, $\lambda = 1$ cm; massimi di interferenza per $\text{sen}\,\theta = K\lambda/p = K/9$ con K variabile da 0 a 9, minimi di diffrazione per $\text{sen}\,\theta = K'\lambda/d = K'/3$ con K' variabile da 1 a 3. Quindi si ha emissione apprezzabile per $\text{sen}\,\theta = K/9$ con $K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7, \pm 8$. I rapporti valgono $R_1 = (\text{sen}\,\pi d/p)^2/(\pi d/p)^2 = 0.684$, $R_2 = (\text{sen}\,2\pi d/p)^2/(2\pi d/p)^2 = 0.171$. $\Delta\theta = 2\lambda/Np = 4.36 \cdot 10^{-2}$ rad $\Rightarrow N = 5$.

17.155 Potere risolutivo $R = NK = 180 \Rightarrow N = 45$; $\Delta\theta = \lambda/Np \Rightarrow p = 7$ μm. Se manca il massimo del terzo ordine $d = p/3 = 2.34$ μm. $R_4 = (\text{sen}\,4\pi/3)^2/(4\pi/3)^2 = 0.043$.

17.156 Passo del reticolo $p = 1/n = 2.5$ μm, numero di fenditure $N = nL = 8000$. Massimi del secondo ordine agli angoli $\text{sen}\,\theta_v = 2\lambda_v/p = 0.525 \Rightarrow \theta_v = 31.65°$, $\text{sen}\,\theta_b = 2\lambda_b/p = 0.328 \Rightarrow \theta_b = 19.15° \Rightarrow \theta_v - \theta_b = 12.40°$; $\Delta\theta_v = 2\lambda_v/Np = 8.75 \cdot 10^{-5}$ rad, $\Delta\theta_b = 2\lambda_b/Np = \Delta\theta_v\,\lambda_b/\lambda_v = 5.47 \cdot 10^{-5}$ rad.

17.157 Potere risolutivo richiesto $\lambda/\Delta\lambda = 656.30/0.13 = 5048 = 2N \Rightarrow N = 2524$ fenditure. Da $p\,\text{sen}\,\theta_0 \simeq p\theta_0 = 2\lambda$ e da $z_0 = f\theta_0 = 2f\lambda/p$ si ricava $p = 13.1$ μm $\Rightarrow n = 1/p = 762$ fenditure per centimetro. Infine $\Delta z = 2f\Delta\lambda/p = 10$ μm.

17.158 $f\,\text{tg}\,\theta_1 = z_1 \Rightarrow \theta_1 = 23.58°$, $p\,\text{sen}\,\theta_1 = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1/p = 0.2$; differenziando $f\,\text{tg}\,\theta = z$ e $p\,\text{sen}\,\theta = 2\lambda$ si ottiene $dz/d\lambda = 2f/p\cos^3\theta \Rightarrow p = 2.97$ μm, $\lambda_1 = 594$ nm. Potere risolutivo $\lambda/\Delta\lambda = 594 = 2N \Rightarrow N = 297$; la larghezza delle righe è $\sigma_z = 2\Delta z = 3.50 \cdot 10^{-2}$ cm. Da $R_K = (\text{sen}\,K\pi/5)^2/(K\pi/5)^2$, $R_3 = 0.255$, $R_4 = 0.055$: si riesce dunque a osservare anche il massimo del terzo ordine, ma non quelli successivi.

17.159 $p\,\text{sen}\,\theta_3 = 3\lambda \Rightarrow \theta_3 = 10.37°$, $i = 90° - \theta_3 = 79.63°$, $\text{sen}\,i' = \text{sen}\,i/n \Rightarrow i' = 40.98°$, $R_p = 0.224$, $R_s = 0.527$, $R = 0.5\,(R_p + R_s) = 0.376$; $I_R = RI \Rightarrow I = 1.41$ W/cm² $= I(\theta_3)$; $R_3 = (\text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,\theta_3/\pi\,\text{sen}\,\theta_3)^2 = 0.898 \Rightarrow I(0) = I(\theta_3)/R_3 = 1.57$ W/cm².

17.160 L'immagine data dallo specchio dista $x = 2h - d(n - 1)/n$ dal fondo del recipiente.

17.161 L'indice di rifrazione del gas deve essere tale che $40° < i_0 < 45°$ dove i_0 è l'angolo limite di riflessione totale $\Rightarrow \text{sen}\,40° < \text{sen}\,i_0 = n/n_1 < \text{sen}\,45° \Rightarrow n_1\text{sen}\,40° < 1 + a\rho < n_1\text{sen}\,45° \Rightarrow (28.5 < \rho < 131.4)$ Kg/m³. Da $pV = RT$ e $\rho = M/V$ si ricava $p = \rho RT/M$ con $R = 8.31 \cdot 10^3$ J/Kmole · K e $M = 44$ Kg; a $T = 293$ K $p = 55.34 \cdot 10^3\,\rho$ N/m² $= 0.55\,\rho$ atm $\Rightarrow (15.7 < p < 72.3)$ atm.

17.162 In deviazione minima $\theta_{1,A} = \theta_{2,A} = \alpha/2 = 30°$ con $\text{sen}\,\theta_{1,A} = \text{sen}\,i/n_A$, $\text{sen}\,\theta_{2,A} = \text{sen}\,i'_A/n_A$; i è l'angolo di incidenza, i'_A quello di emissione dal prisma, $i = i'_A = 54.10°$ per λ_A. Anche λ_B incide con $i = 54.10° \Rightarrow$

$\text{sen}\,\theta_{1,B} = \text{sen}\,i/n_B$, $\theta_{1,B} = 29.76°$, $\theta_{2,B} = \alpha - \theta_{1,B} = 30.24°$, $\text{sen}\,i'_B = n_B\text{sen}\,\theta_{2,B} \Rightarrow i'_B = 55.28° \Rightarrow \Delta\theta = i'_B - i'_A = 1.18°$.

17.163 L'oggetto risulta nel fuoco anteriore del diottro aria-vetro per cui l'immagine data dallo specchio si forma nel suo fuoco e dista 15 cm dal vertice del diottro; $1.5/p + 1/q = 0.5/10 \Rightarrow q = -20$ cm: l'immagine finale è virtuale e si trova nel vertice dello specchio.

17.164 $1/p + n/q = (n - 1)/R$, $p' = l - q$, $n/p' + 1/q' = (1 - n)/(-R) = (n - 1)/R$; sostituendo i valori numerici e risolvendo $q' = (320 - 5.76\,p)/(5.84 + 0.304\,p)$; per avere $q' > 0$ deve essere $0 \leq p \leq 55.6$ cm $\Rightarrow 55.6 \geq q' \geq 0$ cm.

17.165 $1/p + 1/q = 1/f \Rightarrow q = 50$ cm, $p' = l - q = -20$ cm, oggetto virtuale per lo specchio; $1/p' - 1/q' = -2/R \Rightarrow q' = -21.43$ cm, immagine reale che dista $p'' = 8.57$ cm dalla lente; $1/p'' + 1/q'' = 1/f \Rightarrow q'' = -10.9$ cm, immagine virtuale a destra della lente. L'ingrandimento è $I = (q/p)(-q'/p')(q''/p'') = 0.34$: l'immagine virtuale è rimpicciolita.

17.166 La lunghezza è eguale alla differenza dei moduli delle focali, pari a $l = 90$ cm. L'ingrandimento visuale è $I = \beta/\alpha = -f_1/f_2 = -10$ (immagine diritta, segno negativo).

17.167 $P = \Sigma r\sigma T^4 \Rightarrow \Sigma = P/r\sigma T^4 = 0.83$ cm².

17.168 $\sigma(T_1^4 - T_0^4)\,2\pi Rl = P \Rightarrow T_1 = 529$°K.

Un altro integrale molto importante è quello di superficie: se Σ è una superficie a due facce, contenuta nel dominio del campo vettoriale $\mathbf{a}$, si chiama *flusso di* $\mathbf{a}$ *attraverso la superficie* Σ la quantità scalare

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{a}) = \int_\Sigma \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma \quad , \qquad (A.3)$$

dove $\mathbf{u}_n$ è il versore della normale all'elemento superficiale infinitesimo $d\Sigma$. Se la superficie è chiusa si adotta il simbolo

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{a}) = \oint \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma \qquad (A.4)$$

e si parla di flusso uscente o entrante a seconda dell'orientazione scelta per $\mathbf{u}_n$. In ogni caso, sia per l'integrale di linea che per quello di superficie, se si cambia il verso di percorrenza della linea C o il verso di $\mathbf{u}_n$ il risultato cambia segno.

A.3. Gradiente di un campo scalare. Campo conservativo.

Dato un campo scalare $\phi(x, y, z)$ e preso un punto generico del dominio di ϕ, operiamo uno spostamento infinitesimo individuato dal vettore $d\mathbf{s} = dx\,\mathbf{u}_x + dy\,\mathbf{u}_y + dz\,\mathbf{u}_z$; la variazione di ϕ è:

$$d\phi = \phi(x + dx, y + dy, z + dz) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

$$\Rightarrow \quad d\phi = \text{grad}\,\phi \cdot d\mathbf{s} \quad , \qquad (A.5)$$

avendo definito il vettore *gradiente* del campo scalare ϕ

$$\text{grad}\,\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad . \qquad (A.6)$$

Se lo spostamento $d\mathbf{s}$ avviene su una superficie di livello $\phi(x, y, z) = \text{cost}$ risulta $d\phi = 0$ e quindi, secondo (A.5), $\text{grad}\,\phi$ è *ortogonale alla superficie di livello*. Per uno spostamento generico lungo una linea che forma un angolo θ con la normale alla superficie di livello $d\phi = |\text{grad}\,\phi|\, ds \cos\theta$: si vede che $d\phi$ è massimo, a parità di spostamento, quando $\theta = 0$ ovvero quando $d\mathbf{s}$ è parallelo e concorde a $\text{grad}\,\phi$; in altre parole il verso del gradiente individua quello di massima variazione di ϕ.

Mediante l'operazione di gradiente si passa da un campo scalare $\phi(x, y, z)$ a un campo vettoriale $\mathbf{a} = \text{grad}\,\phi$. Dato un campo vettoriale $\mathbf{a}$ non è detto che esista un campo scalare ϕ di cui $\mathbf{a}$ sia il gradiente. Ove ciò avvenga si dice che il campo vettoriale è *conservativo*. Per i campi conservativi le (A.1-A.2) diventano

$$\int_A^B \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \text{grad}\,\phi \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A) \quad , \qquad (A.7)$$

$$\Gamma_C(\mathbf{a}) = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \oint d\phi = 0 \quad . \qquad (A.8)$$

In un campo vettoriale conservativo l'integrale di linea non dipende dal particolare cammino scelto, ma soltanto dagli estremi A e B; di conseguenza la circuitazione risulta sempre nulla. Sussiste il seguente teorema: *condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale sia conservativo è che la circuitazione estesa a una qualunque linea chiusa contenuta nel dominio del campo sia nulla.*

Il campo elettrostatico è un esempio di campo vettoriale conservativo: il campo scalare di cui è il gradiente è il potenziale.

Nel calcolo vettoriale viene introdotto il vettore simbolico

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{u}_z \quad ; \qquad (A.9)$$

si tratta di un *operatore vettoriale* che acquista significato quando viene applicato opportunamente a uno scalare o a un vettore (come vedremo). È evidente che

$$\text{grad}\,\phi = \nabla \phi \quad . \qquad (A.10)$$

A.4 Divergenza di un campo vettoriale. Campo solenoidale

Dato un campo vettoriale $\mathbf{a}$ si definisce *divergenza* di $\mathbf{a}$ la quantità scalare

$$\text{div}\,\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{a} \quad ; \qquad (A.11)$$

questa operazione fa passare da un campo vettoriale a uno scalare.

Il significato fisico della divergenza è mostrato dal seguente risultato: il flusso di $\mathbf{a}$ uscente dalla superficie laterale di un cubetto infinitesimo considerato nel dominio di $\mathbf{a}$ è uguale al prodotto del volume del cubetto per la divergenza di $\mathbf{a}$, calcolata in un punto interno al cubetto:

$$d\Phi(\mathbf{a}) = d\tau\,\text{div}\,\mathbf{a} \quad .$$

In termini finiti, data una superficie chiusa Σ che racchiude un volume τ, essendo Σ e τ completamente contenuti nel dominio di $\mathbf{a}$, sussiste il *teorema della divergenza*: il flusso del campo vettoriale $\mathbf{a}$ attraverso Σ è uguale all'integrale della divergenza di $\mathbf{a}$ esteso a τ:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{a}) = \oint \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n \, d\Sigma = \int_\tau \text{div}\,\mathbf{a}\, d\tau \quad . \qquad (A.12)$$

Un campo vettoriale con divergenza ovunque nulla si dice *solenoidale*; tale è per esempio il campo magnetico $\mathbf{B}$. Sussiste il seguente teorema: condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale sia solenoidale è che sia nullo il flusso del campo attraverso una qualunque superficie chiusa interamen-

te contenuta nel dominio del campo e racchiudente un volume anch'esso tutto contenuto nel dominio del campo.

Proprietà fondamentale di un campo vettoriale solenoidale è la costanza del flusso attraverso le infinite superficie che si appoggiano su un medesimo contorno chiuso (e infatti si parla di flusso di B attraverso un circuito, senza specificare la superficie: per il calcolo si sceglie quella più comoda). Una conseguenza delle precedenti proprietà è che le linee di un campo solenoidale sono sempre chiuse, senza principio né fine.

A.5 Rotore di un campo vettoriale

Si definisce rotore di un campo vettoriale **a** il vettore

$$\text{rot}\,\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{u}_z \qquad (A.13)$$

$$= \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

dove abbiamo usato la definizione (A.9) e la regola per lo sviluppo di un prodotto vettoriale. L'operazione rotore fa passare da un campo vettoriale ad un altro campo vettoriale.

Si verifica che $\text{div rot}\,\mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$ (formalmente è un prodotto misto con due fattori paralleli), cioè che rot **a** è un campo solenoidale. Viceversa, se un campo vettoriale è solenoidale, esso si può esprimere come rotore di un altro campo vettoriale; per esempio, ciò avviene nel caso del campo magnetico **B** e del potenziale vettore **A**.

Il significato fisico del rotore si ricava dal seguente risultato: preso un contorno elementare C' nel dominio di **a**, la circuitazione di **a** lungo C' è uguale al prodotto scalare tra una qualunque superficie orientata $\mathbf{u}_n d\Sigma$ che si appoggi su C' e il rotore di **a** calcolato in un qualsiasi punto della superficie:

$$d\Gamma_C(\mathbf{a}) = \text{rot}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \quad .$$

Il verso del contorno C deve apparire antiorario dalla punta di $\mathbf{u}_n$; non occorre specificare una particolare superficie in quanto rot **a** è un campo vettoriale solenoidale. In termini finiti sussiste il *teorema di Stokes*: preso un contorno C e una qualunque superficie Σ che si appoggi su C, essendo entrambi contenuti nel dominio di **a**, la circuitazione di **a** lungo C è uguale al flusso del rotore di **a** attraverso Σ:

$$\Gamma_C(\mathbf{a}) = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = \int_\Sigma \text{rot}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \Phi_\Sigma(\text{rot}\,\mathbf{a}) \quad ; \qquad (A.14)$$

per i versi vale la convenzione vista sopra.

Un campo vettoriale il cui rotore sia identicamente nullo si dice *irrotazionale*; condizione necessaria e sufficiente perché ciò avvenga è che il campo sia conservativo. Il campo elettrostatico è un esempio di campo irrotazionale.

Vogliamo notare un fatto generale che vale per le tre operazioni di gradiente, divergenza e rotore: esse sono state definite facendo riferimento esplicito al sistema di coordinate cartesiane, però ciascuna operazione ha un significato intrinseco, legato rispettivamente alle variazioni di ϕ, al flusso e alla circuitazione locali di **a**. In effetti si dimostra che le proprietà elencate sono indipendenti dal sistema di coordinate prescelto, ovvero che il risultato delle operazioni gradiente, divergenza e rotore è invariante rispetto al cambiamento del sistema di coordinate.

Infine osserviamo che nelle definizioni di divergenza e rotore abbiamo implicitamente spiegato come si applica l'operatore vettoriale ∇ a un vettore: essendo ∇ formalmente un vettore, sono possibili le operazioni di prodotto scalare (e si ha la divergenza) e di prodotto vettoriale (e si ha il rotore).

A.6 Combinazione delle operazioni gradiente, divergenza, rotore

Le tre operazioni menzionate possono essere combinate tra loro, tenendo conto che il gradiente agisce su un campo scalare e la divergenza e il rotore su un campo vettoriale. Vediamo innanzitutto che

$$\text{div grad}\,\phi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad (A.15)$$

Questa combinazione di derivate si chiama *laplaciano* e si indica con ∇^2:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'equazione $\nabla^2 \phi = 0$ è nota come equazione di Laplace. Si definisce anche il laplaciano di un campo vettoriale:

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla^2 a_x \mathbf{u}_x + \nabla^2 a_y \mathbf{u}_y + \nabla^2 a_z \mathbf{u}_z \quad . \qquad (A.16)$$

Ricorrendo alle definizioni si verificano le seguenti proprietà:

$$\text{rot grad}\,\phi = \nabla \times \nabla \phi = 0 \quad , \quad \text{div rot}\,\mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0 \; , \qquad (A.17)$$

$$\text{div}\,\phi\mathbf{a} = \phi\,\text{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad}\,\phi \quad , \quad \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot}\,\mathbf{b} \, , \qquad (A.18)$$

$$\text{rot}\,\phi\mathbf{a} = \phi\,\text{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad}\,\phi \quad , \quad \text{rot}(\text{rot}\,\mathbf{a}) = \text{grad}(\text{div}\,\mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \qquad (A.19)$$

A.7 Coordinate polari e cilindriche

In molti problemi non si utilizzano le coordinate cartesiane, ma altri sistemi di coordinate: quasi sempre ciò avviene in presenza di particolari condizioni di simmetria, rispetto a un punto o ad una retta, in quanto risultano semplifi-

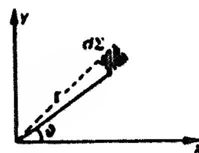
cate le espressioni dei campi e le eventuali operazioni di integrazione. Diamo qui di seguito le relazioni tra tali coordinate e quelle cartesiane e le espressioni degli elementi di superficie e di volume.

a) Coordinate polari nel piano r, θ.

$x = r\cos\theta$ $\qquad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$y = r \operatorname{sen}\theta$ $\qquad \theta = \operatorname{arctg} y/x$

elemento di superficie $d\Sigma = (r\,d\theta)\,dr = r\,dr\,d\theta$.



b) Coordinate polari nello spazio r, θ, ϕ.

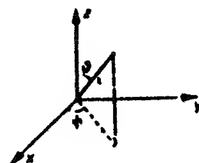
$x = r \operatorname{sen}\theta\cos\phi$ $\qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ $\qquad \theta = \arccos[z/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}]$

$z = r\cos\theta$ $\qquad \phi = \operatorname{arctg} y/x$

elemento di superficie sferica $d\Sigma = (r\,d\theta)\,(r \operatorname{sen}\theta\,d\phi) = r^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi$

elemento di volume $d\tau = dr\,d\Sigma = r^2 \operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$.



c) Coordinate cilindriche r, ϕ, z.

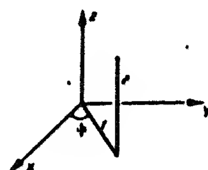
$x = r\cos\phi$ $\qquad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$y = r \operatorname{sen}\phi$ $\qquad \phi = \operatorname{arctg} y/x$

$z = z$

elemento di superficie cilindrica $d\Sigma = r\,d\phi\,dz$

elemento di volume $d\tau = dr\,d\Sigma = r\,dr\,d\phi\,dz$.



A.8 Angolo solido

Fissato un punto O e un qualunque contorno chiuso si chiama angolo solido la parte di spazio delimitata dalle semirette di origine O che congiungono O a tutti i punti del suddetto contorno. Si dimostra che la misura di un elemento infinitesimo $d\Omega$ di angolo solido è data da

$$d\Omega = \frac{r^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi}{r^2} = \operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\phi \quad ,$$

dove i simboli hanno il significato visto nel paragrafo A.7, punto b.

L'unità di misura è lo steradiante; l'angolo solido sotto cui da O è visto tutto lo spazio è 4π.

A.9 Esempi

Si consideri un campo vettoriale a costante e sia r il raggio vettore. Calcoliamo in base alla definizione (A.13) il rotore di $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$, ricordando che le componenti di a sono costanti:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = (a_y z - a_z y)\,\mathbf{u}_x + (a_z x - a_x z)\,\mathbf{u}_y + (a_x y - a_y x)\,\mathbf{u}_z$$

$$\Rightarrow [\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]_x = \frac{\partial}{\partial y}(a_x y - a_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(a_z x - a_x z) = 2a_x \quad ,$$

$$[\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]_y = 2a_y \quad , \quad [\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r})]_z = 2a_z \quad .$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}.$$

In un moto circolare uniforme $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, con $\boldsymbol{\omega}$ vettore costante: identificando a con $\boldsymbol{\omega}$ abbiamo dunque $\boldsymbol{\omega} = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Si può dimostrare che il risultato resta vero per un generico moto rigido poiché la velocità ha una componente rotatoria rispetto a un punto P: in altre parole in un moto rigido il rotore di v è diverso da zero solo nei punti in cui c'è una componente rotatoria del moto.

Come secondo esempio calcoliamo il gradiente della funzione scalare $1/r = 1/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$:

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3} \quad .$$

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y = -\frac{y}{r^3} \quad , \quad \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z = -\frac{z}{r^3} \quad .$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3}(x\,\mathbf{u}_x + y\,\mathbf{u}_y + z\,\mathbf{u}_z) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\,\mathbf{u}_r$$

Ritroviamo così, per esempio, la relazione tra campo e potenziale elettrostatico di una carica puntiforme; vediamo anche che il potenziale di dipolo $V = p\cos\theta/r^2$ si può esprimere come $-\mathbf{p} \cdot \operatorname{grad}(1/r)$.

Infine il risultato torna utile per risolvere il seguente problema: calcolare la forza con cui si attirano due fili rettilinei percorsi da corrente, ortogonali tra loro e distanti d.

Secondo (5.12) la forza tra due circuiti generici si scrive

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_2 d\mathbf{l}_2 \times \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3} \quad ;$$

nell'integrando compare il doppio prodotto vettore $d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{1,2})$ che, in base a una nota regola, trasformiamo in $(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{1,2})\,d\mathbf{l}_1 - (d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1)\,\mathbf{r}_{1,2}$; pertanto:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 d\mathbf{l}_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3} - \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{1,2}^3}\,\mathbf{r}_{1,2} \quad .$$

Nella prima parte $\oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}^3} = -\oint_2 d\mathbf{l}_2 \cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r_{1,2}}\right) = 0$ in quanto l'integrale di un gradiente lungo una linea chiusa è nullo (anche se la line è chiusa all'infinito). In conclusione

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r_{1\,2}^3}\,\mathbf{r}_{1,2} \quad ;$$

questa formula, del tutto equivalente a (5.12) mostra esplicitamente che $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$. Nel caso specifico di fili ortogonali $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2$ è identicamente nullo e la forza risulta eguale a zero.

Dimostriamo ora che la divergenza di un campo vettoriale centrale del tipo $f(r)\mathbf{u}_r$, il cui modulo dipende cioè solo dalla distanza dal centro di simmetria, vale $(1/r^2)\, d/dr\, [r^2 f(r)]$. Scriviamo

$$f(r)\,\mathbf{u}_r = f(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r} = f(r)\,\frac{x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

La componente x risulta $f(r)x/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ e la sua derivata parziale rispetto a x vale $1/r^2\,[x^2\,(\partial f/\partial r) + f(r)(r^2 - x^2)/r)]$; nel calcolo si è usato $\partial f/\partial x = (\partial f/\partial r)\,(\partial r/\partial x)$. Un risultato analogo si trova per le altre due derivate parziali e in definitiva

$$\mathrm{div}\,[f(r)\,\mathbf{u}_r] = \frac{1}{r^2}\,[r^2 f'(r) + 2rf(r)] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\,[r^2 f(r)]$$

* * *

Finito di stampare nel mese di febbraio 1988 da Grafiche G V